Г. Г. ЦЕЙТЕН

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В XVI И XVII ВЕКАХ

ГТТИ



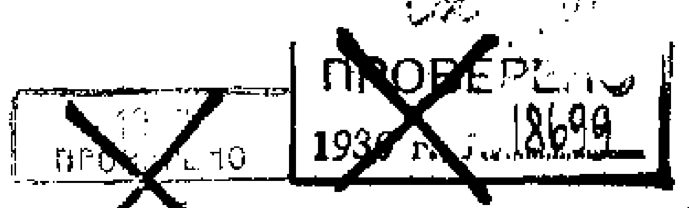
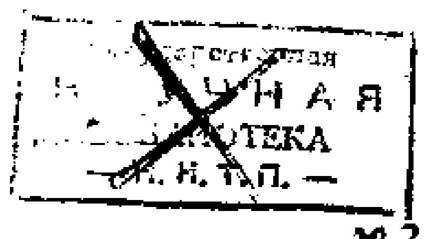
H. G. ZEUTHEN

GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM XVI UND XVII JAHRHUNDERT

DEUTSCHE AUSGABE
UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS BESORGT VON
RAPHAEL MEYER

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903

Г. Г. ЦЕЙТЕН

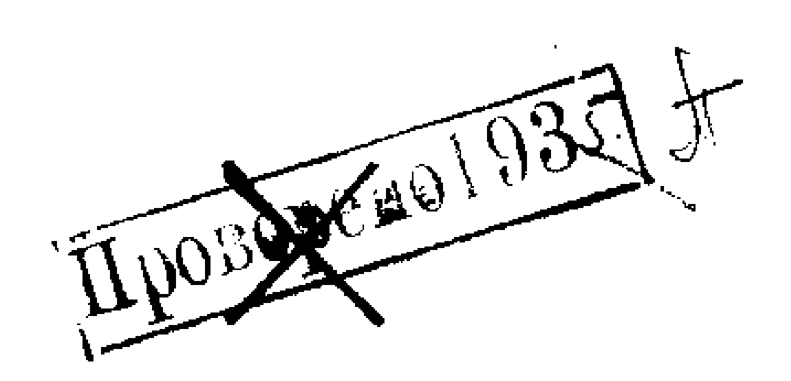
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
В XVI И XVII ВЕКАХ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
П. НОВИКОВА
ОБРАБОТКА, ПРИМЕЧАНИЯ И ПРЕДИСЛОВИЕ
М. ВЫГОДСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

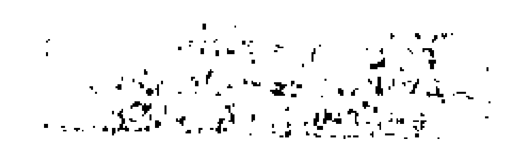
Т-12-5-4





Редакционная работа по этой книге проведена А. П. Юшкевичем. Издание оформлено А. И. Архангельским, Корректуру держала Смирнова. Наблюдал за выпуском Л. М. Волкович. Рукопись сдана в набор 26 апреля 1933 г., листы подписаны печати 1 августа 1933 г. в количестве 5000 экземпляров, на бумаге формата 62×94 в 1/16, печатных знаков в листе 48960, листов 27 и 2 вклейки. Заказ №2548, ОНТИ № 42 Леногорлат № 17666

4-я тип. ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник», Ленинград, Международный пр., 75а.



ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

Имя Цейтена известно русскому читателю по недавно вышедшей в русском издании книге его „История математики в древности и в средние века“, продолжением которой является работа, предлагаемая сейчас вниманию читателя. В русской литературе эта книга является первой серьезной работой по истории математики нового времени, и потому появление ее, несомненно, является большим событием в культурной жизни нашей страны.

Историческое изложение доведено здесь до начала XVIII в. и, к сожалению, не продолжено ни в этой, ни в другой какой-нибудь работе Цейтена. Однако это не лишает книгу ее интереса и актуальности, ибо важнейшие основные идеи новой математики зарождаются и оформляются как раз в ту эпоху, которая здесь рассматривается. Эти идеи и их развитие и составляют, собственно, предмет внимания автора. Его книга выгодно отличается от ряда других работ этого рода тем, что обильно представленный фактический материал не служит здесь самодовлеющей целью: он призван служить иллюстрацией той картины развития, которая должна по замыслу автора представиться взору читателя в первую очередь. Именно поэтому и факты, приводимые Цейтеном, обладают яркостью, и подбор их лишен элемента случайности. Насыщенность книги содержанием достигает крайнего предела: Цейтен скуп на слова до крайности, подчас даже чрезмерно, и книгу его нужно читать вдумчиво, для легкого чтения она не предназначена и не может быть использована.

Я сказал, что в книге Цейтена мы находим не только богатый фактический материал, но и целостную картину развития. К этому нужно добавить, что картина эта, не в пример тем, которые мы встречаем в других аналогичных работах ученых капиталистических стран, построена в очень материалистических тонах. Прежде всего, история математики рассматривается автором в связи с историей естествознания и техники. Правда, он не останавливается на подробностях, говоря о тех стимулах, которые обусловливали развитие математических методов, но он достаточно определенно ссылается на конкретные факты развития смежных областей, а иногда, в особо важных случаях,

даже делает более обстоятельные экскурсы в эти смежные области. Так, например, третьему разделу книги, посвященному истории исчисления бесконечно малых, автор предпосылает обстоятельный очерк развития механики в новое время.

Порой автор приближается вплотную к марксистской постановке вопросов, и только одного шага нехватает сделать для того, чтобы стать на последовательно материалистическую точку зрения. В качестве яркого примера я могу привести начало § 13 второй главы: „Анализ конечной величины после Декарта". Здесь Цейтен, противопоставляя общие методы новой математики частным приемам, характерным для математики предшествующих эпох, проводит очень яркое и удачное сравнение с переходом от ремесленного производства к фабричному. Но это у Цейтена остается только аналогией. Он не делает последнего шага, он не указывает, что сходство, им отмеченное, не случайно, что оно обусловлено тем, что математика развивается в общей связи с развитием производительных сил, и потому в „новое время", в эпоху зарождения машинной техники и крупного производства, с исторической необходимостью должна стремиться к созданию таких методов, которые отвечают потребностям новых форм производства. Этого, как сказано, Цейтен не говорит, повидимому, сам он этого и не сознает, но читатель, знакомый с основами марксизма, не замедлит усмотреть здесь ту закономерность, к которой автор его подвел почти вплотную.

Я сказал, что книга Цейтена до крайности насыщена материалом. При том огромном богатстве фактов и методов, с которыми она знакомит читателя, ее объем следует признать очень небольшим. Однако эта экономия места покупается дорогой ценой; автор достигает краткости изложения в значительной степени тем, что он пользуется современной символикой и понятиями там, где он описывает приемы и методы, построенные на базе иного математического аппарата. Правда, автор всегда отмечает это, так что читатель не вводится в заблуждение и знает, что имеет дело с модернизацией изложения; правда, Цейтен дает некоторое представление и об особенностях стиля старых математических методов. Но когда почти весь фактический материал преподносится читателю в модернизованном изложении, то читатель лишен возможности по-настоящему понять внутреннюю обусловленность развития методов математики и специфические черты излагаемого метода, ибо стиль и метод изложения органически между собою связаны и не могут быть поняты в отрыве друг от друга. Автор прибегает к этой модернизации совершенно сознательно; он прямо указывает на то, что таким образом достигается компактность изложения, и это, несомненно, верно. Но это, как сказано, слишком дорогая цена, и наиболее существенным недостатком книги Цейтена является именно неумеренная модернизация изложения, допущенная автором.

Устранить этот недостаток при обработке книги не представлялось возможным: это значило бы написать книгу заново. Поэтому я вынужден ограничиться тем, что отсылаю читателя к „Хрестоматии по истории математики“ Вилейтнера, вышедшей недавно в русском переводе. В ней читатель найдет ряд отрывков из тех работ, о которых повествует Цейтен. Отрывки эти очень удачно подобраны и точно воспроизводят текст оригиналов. Кроме того, в ближайшее время появятся полные русские переводы классических работ математиков XVII в. (Кеплера, Галилея, Кавальери, Декарта, Ньютона и Лопиталя), которые дадут возможность познакомиться документально с важнейшими из тех фактов, о которых повествует в этой книге Цейтен.

Если в указанном выше отношении переработка Цейтена была невозможна, то в ряде других сторон русское издание значительно отличается от оригинала.

Прежде всего это касается вопросов стиля. Язык Цейтена благодаря своей сжатости чрезвычайно тяжел для понимания. Русский читатель может судить об этом хотя бы по книге того же автора о математике древней и средневековой, переводчик которой, повидимому, стремился к возможно более точной передаче оригинала. Стремясь к тому, чтобы облегчить чтение книги, переводчик и редактор „Истории математики в XVI и XVII вв.“, напротив, поставили себе задачей придать изложению большую внешнюю простоту и в меру умения обеспечить литературность изложения. Принимая во внимание требования и особенности русского языка, мы должны были в ряде мест прибегнуть к очень вольной передаче оригинала, и нам кажется, что мы скорее виновны в недостаточно тщательном проведении этого приема, чем в злоупотреблении им.

Но этого мало. В качестве редактора я считал необходимым подвергнуть книгу обработке не только стилистической, но и по существу. В целом ряде мест Цейтен трудно понимаем не только потому, что труден его стиль, но и потому, что он набрасывает картину слишком быстрыми движениями кисти. Для читателя, впервые знакомящегося с историей математики, такая беглая характеристика часто совершенно недостаточна. В таких случаях я распространял изложение, а иногда и вовсе отказывался от цейтеновского текста, заменяя его другим. Разумеется, при этом всегда представлялось опасным разбить единство произведения. Я стремился к тому, чтобы избежать этой опасности и добиться того, чтобы читатель не мог отличить интерполированный текст от текста оригинала.

Я счел себя также в праве сгладить те места, где, излагая по существу правильные взгляды, автор в несущественных деталях проявляет некоторую наивность, являющуюся следствием стихийности его материалистических воззрений. Разумеется, при этом момент субъективности всегда остается; однако, я стремился к тому, чтобы всемерно избежать таких изменений

в тексте, которые вносили бы в точку зрения автора существенные поправки. Это, конечно, отнюдь не означает, что я согласен со всеми высказываниями Цейтена. Напротив, в ряде пунктов, и притом весьма существенных, взгляды автора являются, с моей точки зрения, в корне неправильными. В таких случаях, однако, я не считал возможным делать Цейтена ответственным за чуждые ему взгляды. Я предпочел сохранить в таких местах текст автора, сопровождая его редакционными примечаниями, иногда довольно пространными.

Очень возможно, что таких примечаний следовало бы дать гораздо больше, чем я это сделал, но я считал себя в праве писать лишь о тех вопросах, с историей которых я знаком документально. А так как эрудиция Цейтена огромна, то далеко не всегда я был в состоянии судить о взглядах, им высказываемых, с достаточной степенью критичности.

Несмотря на указанные выше недочеты этой работы, она, несомненно, принесет большую пользу очень широкому кругу читателей. В особенности полезной явится она для преподавателя. Я убежден, что многих преподавателей она заставит подвергнуть пересмотру свои педагогические установки, в особенности в вопросе о преподавании исчисления бесконечно малых. История метода бесконечно малых покажет им, что те основные понятия, с которых начинают обычно знакомить учащегося, вовсе не являются столь простыми и доступными, как это представляется многим, и что привычка часто заменяет понимание там, где она не должна была бы его заменять. История покажет, какие трудности представляло овладение этими основными понятиями даже для гениальных творцов новой математики, которые подходили вплотную, как, например, Ньютон, к понятию предела, но не могли сделать этого понятия рабочим инструментом математического творчества. Вдумчивое чтение книги должно показать читателю, что творческое овладение понятием предела на первых ступенях знакомства с предметом чрезвычайно затруднительно; это-то и является причиной того, что большинство учащихся воспринимает анализ формально, что лишь очень немногие инженеры научаются пользоваться высшей математикой в своей инженерной практике.

Я говорю: вдумчивое чтение, потому что эту книгу нельзя читать иначе; ее нельзя „проглотить“; ее нельзя только прочитать и не продумать. Такое чтение не принесет пользы и будет почти напрасной потерей времени. Но читатель, продумавший эту книгу, к каким бы выводам он ни пришел, каково бы ни оказалось его отношение к высказываемым здесь взглядам, наверное не пожалеет о затраченном им труде.

М. Выгодский.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ.

Эта книга, выходящая одновременно на немецком и на датском языках, представляет собой продолжение моей „Истории математики в древности и в средние века“, вышедшей в 1893 г. в датском, а в 1896 г. в немецком изданиях. Формально, однако, она независима от этого первого произведения, и ее можно читать и без предварительного знакомства с ним. Но развитие математики в XVI и в XVII вв. так тесно связано с изысканиями древних, что на последние часто приходится указывать, чтобы обеспечить правильное понимание связанных с ними новых исследований. Те из моих читателей, которые хотели бы получить более полное представление об обстоятельствах, на которые я здесь указываю, могут в только что названной моей работе найти более подробные сведения. Поэтому я, ссылаясь на предшествующие события, всегда указываю те места немецкого издания, где читатель сможет найти соответствующие пояснения[1].

Так же, как и названная выше работа, и эта книга предназначена не столько для историка, сколько для математика и преподавателя математики. Поэтому я не вхожу здесь в подробности, когда речь идет о деталях чисто исторического характера или о ссылках на различные дошедшие до нас произведения. Для этого пришлось бы только сделать извлечение из уже существующей литературы по истории математики, что значительно увеличило бы объем работы. Если все-таки моя книга имеет не малый объем, то получилось это потому, что читатель, к которому я обращаюсь, нуждается в более подробном рассмотрении некоторых деталей характера чисто математического. Так, например, можно, конечно, в очень немногих словах рассказать, когда и кем впервые был найден тот или иной метод, которым современный математик пользуется для преодоления тех или иных трудностей или для достижения некоторой цели. Однако историческое повествование должно дать математику или преподавателю математики еще и другой материал, гораздо более для него важный. Ибо гораздо более глу-

---

[1] В русском переводе соответствующие ссылки сделаны на русское издание ГТТИ 1932. *Прим. ред.*

бокое понимание тех методов, которыми он пользуется и которые он преподает, он приобретет тогда, когда узнает, как, еще до того как этот метод получил свою нынешнюю форму, математики старались достигнуть той же цели и в какой мере им удавалось в действительности этой цели достигнуть. Это позволит ему, во-первых, научиться отличать внутренние черты, неразрывно связанные с методом, от той внешней формы, которую этот метод получил в результате целого ряда обстоятельств; во-вторых, это позволит ему судить о том, в какой мере окончательный выбор этой формы обусловлен действительными ее преимуществами и в какой,—чисто случайными обстоятельствами. Часто в истории своей науки математик найдет и такие методы, которые хотя и становятся потом излишними благодаря позднейшим успехам науки,но которые, однако, могут еще оказаться полезными в дальнейшем развитии науки.

Все эти замечания могут быть в очень большой степени отнесены и к тем двум столетиям развития нашей науки, которые здесь рассматриваются. В этот период алгебра, в значительной степени благодаря работам Виета, получила такое развитие, что постепенно она смогла достигнуть ступени, на которой мы застаем ее в аналитической геометрии Декарта. В этот период унаследованные от древних греков и вновь возрожденные инфинитезимальные исследования получают новый толчок к развитию благодаря тем средствам, которые Кеплер, Галилей и Гюйгенс ввели для нужд своих астрономических и физических исследований. Эти инфинитезимальные методы достигли, наконец, такого развития, что в диференциальном и интегральном исчислениях, созданных Лейбницем, они получили их нынешнюю внешнюю форму, с другой же стороны, они легли в другой форме, совершенно независимой от лейбницевой, в основу ньютоновых „Начал". В последнем из двух рассматриваемых здесь столетий, изучая самые различные проблемы новой математики, Ферма доказал, что для большого математика не было даже нужды в развитой математической технике, чтобы разбираться в труднейших вопросах. Дезарг и Паскаль проложили новые пути в геометрии, которые лишь спустя полтора столетия были вновь продолжены, в то время как логарифмы Непера тотчас же получили практическое применение и оказали большое влияние на развитие других областей математики.

Сверх того, предназначаемая мной для математиков и для преподавателей математики работа, если только она мне удалась, должна иметь значение также и для установления исторических точек зрения. Именно, моей целью было достичь того, чтобы на первый план выступало отчетливо развитие математики. В этом отношении я должен пожалеть, что ни объем работы, ни форма изложения не позволяют мне приводить цитат, число которых и объем должны были бы быть достаточно велики, чтобы они могли иметь какое-нибудь значение. Если я делаю

некоторое исключение для „Геометрии" Декарта и для „Начал" Ньютона, то это потому, что я хотел побудить математиков познакомиться в подлиннике хотя бы с этими основными произведениями. Что касается отдельных пунктов, в которых моя трактовка отклоняется от воззрений других авторов, то я подробнее остановился на них в моих „Заметках по истории математики", напечатанных в „Обзорах датского королевского научного общества". Конечно, я готов и к дальнейшему обоснованию своих взглядов, если мои другие взгляды покажутся кому-нибудь спорными.

Так как я отказался от какого бы то ни было цитирования, то я не имел также никакой возможности приводить в этой книге имена тех современных авторов, в работах которых я находил разъяснение исторических фактов, руководящие указания для правильного понимания их или сообщения о произведениях, доныне не напечатанных. Из числа всех этих авторов я, как и всякий, кто хотел бы заняться той или иной главой истории математики, должен с благодарностью назвать Морица Кантора. Без его курса истории математики, отличающегося исключительной полнотой, многое из того, что я должен был рассмотреть, было бы мною упущено, и я не мог бы проконтролировать себя и определить, использовал ли я все то, что существенно необходимо для моей цели. Из „Курса по истории тригонометрии" Браунмюля я при составлении этой книги имел возможность использовать только первую его часть. Однако из содержания недавно появившейся второй части этой работы я использовал все то, что автором и его учениками было прежде опубликовано. Далее, я пользовался работой Маха „Механика в ее развитии", сочинением Риттера о Виета, статьями Курце о средневековье и раннем Ренессансе, многочисленными статьями о французских математиках, принадлежащими блестящему перу Таннери, сообщениями Лориа о Торичелли, Гергардта о Лейбнице и многими другими работами. Не называя всех их по отдельности, укажу на статьи, помещенные в „Bullettino" Бонкампаньи, на серию „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik", на исторический отдел журнала „Zeitschrift für Mathematik und Physik" и на энестрёмовский журнал „Bibliotheca mathematica", а кроме того, и на работы самого Энестрёма, печатавшиеся в других местах. В первой главе моей книги, в которой я даю общий исторический и биографический обзор, чтобы затем иметь возможность придерживаться такого расположения материала, который соответствует математическому его содержанию, я пользовался новыми биографическими справочниками, а для кратких сообщений о философских работах некоторых авторов — историей философии Г. Гёфдинга.

Многие работы появились так поздно или так поздно попали мне в руки, что я не имел возможности их использовать. Так, только теперь я узнал из статей Боссмана, что де-ла-Файль был учеником Григория Сен-Винцента, у которого он, следовательно,

научился тщательному проведению доказательства методом исчерпывания. Из статьи Валльнера, которую я только что получил, я вижу, что неясное понятие „неделимых“ Кавальери, по мнению автора, заимствовал из философии средневековья. У меня же в книге работы Кавальери поставлены в связь с работами других математиков, давшими возможность Кавальери получить надежные правила, которые долго сохраняли свое значение и которым Паскаль дал точное выражение.

Из опубликованных Курце произведений математиков XVI в. видно, что правило „сетиш“ связывалось с преданием об его индусском происхождении. Содержащиеся там же указания на то, что с решением кубического уравнения были знакомы авторы более ранние, чем те, которые называются обычно и которые названы также и в моей книге, — слишком неопределенны, чтобы на них можно было прочно основываться.

В заключение я должен принести благодарность д-ру И. П. Грам, который прочел главы, относящиеся к технике вычислений и к теории чисел, и по совету которого я ввел некоторые отдельные улучшения, и д-ру Бьёрнбо за тщательное составление указателя, за принципы составления которого, однако, отвечаю лично я. Кроме того, Р. Кнешке, который по поручению издательства Тейбнера проделал литературную редакцию немецкого перевода и корректуру, я приношу благодарность также и от имени моего переводчика. Ему я обязан и исправлением некоторых отдельных неточностей математического характера.

Автор.

I. ИСТОРИЧЕСКИЙ И БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР.

Начало XVI в. было в математике, как и в других областях культуры, переломной эпохой, введением в „новое время". Причины, сперва подготовившие, а затем вызвавшие начинающийся с этих пор пышный расцвет математических наук, в известной мере совпадают с теми, которые вызывали в это время общее брожение и зарождали новую жизнь. Движение это перекидывалось из одной области в другую, что оказывалось весьма благотворным для развития математики, стимулировавшегося предъявлявшимися к ней извне запросами.

В последние столетия средних веков математическая работа состояла главным образом в постепенном усвоении результатов, полученных раньше греками, индусами и арабами. В Западную Европу эти результаты проникали постепенно, частью от арабов, продолжавших еще тогда заниматься как греческой и индусской математикой, так и своей собственной, частью из Константинополя, где, быть может, не было движения вперед, но где имелись сочинения, содержавшие греческую математику в чистом виде и в ту пору еще мало понятые. Усвоение всего этого наследства могло быть достигнуто в Западной Европе лишь путем все более и более самостоятельной работы. Сперва эта работа вызывалась неудовлетворительностью того изложения, в котором дошли до европейцев приемы и результаты древних греков, а позже, когда начали читать греческих авторов в оригинале, ее потребовала, напротив, античная строгость изложения, рассчитанная на читателя, обладающего уже значительным математическим образованием. Такая самостоятельная работа позволила не только усвоить то, что знали предшественники, но и придать этому новые формы. Формами этими научились постепенно владеть даже лучше, чем старыми, и довели их до такой степени развития, что они оказались в состоянии вместить новое и более обширное содержание. Все большим успехом сопровождалось изучение Евклида, бывшего известным, главным образом, по переводу Кампана (Campanus, XIII в.); Птоломея знали благодаря арабам; была достигнута степень зрелости, делавшая возможным успешное изучение Архимеда, Аполлония, Диофанта и столь богатого сведениями относительно древней греческой математики Паппа (Pappus). В то же время благодаря арабам

европейцы ознакомились с индусской арифметикой и с алгеброй арабов, включавшей уже теорию и практику уравнений 2-й степени. Наконец, Региомонтан (Regiomontanus) достиг больших успехов в связанной с астрономией тригонометрии[1].

То обстоятельство, что непосредственное знакомство с упомянутыми греческими математиками, как и вообще с греческой литературой, относится как раз к рассматриваемому периоду, стоит, как известно, в связи с завоеванием Константинополя. Другие постепенно расширявшиеся внешние сношения способствовали более быстрому развитию и большему распространению научной работы. В начале средних веков эта работа сосредоточивалась лишь в монастырях; но уже на примере Леонардо из Пизы мы видим, что представители вступавших в полосу процветания торговых кругов Италии также брались за математические исследования, и как раз в силу своей принадлежности к этим кругам они могли не только подобно Леонардо собирать в различных местах новые материалы, но и знакомить с собственными достижениями другие страны — Германию и Францию. Далее, реформация содействовала тому, что у римской церкви была отнята монополия на ученость, и притом не только в тех странах, где реформация победила, но и в остальных, где, несмотря на поражение, она способствовала пробуждению интереса к умственной деятельности в более широких кругах. Наконец, книгопечатание сделало возможной не существовавшую до тех пор связь между учеными.

Наукой, оказывавшей наибольшее влияние на развитие математики до рассматриваемого нами периода, была астрономия. Помимо еще более ранних импульсов, исходивших от нее, предъявляемые ею требования рано содействовали зарождению тригонометрии, а затем подняли последнюю на такую высоту, что она была теперь в состоянии, не ограничиваясь собственными успехами, оказывать также существенные услуги алгебре. Новые требования были поставлены теперь математике новым учением Коперника; они содействовали успехам математики как среди защитников этого учения, так и среди его противников. За Коперником последовали Тихо-Браге, Галилей, Кеплер и Ньютон, и мы увидим, в какой значительной степени астрономические работы этих ученых являлись в продолжение рассматриваемых нами двух столетий источником величайших успехов математики.

Астрономия предъявляла к математике свои оплодотворявшие последнюю требования не только в связи с новыми воззрениями на окружавшую землю вселенную. Такие требования исходили также от мореплавателей, начавших теперь

---

[1] По этому вопросу мы отсылаем читателя к книге Г. Г. Цейтена „История математики в древние и средние века“ (русский перевод изд. ГТТИ 1932), которая неоднократно будет цитироваться и в дальнейшем. Достижения Региомонтана будут подробнее рассмотрены также в соответствующем отделе настоящей книги.

совершать кругосветные путешествия; вызывались они и потребностью в новом календаре, призванном сменить юлианский, несовершенство которого становилось теперь ясным.

Сказанное здесь об астрономии относится также и к механике. Учение о равновесии, ставшее точной наукой уже у Архимеда, в своем новом мощном развитии продолжало пользоваться математикой и тем самым способствовать ее развитию и обогащать ее ценными методами; когда же Галилей подверг столь же точному исследованию движение, то для этого потребовались и благодаря этому действительно были найдены новые математические ресурсы, развитие которых породило исчисление бесконечно-малых. Впоследствии успехи математики также оставались тесно связанными с разработкой вопросов динамики как земной, так и небесной.

За астрономией и механикой шли другие естественные науки. Оптика, включая в нее учение о перспективе, ставила, как и в древности, вопросы, которые можно было непосредственно облечь в геометрическую форму; учение о преломлении лучей порождало все более обстоятельные математические исследования. Если этого пока еще нельзя было сказать о других естественных науках, то во всяком случае во всех областях естествознания, так же как и в астрономии и механике, получали все большую силу новые воззрения, благотворно сказывавшиеся и на математике. Суть этих воззрений заключалась в том, что наше знание природы основывается на опыте, и притом все время на новом и прямом опыте, а не на выводах из готовых принципов, некогда установленных Аристотелем или приписывавшихся ему. При такой точке зрения всегда имелась потребность в математической дедукции, так как из каждой новой гипотезы надо было вывести точные следствия, чтобы наблюдения и опыты, которые могли либо согласоваться с выведенной гипотезой, либо противоречить ей, могли соответственно этому подтвердить гипотезу либо вскрыть ее несостоятельность. Это движение возглавлялось такими людьми, как Кеплер и Галилей; они являлись в этом отношении предшественниками своего современника Бэкона Веруламского, установившего подобные же принципы исходя из философских соображений. Проблемы, возникавшие в борьбе между старыми и новыми воззрениями, тотчас же становились предметом рассмотрения таких ученых, как Декарт и Лейбниц, огромные заслуги которых в области математики тесно связаны с их философскими построениями.

Таким образом оживление математической мысли стояло в тесной связи с общим духовным раскрепощением, связанным с эпохой Возрождения и Реформации. Мы видим это также из того, что великие художники Леонардо да-Винчи и Альбрехт Дюрер оставили свой след и в области математики и притом не случайно, но в связи с вопросами, имевшими близкое отношение к их искусству. Крупного математика Штифеля мы видим

в числе лиц, наиболее близких к Лютеру; Виета, сам бывший, правда, индифферентным по отношению к религиозным вопросам, находился все время в атмосфере споров между гугенотами и католиками; другой французский математик, Рамус (Ramus), был убит в Варфоломеевскую ночь как гугенот; Паскаль и Декарт принадлежали, каждый по-своему, к тем, кто искал внутри римской церкви освобождения, подобного тому, которого протестанты добились, выйдя из нее.

Начало новой, самостоятельной математики, открывающее рассматриваемый в настоящей книге период, было положено на родине Возрождения, в северной Италии. Толчок к ее развитию был дан тем, что в области чистой математики решена была задача, с которой не могли справиться древние и арабы,— именно задача о решении уравнений 3-й степени. К обстоятельствам, при которых эта задача была решена и в ближайшее же время привела к весьма успешным исследованиям, мы сейчас и обратимся.

Сципион дель-Ферро (Scipione del Ferro), бывший с 1496 по 1526 г. профессором в Болонье, нашел сперва решение уравнения $x^3 + ax = b$, где a и b—положительные числа; он сообщил это решение только своему зятю и преемнику по должности Аннибалу делла-Наве (Annibale della Nave) и некоему Фиоре (Fiore или Floridus). Такое утаивание метода может быть объяснено естественным желанием иметь возможность спокойно продолжать дальнейшую его разработку; но в то время оно получало особое значение благодаря практиковавшимся тогда научным поединкам, на которых обе стороны предлагали друг другу задачи, причем дело шло о том, чтобы решить возможно большее количество задач противника и по возможности затруднить ему решение своих задач. Победитель получал при этом не только назначенный приз, но и славу и сопряженные с нею выгоды. Так как условия задач, которые могли быть решены алгебраически, задавались обычно числовыми данными, то для такого поединка обладание формулой или рецептом, по которому можно было составить много таких задач, имевших различный вид, представляло большее преимущество, нежели честь опубликования общего правила. Мы видим это на Фиоре, не обладавшем глубоким пониманием математики, но вызывавшем других на подобные поединки, в расчете на выигрыш, шансы на который обеспечивались обладанием формулою Ферро.

В одном из таких поединков он встретился с Никколо Тартальей (Nicolo Tartaglia, 1500—1557) из Бресчии. Гениально одаренному Тарталье с юных лет пришлось бороться с крайне тяжелыми условиями, явившимися следствием разорения его родины французами. Он на всю жизнь сохранил память об этом, так как в результате жестокости одного француза при взятии Бресчии он получил расстройство речи. Память об этом хранится даже в его имени, которое в переводе значит „заика". После смерти его отца (в 1506 г.) мать его жила в стесненных

условиях, и он получил поэтому запоздалое и недостаточное образование. Позже он зарабатывал себе хлеб в Венеции и Бресчии преподавательской работой. Суровую борьбу за существование и за славу, которой заслуживал его гений, вел он, однако, не всегда достойными средствами. Так, он издал якобы свой перевод работы Архимеда о плавающих телах, оказавшийся впоследствии извлечением из перевода Мёрбеке (Mörbecke), в то время как греческой рукописи, на которую он ссылался, вовсе не существовало. Важнейшими сочинениями его являются: „Новая наука" („Nuova Scienza"), трактующая о вопросах механики; полемические работы; работы, в которых он делает сообщения о своих устных поединках, и, наконец, частично появившийся только после его смерти „Общий трактат о числе и мере" („General trattato di numeri et misuri").

В дальнейшем мы неоднократно встретим его имя, связанное, однако, прежде всего именно с решением уравнений 3-й степени. Приняв вызов Фиоре, он сперва думал, что легко победит столь мало сведущего противника; но узнав, при приближении срока схватки, что Фиоре обладал правилом умершего Ферро, он приложил все усилия и нашел самостоятельно — как раньше Ферро — за восемь дней до назначенного срока правило для решения уравнений вида $x^3+ax=b$. В день поединка, 12 февраля 1535 г., он смог решить все 30 задач Фиоре, тогда как тот, по сообщению Тартальи, не решил ни одной из его задач, тщательно выбранных из различных областей, не решил даже такой задачи, которую он мог бы решить по правилу Ферро. Через день после этого Тарталья нашел, как он сообщает, также решение уравнения $x^3=ax+b$.

Успех Тартальи возбудил особое внимание Джироламо Кардано (Girolamo Cardano, 1501—1576), автора объемистых трудов по философии, в которых он горячо ратует за знание, основанное на опыте, а не на авторитете Аристотеля, а также работ по фармацевтике и математике; как по разнообразию интересов и занятий, так и по всему своему складу Кардано — настоящий сын эпохи Возрождения. С одинаковым увлечением он предается своим страстям и благочестивым рассуждениям, переходящим, однако, иногда в грубое суеверие. Уже в ранних работах он занимался уравнениями 3-й степени, не пойдя, впрочем, дальше внешних преобразований или решения в таких простых случаях, где дело идет о рациональных корнях. Когда стало известно, что Тарталья обладает более значительными результатами, он жадно стал стремиться к тому, чтобы узнать их. Своей настойчивостью он добился, наконец, в 1539 г. от Тартальи краткого сообщения относительно этих решений, дав ему клятву не разглашать их. Позже он пытался получить некоторые дальнейшие разъяснения, особенно когда он заметил, что правило Тартальи для решения уравнения $x^3=ax+b$ при некоторых значениях коэфициентов, именно в так называемом неприводимом случае, непригодно; однако, когда он затронул этот вопрос, Тарталья

совершенно прекратил свои сообщения. В 1545 г. Кардано нарушил данную им Тарталье клятву, опубликовав работу: „Великое искусство в вопросах алгебры" („Asr magna de rebus algebraicis"), в котором подробно разбирались уравнения 3-й степени.

Сообщениям Тартальи здесь было, правда, воздано должное; сверх того, Кардано считал, что он приобрел некоторое право на опубликование тем, что, посетив в Болонье зятя Сципио дель-Ферро, он узнал решение Ферро, совпадавшее с найденным Тартальей. Так или иначе, Тарталья был глубоко обижен тем, что первенство в опубликовании осталось не за ним. По его утверждению, он все время подготовлял работу об уравнениях 3-й степени. Она, однако, никогда не увидела света, и только один единственный результат, приведенный им в „Общем трактате" свидетельствует о том, что он продвинулся в этой области дальше по сравнению с тем, что он уже сообщил Кардано и что опубликовал в своей полемике.

В полемике этой принял участие, однако, не сам Кардано, а его юный и горячий ученик Луиджи Феррари (Luigi Ferrari, 1522—1565), ведший борьбу с большой страстностью. Свою большую одаренность Феррари доказал тем, что нашел решение уравнений 4-й степени, и притом столь быстро, что оно смогло быть помещено в „Ars magna" его учителя. „Ars magna", наряду с другими наиболее значительными работами Кардано, находится в 4-м томе его сочинений. Из итальянцев, занимавшихся позже в том же столетии алгебраическими уравнениями, назовем еще Рафаэля Бомбелли (Rafael Bombelli) из Болоньи, „Алгебра" которого появилась в 1572 г.

Раньше чем перейти к алгебраическим работам в других странах, образующим продолжение начатого в Италии, мы упомянем о других мощных импульсах к развитию математики, данных несколько позже тою же страною. В качестве одного из них укажем на более близкое знакомство с капитальными исследованиями древних, ставшее возможным благодаря Федериго Коммандино (Federigo Commandino, 1509—1575) из Урбино, переводчику Паппа, и Франческо Мавролико (Francesco Maurolico, 1494—1575) из Мессины, переводчику Архимеда; мы называем здесь только наиболее значительных переводчиков и их наиболее известные переводы. Мало того, что переводы эти выполнены, в противоположность прежним переводам греческих математиков, с ясным пониманием греческих оригиналов, но это понимание проявлено упомянутыми учеными также в их собственных работах, трактующих вопросы, поставленные древними. Особенно это относится к Мавролико, который был широко образованным человеком, занимавшимся наряду с математикой физическими экспериментами, метеорологическими наблюдениями, а также историей. Совершенно новые идеи в области механики, лишь в отдельных частностях подготовленные работами предшественников, были развиты Галилео Галилеем, уроженцем Пизы (1564—1642). Отец его был видным музыкантом и историком

музыки; от него Галилей унаследовал любовь к этому искусству В детстве занимался он также конструированием изобретенных. им самим машин. В университете своего родного города, где он по желанию отца выбрал специальностью медицину, он скоро, однако, перешел к занятиям философией, физикой, математикой и астрономией. В занятиях ему помог Гвидо Убальдо, (1545—1607) один из учеников Коммандино. Галилей выступил против господствовавшего в то время в физике слепого преклонения перед учениями Аристотеля, так как он сам производил опыты, противоречившие этим учениям. Так, он усмотрел независимость скорости паде ния от веса тела. В 19-летнем возрасте, наблюдая за движениями совершавшего постепенно затухавшие колебания соборного паникадила, Галилей заметил, что продолжительность колебаний не зависит от величины отклонения. В дальнейшем он проверил как этот факт, так и ряд других, самостоятельно поставленными опытами. Подобным же образом и в области астрономии он утратил доверие к искусственной птоломеевой системе. Противовес авторитетам Аристотеля и Птоломея он старался найти в сочинениях Платона и Архимеда, которые он тщательно изучил.

Хотя при таких обстоятельствах Галилей скоро убедился в правильности коперниковой системы, однако, став в 1589 г. профессором в Пизе, в своих лекциях он придерживался птоломеева учения и продолжал делать это, по крайней мере первое время, и тогда, когда в 1592 г. он получил лучшее место в Падуанском университете. Здесь, в мощной венецианской республике существовала значительно бо́льшая научная свобода, чем на его родине, находившейся в большей зависимости от духовенства. Галилей пользовался этой свободой не только для собственных занятий всевозможными вопросами физики и астрономии, но также для более широкого распространения своих мыслей как через своих учеников, так и с помощью статей и писем. Здесь начинается его переписка с Кеплером. Изобретение телескопа дало ряд доводов в пользу коперниковой системы — существование спутников Юпитера, вращение Луны вокруг оси, фазы Венеры и солнечные пятна.

В 1610 г. уже прославивший себя Галилей получил должность „первого философа и математика великого герцога Тосканского" и переехал во Флоренцию. И здесь первое время отношения Галилея и представителей церкви не были враждебными. Галилей был принят в члены римской „Академии рысьеглазых" (Academia dei Lincei). Ему удалось быстро оправдаться перед инквизицией, защитив себя от обвинений иезуитов, хотевших, быть может, выместить на нем изгнание иезуитского ордена из Падуи; этому изгнанию Галилей в свое время действительно содействовал. Однако сочинение Коперника „Об обращениях небесных кругов" („De revolutionibus orbium coelestium", 1616) попало в список запрещенных книг, и одновременно Галилею было сделано негласное предупреждение. Это не помешало ему все же работать

дальше, и в 1632 г. он опубликовал свое сочинение „Диалоги о двух великих системах мироздания, птоломеевой и коперниковой“; как указывает само название, оно имеет форму диалогов, в которых излагались аргументы за и против птоломеевой и коперниковой системы. Эти аргументы безусловно убеждают читателя в правильности коперниковой теории, но у самого Галилея такой вывод прямо не формулируется. Напротив, в предисловии он, желая добиться разрешения на выход книги, указывает, что этим сочинением автор хочет содействовать опровержению коперниковой теории и вместе с тем показать, что католики в согласии с учением церкви отвергают эту теорию во всеоружии знания и что они знакомы со всеми доводами, которые могут быть приведены в ее защиту.

После путешествия в Рим, где ему был оказан благосклонный прием, Галилей думал, что получил от папы согласие на выпуск своего труда; согласие это, однако, было взято назад, и Галилей после появления своего сочинения был вызван в инквизицию. 69-летний старик получил предписание явиться в Рим и под угрозою пыток был вынужден клятвенно отречься от того, что именовалось лжеучением. Несмотря на это, его присудили к трем годам тюрьмы и церковному покаянию. От заключения он был, правда, освобожден, но остаток жизни он провел под постоянным надзором. В довершение всего его постигли материальные лишения и физические недуги. В последние годы жизни он лишился зрения. И однако как раз в этот период своей жизни Галилей написал, основываясь на произведенных им в юности опытах и исследованиях, свой наиболее интересующий нас здесь труд — труд, в котором он так же кладет основание научной динамики, как Архимед в свое время положил основание статике. Труд этот появился в 1638 г. по цензурным условиям он был напечатан в Голландии. Он носит заглавие „Беседы и математические доказательства, относящиеся к двум новым наукам“ („Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze“), и написан в форме бесед между теми же тремя лицами, которые фигурировали в упомянутом выше сочинении Галилея о двух системах мироздания. В этом труде Галилей излагает ряд наблюдений и опытов; на них опираются устанавливаемые им законы динамики. Сочинение это является поэтому исходным пунктом в развитии новой экспериментальной физики. Но не меньшее значение имеет оно и для математики, так как из установленных и подтвержденных экспериментом предпосылок Галилей математически выводит их следствия; так, например, он определяет путь, пройденный тяжелым телом за некоторый промежуток времени, исходя из того, что скорость падения возрастает при этом пропорционально времени. Эта вполне сознательно проводимая Галилеем связь между опытными исследованиями и их математической обработкой, наряду с аналогичными и одновременно протекавшими исследованиями Кеплера, имела огромное значение для философии, получившей теперь новую теоретико-познавательную базу.

Большое значение для развития математики имело то, что затронутая теперь новая область требовала новых методов математического исследования, именно, методов, связанных с рассмотрением бесконечно малых величин. Методы эти развивались в дальнейшем с расширением новой области и вызывавшимися им новыми требованиями. Способы рассуждений науки о движении проникли и в самое математику и немало содействовали уяснению понимания непрерывной изменяемости величин.

Особенно проявляются эти новые воззрения в работах ученика Галилея — или, вернее, ученика галилеева друга и ученика Кастелли (Castelli) — Евангелисты Торичелли (Evangelista Torricelli, 1608—1647). Торичелли в появившемся в 1641 г. сочинении „О движении" („De motu") выступил как приверженец взглядов Галилея, после чего он был принят слепым стариком в сотрудники. Это сотрудничество продолжилось лишь три месяца, до смерти Галилея, после которой Торичелли занял его место математика великого герцога. Больше всего известен он открытием атмосферного давления и изобретением ртутного барометра; но вместе с тем он был и крупным математиком, что явствует не только из его сочинений, появившихся в 1644 г. под общим заглавием „Геометрические работы" („Opera geometrica"), но также из работ его и самостоятельно полученных им результатов, найденных в разное время в библиотеках и архивах. Влияние Галилея и Торичелли особенно сказалось на английских математиках, занимавшихся позднее инфинитезимальными исследованиями.

При исследовании атмосферного давления Торичелли пользовался помощью другого, еще более молодого ученика Галилея, именно Винченцо Вивиани (Vincenzo Viviani, 1622—1703), который также выделялся как математик. Ему принадлежит попытка восстановить содержание считавшейся в то время утерянной пятой книги аполлониевых „Конических сечений", известной тогда только по краткому перечню содержания, сделанному Паппом. Об этой работе Вивиани мы ниже будем говорить более подробно.

Еще раньше влиянию Галилея подвергся другой ученый, подробно исследовавший вопросы инфинитезимальной математики с иных точек зрения, нежели упомянутая здесь механическая или кинематическая; это был Бонавентура Кавальери (Bonaventura Cavalieri, 1591?—1647). Он родился в Милане и в молодости поступил там в монастырь иеронимитов. В Пизе, куда он был отправлен изучать теологию, его познакомил с математикой тот же Кастелли, который позже в Риме был учителем Торичелли; математика так захватила Кавальери, что он нашел в ней лекарство от непрерывных и сильных подагрических болей, мучивших его с ранних лет. В Пизе он стал преемником Кастелли. В 1629 г. по энергичной рекомендации Кастелли и особенно Галилея он был приглашен профессором в Болонью

В одном из своих сочинений Кавальери уже в 1632 г. сообщил об открытых Галилеем законах падения тел, возбудив этим не-

довольство Галилея, имя которого он, правда, назвал, но от которого он не получил предварительного согласия на опубликование этих результатов. Важнейшие из собственных исследований Кавальери, касающиеся вопросов, которые теперь разрешаются с помощью интегрального исчисления, находятся в появившейся в 1635 г. работе его „Геометрия, развитая некоторым новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин" („Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota"); второе исправленное издание ее вышло в 1653 г. В промежутке между первым и вторым изданием появилась (в 1647 г.) вторая работа Кавальери, посвященная тем же вопросам—„Шесть геометрических этюдов" („Exercitationes geometricae sex"). В этих работах Кавальери также обнаруживает некоторые точки соприкосновения с Галилеем, который сам, вероятно, занимался подобными исследованиями. Это явствует из письма Кавальери, в котором он, закончив к этому времени (1626) свое сочинение „О неделимых величинах", торопит Галилея с опубликованием его обработки того же вопроса. Однако последняя, которой Кавальери, очевидно, не хотел тогда опережать, быть может потому, что он сам чувствовал себя обязанным Галилею некоторыми исходными пунктами, никогда не увидела света. Предшественника в своих исследованиях, которого он сам упоминает в предисловии к первому своему труду, имел Кавальери и в лице Кеплера. Труды Кавальери, содержащие одно из наиболее ранних и наиболее полное изложение тех вопросов, которым они посвящены, получили широкое распространение и имели большое значение до того времени, пока исчисление флюксий Ньютона и диференциальное исчисление Лейбница не дали исследованиям подобного рода нового основания.

Из итальянских математиков можно упомянуть еще Катальди (Cataldi, умер в 1626); к ним же принадлежит Гетальди в Рагузе (1566—1627).

К северу от Альп уже в последние столетия средних веков сильно возрос интерес к вопросам арифметики и теории чисел и знакомство с алгеброй приобрело значительное распространение. Несомненно, это явилось следствием оживленных торговых сношений, существовавших тогда между северной Италией и немецкими городами. Что касается алгебры, то уже одно ее тогдашнее немецкое название „коссическое искусство" (cossische Kunst) указывает на ее итальянское происхождение; в Италии неизвестное называлось cosa, что значит „вещь", а квадрат неизвестного назывался латинским термином census — „состояние" (в смысле „имущество"); это странное название объясняется тем, что оно представляет двойной перевод с греческого языка, через арабский. По-гречески квадрат величины называется δύναμις — что значит „степень" и вместе с тем „сила", „могущество". Арабы перевели его термином mâl—„сила", „богатство". Слово census также проложило дорогу в немецкие учебники алгебры. Из авторов этих учебников мы назовем наиболее известных „коссистов":

Иоганна Видмана (Johannes Widmann, конец XV в.), Адама Ризе (Adam Riese, 1492—1559) и жившего почти одновременно с ним Рудольфа (Rudolff.). Что интерес к алгебре не ограничивался тесными кругами, видно из того, что Видман мог читать по этому предмету лекции, а на распространенность арифметики указывают частые издания немецких арифметических книг.

Гораздо самостоятельнее трактуются арифметика и алгебра Михаэлем Штифелем (Michael Stifel, 1486 или 1487—1567). Уроженец Эслингена (в Вюртемберге), Штифель в молодых годах поступил в августинский монастырь этого города. Он рано примкнул к движению, возглавлявшемуся его собратом по ордену Лютером, и так как он высказывал свои убеждения свободно и смело, то должен был в 1522 г. скрыться из монастыря и перебраться в Виттенберг, откуда Лютер устроил его на место сперва капеллана в одном дворянском поместье, а потом сельского священника. В связи с начатым им в монастыре изучением библии Штифель предался мистическим изысканиям по поводу встречающихся в книге Даниила и в „Откровении" Иоанна чисел; эти числа он заменял словами, буквы которых должны были соответствовать треугольным числам. Изыскания эти побудили его предсказать на 19 октября 1533 г. конец мира, что повело к немалому расстройству в делах как его собственных, так и его прихожан и к посрамлению его, так как назначенный день прошел без всякой катастрофы.

После этого крупное математическое дарование Штифеля нашло себе лучшее применение. В 1544 г. появился его „Курс арифметики" („Arithmetica integra") с предисловием Меланхтона (Melanchthon). За нею последовала в 1545 г. предназначенная для широких кругов „Немецкая арифметика" („Deutsche Arithmetica"). В 1553 г. Штифель издал дополненную им книгу Рудольфа по алгебре (под названием „Coss"), в которую, наряду с существенными улучшениями, он внес мистическое „исчисление слов", снова привлекшее интерес его в старости. Свои последние годы провел он в Иене.

Мы рассмотрим в дальнейшем те несомненные успехи, которыми математика обязана Штифелю. Здесь заметим только, что когда он передает традиционный материал, то делает это с глубоким пониманием общей связи. Благодаря этому он оказывается в состоянии заменить правила прежних арифметиков и коссистов, особые для каждого отдельного случая, общими правилами и создать себе ясное для того времени представление об иррациональных величинах и об операциях, связанных с бесконечно-малыми, — все это несмотря на то, что будучи в сущности самоучкой и не зная греческого языка, он вряд ли знал из греческой литературы что-нибудь другое, кроме „Начал" Евклида. За успехами современной ему математики он следил внимательно; это видно из того, что он смог включить в свой курс арифметики найденное итальянцами решение уравнений 3-й и 4-й степени (по Кардано).

Несомненно, еще в большей степени самоучкой был более поздний немецкий арифметик Иоганн Фаульгабер (Johann Faulhaber, 1580—1635) в Ульме. Сперва он был ткачом, потом зарабатывал средства к существованию как арифметик. Подобно Штифелю, он предавался мистическим толкованиям чисел, причем он отводил пирамидальным числам ту же роль, какую Штифель — треугольным. Занимался он также и алхимией.

Обстоятельства, содействовавшие распространению в Германии возродившихся в северной Италии наук и искусств, с особой силой сказались в Нюренберге. Нюренберг находился в оживленных торговых сношениях с Италией, и в стенах его зарождалась торговая знать, которая получила благодаря путешествиям в Италию необходимое образование, могла оценить значение наук и искусств и была достаточно состоятельна, чтобы уделить время занятиям наукой и искусством. И тем и другим занимались здесь в эту пору многие. Из математиков, обосновавшихся там, мы уже упомянули (стр. 16, примечание) наиболее значительного — Региомонтана (Regiomontanus, 1436—1476); оставшаяся после него рукопись работы о треугольниках хранилась после его смерти в Нюренберге, и притом хранилась настолько хорошо, что появилась в печати только в 1533 г., благодаря стараниям мецената и библиофила Пиркгеймера (Pirckheimer). В доме Пиркгеймера собирался кружок ученых и художников; среди последних был и великий Альбрехт Дюрер (Albrecht Dürer, 1471—1528), изданное в 1525 г. сочинение которого „Наставление к измерению циркулем и линейкой" („Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt") дает ему право быть упомянутым и в истории математики. Особенно делает ему честь в этом труде проводимое им строгое разграничение между геометрически точными и приближенными построениями. К кружку Пиркгеймера принадлежал также священник Иоганн Вернер (Johannes Werner, 1468—1528), бывший в тригонометрии последователем Региомонтана. Его труд „О треугольниках, образованных дугами больших кругов" („De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis") остался ненапечатанным и был утерян, но он был известен другим писателям, пользовавшимся им, благодаря чему кое-что об его содержании нам известно. Его чисто геометрические работы несколько родственны работам Дюрера; в „Книге о двадцати двух конических элементах" („Libellus super viginti duobus elementis conicis") он применяет к геометрическим исследованиям перспективу.

Более поздний математик Даниил Швентер (Daniel Schwenter, 1585—1636) также является уроженцем Нюренберга, поблизости от которого в Альтдорфе он был профессором восточных языков и математики. Ему принадлежат „Практическая геометрия" („Geometria practica") и „Физико-математические развлечения" („Deliciae physico-mathematicae oder Mathematische und philosophische Erquickstunden").

Развитию тригонометрии и вычислительной математики в XVI и XVII вв. содействовала не только книга Региомонтана, но и но-

вые могучие импульсы, заключавшиеся в требованиях, которые предъявлялись крупными успехами астрономии. Успехи эти связаны с именами поляка Коперника, датчанина Тихо-Браге и немца Кеплера; мощное влияние их идей, как мы видели, когда речь шла о Галилее, скоро распространилось на весь цивилизованный мир. Хотя наиболее крупные достижения первых двух принадлежат астрономии, мы напомним здесь все же их биографию, а затем перейдем к Кеплеру, работы которого играют большую роль не только в истории астрономии, но также и непосредственно в истории математики.

Николай Коперник (Nikolaus Koppernikus, 1473—1543) родился в Торне, учился в Кракове и Болонье, а затем стал каноником в Фрауенбурге; после этого он еще ездил в Италию продолжать свои занятия юриспруденцией; в 1505 или в 1506 г. он вернулся во Фрауенбург и жил там до самой смерти. Здесь он среди многочисленных и разнообразных других работ нашел время написать большое сочинение „Об обращениях небесных кругов", содержащее построенную им систему мира с вращающейся Землею и покоящимся Солнцем, вокруг которого движутся Земля и планеты. После предварительного сообщения, которое Коперник сделал в 1533 г. различным ученым, его посетил во Фрауенбурге Ретик (Rhaeticus, 1514—1576), бывший тогда профессором в Виттенберге, а позже в Лейпциге и Кракове. В 1539 г. Ретик опубликовал более подробное изложение труда Коперника, а в 1541 г. привез полную рукопись его в Нюренберг, где печатание его закончилось в 1543 г., в том самом году, в котором умер его автор.

Мы говорили уже, упоминая о Галилее, о том косвенном влиянии, которое великая мысль Коперника, освобождавшая науку от уз церковно-схоластических традиций, оказала и на область математических исследований. Развитие этой мысли потребовало новых математических изысканий, и уже это одно дало математике новый импульс к развитию. Более непосредственно это влияние сказалось в том, что от астрономов, как примыкавших к Копернику, так и пытавшихся отстоять старые взгляды, потребовалось более точное наблюдение астрономических фактов и более тщательная тригонометрическая их обработка, что в значительной мере содействовало развитию тригонометрии, а также составлению и употреблению таблиц. Это, как мы увидим, в свою очередь оказало влияние на другие области математики и на вычислительную технику. Составлением тригонометрических таблиц занимался (быть может, с помощью Ретика) и сам Коперник; посвященные этому вопросу главы его большого труда, Ретик в 1542 г. издал отдельно, несколько расширив таблицу синусов, данную самим Коперником. После этого в 1551 г. Ретик издал более подробные „Таблицы науки о треугольниках" („Canon doctrinae triangulorum"), которыми пользовался позднее Тихо-Браге и которые были известны Виета. Этим Ретик, однако, не ограничился, он начал составление еще значительно более подробных таблиц, за

конченных и изданных через 20 лет после его смерти его учеником Ото (Otho). Ненапечатанные вычисления Ретика, еще более расширяющие таблицы в некоторых важных пунктах, попали впоследствии в руки пфальцского придворного проповедника Бартоломея Питиска (Bartholomäus Pitiscus, 1561—1613), бывшего не только богословом, но и одаренным математиком. Он выпустил хороший и получивший широкое распространение учебник тригонометрии. Кроме того, он выпустил таблицы под заглавием „Математическая сокровищница" („Thesaurus mathematicus"), в которых исправил, расширил и расположил по-новому большой табличный труд Ретика.

Тригонометрическими работами обязаны мы также родившемуся в Бамберге Кристофу Клавию (Christoph Clavius, 1537—1612). Клавий был иезуитом, занимал преподавательскую должность в коллегии своего ордена в Риме и принимал деятельное участие в реформе календаря. Тригонометрические работы Питиска и Клавия относятся, однако, к более позднему времени, чем упоминаемая ниже работа датского математика Томаса Финке. Последняя работа оказала влияние на обоих вышеупомянутых авторов.

Обращаемся теперь к следующему великому астроному—Тихо-Браге (Tycho или Tyge Brahe, 1546—1601). Тихо-Браге родился в поместье Кнудструп в Шопене и происходил из старого дворянского рода. После занятий в Копенгагенском университете он в ранние годы был отправлен своею семьею в сопровождении будущего историка Андерса Соренсена Веделя (Anders Sörensen Vedel) за границу, чтобы подготовиться там к государственной службе; однако он употребил это время главным образом на изучение астрономии и на производство самостоятельных исследований. Занятия эти встречали в дворянских кругах, к которым он принадлежал, мало сочувствия. Он оставался поэтому большей частью за границей и продолжал в различных местах свои занятия и наблюдения, пока болезнь и смерть отца и вступление во владение отцовским имением (совместно с братом) не заставили его вернуться домой. Здесь Браге занимался главным образом химией, пока появление новой звезды в созвездии Кассиопеи в 1572 г. не привлекло его снова к астрономии. Свое призвание к этой науке он ощутил теперь так ясно, что пренебрег удерживавшими его до сих пор сословными предрассудками и издал сочинение „О новой звезде" („De nova stella"), касавшееся связанных с этой звездой наблюдений и исследований. Признание, которое это сочинение получило у иностранных специалистов, возбудило внимание к нему и на родине, и, по предложению короля, он прочел несколько лекций по астрономии. Затем он все же снова отправился за границу, главным образом для того, чтобы найти условия, при которых он мог бы вести работу по своему предмету в таких масштабах, которые соответствовали бы его намерениям. Но вскоре он возвратился на родину, где ему были предоставлены все материальные средства для продолжения ра-

боты: король Фридрих II назначил ему в 1576 г. годовой оклад, подарил ему остров Гвен как освобожденный от налогов лен и в дальнейшим предоставлением других ленов и прямыми пособиями содействовал постройке его Ураниенбурга и покрытию больших издержек, которых требовали изготовление изобретенных им инструментов и оборудование обсерватории. В исключительно благоприятных условиях провел здесь Тихо-Браге 20 лет, окруженный многочисленными учениками и сотрудниками, принадлежавшими к различным слоям населения Дании и других стран. Благодаря этому здесь оказалось возможным достижение небывалой дотоле точности наблюдений, подготовивших путь к крупнейшим теоретическим успехам и послуживших образцом для позднейших наблюдателей. Однако этому счастливому для науки времени пришел конец. Частично повод к этому дал сам Браге, плохо управлявший ленами, которые должны были покрывать крупные расходы по ведшейся им работе; частью же это было делом собравшегося вокруг молодого короля Христиана IV кружка советников, не могших оценить деятельности Тихо-Браге и чувствовавших себя оскорбленными его независимостью. Лены были от него бесцеремонно и незаконно отняты, пособия прекратились, и Тихо-Браге, привлекаемый одновременно видами на место у германского императора Рудольфа, счел себя вынужденным покинуть Ураниенбург и через некоторое время отправиться со своими книгами, инструментами и рукописями за границу. Сделанное им предложение вернуться не привело ни к каким результатам, так как столь же самолюбивый король был оскорблен тем, что Тихо-Браге ставил ему условия. Только теперь принял последний почетное приглашение императора перенести свою деятельность в Прагу, где ему предоставлены были благоприятные условия и где он вступил в довольно близкие сношения с Кеплером. Несмотря на оказанный ему хороший прием, он, однако, не смог свыкнуться с новой обстановкой. В 1601 г. он скончался.

Тихо-Браге был одним из тех пионеров, которые стремились положить в основу наших знаний о природе опыт и наблюдение, а не вековой авторитет Аристотеля и Птоломея. В этом отношении он был предшественником Кеплера и Галилея; что у него надо, однако, особенно отметить — это качество наблюдений и опытов, на которых он хотел базироваться. Характерны для них чрезвычайная точность, которой он достиг с помощью своих новых инструментов и методов, и невиданная до тех пор полнота и систематичность наблюдений, выполненных под его руководством на Гвене.

Но Браге не был склонен к тому, чтобы решительно порвать со старыми взглядами. Правда, он считал необходимым проверить их точными наблюдениями. Но и новые взгляды он мог принять лишь в той мере, в которой они могли быть подкреплены опытными данными. Он, например, не считал невозможным найти на звездном небе не только предсказания погоды, но

и предсказания судьбы; он хотел, однако, опытным путем найти здесь твердую базу. Что касается предсказания погоды, то его метеорологические наблюдения, правда, не привели его к желанной цели, но зато приобрели значение в новейшее время, ибо результаты их свидетельствуют, что за протекшие 300 лет метеорологические условия не претерпели значительных изменений.

При таких обстоятельствах не столь удивительно, как это легко может показаться теперь, что коперникову систему Браге не считал подтвержденной наблюдениями. Действительно, даже при его наблюдениях, значительно более тонких, чем наблюдения прежних времен, неподвижные звезды не обнаруживали никакого следа годичного параллакса. Следовательно, они должны были бы, в случае, если бы Земля двигалась, находиться на расстояниях, которые не без основания казались неизмеримыми, и должны были бы, так как до употребления телескопа они казались имеющими заметное протяжение, иметь прямо-таки абсурдные размеры. Чтобы избежать этой трудности, Тихо-Браге построил свою систему мироздания, в которой Земля является неподвижной. Преимущества коперниковой системы сохраняются у Браге тем, что Солнцу приписывается движение вокруг Земли, планеты же вращаются вокруг Солнца. Таким образом относительное движение для всех тел солнечной системы остается таким же, как у Коперника. С другой стороны, так как его собственные наблюдения над кометою показали, как сильно менялось ее расстояние от Земли, то он нисколько не задумался отбросить представление о твердых сводах, к которым должны были быть прикреплены небесные тела.

Но наибольшее значение для дальнейшего развития науки имели не теоретические обобщения Браге, а самые его наблюдения, полнота и точность которых позволили Кеплеру открыть основные законы теоретической астрономии.

Для истории математики эта произведенная Кеплером по преимуществу математическая обработка наблюдений Браге имеет немалое значение. Но еще большее значение имеет то развитие тригонометрии, которое эта наука получила в руках Браге и его учеников. Это развитие было вызвано необходимостью гарантировать результатам вычислений ту же степень точности, которой обладали исходные данные наблюдений. О тригонометрических работах Браге мы можем судить по рукописи, оставшейся после его смерти и опубликованной Студничкой (Studnička) в 1886 г. В ней мы находим правила для решения плоских и сферических треугольников по трем данным элементам. Эта рукопись свидетельствует о том, что Браге искусно владел всеми известными тогда методами тригонометрии, за исключением тех, которые только что были найдены Виетой. Так, например, здесь мы находим применение так называемого простаферетического метода (о нем мы будем говорить в дальнейшем). Этот метод был рекомендован Браге немцем Виттихом (Paul Wittich), математическую помощь которого Браге очень высоко ценил. Тот же Виттих передал этот

метод покровителю и другу Тихо-Браге, ландграфу Вильгельму Гессенскому, и через него второй большой обсерватории того времени, где Бюрги развил его дальше.

Среди датских учеников Тихо-Браге надо упомянуть Христиана Лонгомонтана (Christian или Christen Longomontanus, 1562—1647), с 1605 г. профессора в Копенгагенском университете. Он был верным последователем Тихо-Браге, продолжая и после смерти Браге придерживаться его методов наблюдений и вычислений и его воззрений. Изобретение телескопа и применение логарифмов прошли мимо него. Не оказали на него почти никакого влияния и теоретические исследования Кеплера и Галилея. По отношению к математическим выводам он был не слишком строг; это видно из того, что он был убежден в правильности якобы найденной им квадратуры круга.

Современником Тихо-Браге был другой датский математик, Томас Финке из Фленсбурга (Thomas Fincke, или, как он сам писал в молодые годы, Fink, 1561—1656), состоявший в течение долгого времени, с 1591 г. и до смерти, профессором Копенгагенского университета сперва по математике, потом по фармацевтике, хотя в последние годы жизни он не читал более лекций. Его собственно математическая деятельность относится к годам его обучения за границей, и наиболее значительным результатом ее является труд „Геометрия круга" („Geometria rotundi", 1583).

Мы упомянем здесь же ещё одного датчанина, имя которого мы встретим лишь в конце рассматриваемого в этой книге периода, именно Олафа Рёмера (Olaf или Ole Roemer, 1644—1710). Произведя ряд астрономических работ на родине и, в частности снова определив, в сотрудничестве с французом Пикаром (Picard) географическое положение Ураниенбурга, Рёмер отправился в 1672 г. с Пикаром в Париж, чтобы взять там на себя заботы по печатанию рукописей Тихо-Браге. В Париже он получил место ассистента в обсерватории, и его наблюдения над спутниками Юпитера привели его к определению скорости света. Это открытие он представил Парижской академии наук, в которой он состоял деятельным членом. Вместе с тем, работал он и как инженер. В 1681 г. он вернулся на родину и получил профессуру по астрономии; здесь также нашли себе должную оценку его блестящие технические дарования, и ему поручалось руководство целым рядом инженерных работ. Однако он находил время и для создания новых астрономических инструментов и в этом отношении был достойным продолжателем работ Тихо-Браге. Создание этих инструментов облегчалось теперь наличием вновь изобретенных телескопа и маятниковых часов. Инструменты эти и поныне сохранили свое значение. Собственные инструменты Рёмера и большая часть его наблюдений погибли во время большого копенгагенского пожара (1728).

После этого отступления, посвященного датским математикам, мы возвращаемся в Германию и переходим к тому из трех великих астрономов, который был одновременно и первоклассным

математиком — Иоганну Кеплеру (Johannes Kepler, 1571—1630). Кеплер, как и Штифель, был вюртембержцем, уроженцем Вейля. Уже в протестантской монастырской школе он обучился арифметике и сферической астрономии. Позже в Тюбингене, где он занимался также богословием, его учителем математики и астрономии был Местлин (Maesthn). Последний, бывши приверженцем коперниковой системы, хотя сам он и читал лекции по птоломеевой, стал впоследствии его верным другом. Кеплер, будучи убежденным протестантом, не мог, однако, подчиняться деспотичной протестантской ортодоксии, поэтому он, не имея у себя на родине никакой надежды на место, взял в 1594 г. профессуру „математики и морали" в Граце. Отсюда он был вытеснен католиками и отправился в 1600 г. по приглашению Тихо-Браге в Прагу, чтобы стать там его помощником. В следующем году, после смерти Тихо-Браге, Кеплер стал его преемником по должности императорского придворного астронома. В Праге, где в его распоряжении находился богатый материал наблюдений Тихо-Браге, он провел наиболее спокойное время своей жизни. В 1612 г. он был переведен в Линц. Здесь он, правда, оставался императорским придворным астрономом, но, не получая полагавшегося ему жалования, он вынужден был добывать средства различными мелкими астрономическими и астрологическими работами, отнимавшими у него все время; притом ему приходилось терпеть преследования со стороны католиков. Так как император не мог удовлетворить справедливых требований Кеплера, то он должен был разрешить ему поступить на службу к Валленштейну, интерес которого к астрономии вызывался исключительно астрологическими суевериями. Умер Кеплер в Регенсбурге, куда он отправился, чтобы добиться через рейхстаг уплаты причитавшихся ему денег. Согласно исследованиям последнего времени, лично он не терпел нужды; но он должен был упорно бороться, чтобы добывать средства, необходимые ему для издания своих произведений.

Кеплер, подобно Копернику, исходил из мысли, что вселенная должна быть построена по простым законам, которые прежде всего должны были иметь простые количественные выражения; в 1596 г. он издал в Граце сочинение под заглавием „Космографическая тайна" („Mysterium cosmographicum"), в котором он характеризовал расстояния различных планет от Солнца следующим образом: орбиты Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна лежат на ряде шаровых поверхностей с Солнцем в центре, около которых и в которые можно последовательно описать и соответственно вписать пять правильных многогранников — октаэдр, икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр и гексаэдр—так, чтобы многогранник, описанный около одной из сфер, являлся одновременно вписанным для следующей. Вскоре, однако, Кеплер увидел, что простые количественные связи нельзя найти при помощи спекуляций такого рода, но что они должны быть построены на строгих и тщательных наблюдениях, таких, как наблюдения Тихо-Браге, о котором Кеплер выразился в

письме к Местлину так: „Он (Браге) обладал богатствами, но, подобно многим богачам, не умел найти им надлежащее употребление". В Праге Кеплеру привелось самому использовать эти сокровища. Он сделал это, выведя из них законы, которые и сейчас носят его имя. Два первых он изложил в появившейся в 1609 г. в Праге „Новой астрономии" („Astronomia nova de motibus stellae Martis"), третий — в вышедшей в 1619 г. в Линце „Гармонии мироздания" („Harmonice mundi"). Путь, который избирает Кеплер, чтобы вывести из опытов законы, почти тот же, что путь Галилея, с тем различием, что Кеплер в основном пользовался готовым материалом наблюдений, в то время как Галилей должен был постепенно продвигаться вперед с помощью новых опытов. Сам Кеплер в своем учении о научной гипотезе дал указания относительно этого пути.

Наука начинает с наблюдений, строит на них свои гипотезы и затем старается найти причины, обусловливающие предположенную зависимость. Что касается движения планет, то здесь последний шаг удался только Ньютону, но Кеплеру удалось дать необходимое для этого описание того, что происходит при движении планет. Он исходил из гипотезы Коперника и постепенно совершенствовал ее, пользуясь все время наблюдениями Тихо-Браге, пока не пришел к описанию движений одновременно простому и согласному с наблюдениями.

Громадная работа, которую пришлось при этом выполнить Кеплеру, всецело относится к области математических расчетов. Чтобы проверить, согласуются ли наблюдения с гипотезой, надо исследовать, что вытекает из этих гипотез. С гипотезами надо, следовательно, поступать так, как математика поступает с своими предположениями. Кеплер видит и в последних гипотезы того же рода, как астрономические, и, как и Евклид, трактует их только таким образом, не спрашивая об их происхождении. Математическая проверка гипотез Кеплера требовала больших навыков в стереометрии, знакомства с коническими сечениями и умения пользоваться бесконечно малыми величинами. Математика смогла дать все нужное Кеплеру лишь потому, что она сделала в руках самого Кеплера весьма значительные успехи. Помимо указанных выше математических средств, Кеплер должен был владеть и, как мы увидим, действительно прекрасно владел вычислительной техникой. Он не только был в курсе всех существовавших тогда методов, облегчавших выполнение вычислений, но и сам содействовал прогрессу этих методов своей вышедшей в 1624 г. работой „Тысяча логарифмов" („Chilias logarithmorum"). Логарифмами пользуется он также при обработке изданных в 1627 г. „Рудольфовых таблиц", основанных на наблюдениях Тихо-Браге. Кроме астрономии поводом к имеющим капитальное значение инфинитезимальным исследованиям служил для него вопрос о наиболее экономичной форме винных бочек. Этот вопрос трактуется Кеплером в его книге „Стереометрия винных бочек" („Stereometria doliorum"), вышедшей в 1615 г.

В Праге Кеплер вошел в соприкосновение с другим крупным математиком, швейцарцем Иобстом Бюрги (Jobst Bürgi, 1552—1632). Последний не принадлежал к ученым профессионалам и не знал поэтому никакой латыни; он был механиком и часовым мастером. В 1579 г. он получил в обсерватории ландграфа Вильгельма IV в Касселе место придворного часового мастера и мастера астрономических инструментов. Здесь ему скоро, однако, представился случай принять участие также в наблюдениях и вычислениях; с последними и связаны его важнейшие математические заслуги. В 1603 г. он был приглашен императором Рудольфом II на место императорского придворного часового мастера в Прагу, где его деятельность получила высокую оценку со стороны Кеплера, недовольного, однако, тем, что он не опубликовывал своих изобретений. Так, его таблицы логарифмов (или, вернее, антилогарифмов) появились только в 1620 г., через долгое время после того, как он пришел к мысли о них и вычислил их, и лишь после того как появились и стали известны логарифмы Непера. Эти таблицы появились под заглавием „Арифметические и геометрические таблицы прогрессий, вместе с основательным поучением, как их нужно понимать и с пользой применять во всевозможных вычислениях" („Arithmetische und Geometrische Progress-Tabuln, sambt gründlichen unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol"). Обещанное в этом заглавии „основательное поучение" было найдено и издано лишь в 1856 г. Другими сведениями, имеющимися о работах Бюрги, мы обязаны частью найденной также лишь впоследствии „Арифметике", частью сообщениям Кеплера.

Мы можем упомянуть здесь еще одного швейцарского математика. Гульден (Paul Guldin, 1577—1643), занимавшийся подобно Кеплеру исследованиями, теперь относящимися к области исчисления бесконечно-малых, и стоявший по этим вопросам в резкой оппозиции к Кеплеру и особенно к Кавальери, несомненно, однако, находился под сильным влиянием работ Кеплера, а в смысле правильности результатов далеко уступал ему. Родился он в Сен-Галлене. В 20-летнем возрасте он перешел из реформатского исповедания в католическое и стал иезуитом. В 1609 г. он стал преподавателем математики в иезуитских школах, сперва в Риме, потом в Граце, где он и умер. Четыре тома его главного труда „О центре тяжести" („Centrobaryca") появились один за другим в 1635—1641 гг.

Работы Кеплера показывают, как далеко продвинулась немецкая математика в период, предшествовавший тридцатилетней войне. Какие глубокие опустошения произвела эта война, влияние которой сказывается уже в тех трудностях, с которыми приходилось бороться Кеплеру, видно из того большого перерыва, который предшествовал появлению следующего выдающегося немецкого математика — Лейбница; да и тот сложился в ту крупную величину, которой он был, в западных странах в атмосфере

тамошнего мощного расцвета науки. Поэтому, прежде чем перейти к нему, мы должны обратиться к математикам этих стран.

В конце Средних веков, перед началом новой эпохи в развитии алгебры, Франция имела в лице Шюке (Chuquet) математика, который дальше, чем кто-либо иной, продвинрл развитие арифметики и алгебры. В этой же стране жил в XVI в. крупнейший математик этого века — Виета, о котором мы сейчас будем рассказывать; большая часть его работ принадлежит также арифметике и алгебре. Однако ни исторически, ни в методологическом отношении между Шюке и Виета нельзя установить какой-нибудь связи. Не является таким связующим элементом и хронологически стоящий в промежутке между ними французский математик Пьер де-ля-Раме (Pierre de la Ramée, 1515—1572); которого обычно именуют его латинизированной фамилией — Рамус, профессор философии в Париже. Его деятельность относится к совершенно другим областям математики и значение его основано главным образом на его общих реформаторских стремлениях, а также на том, что он порвал с такими передававшимися от поколения к поколению принципами, которых Виета, как мы увидим, придерживался с большой строгостью. Как философ Рамус был предшественником Бэкона в борьбе против аристотелевой логики; подобный же разрыв с авторитетами мы видим в его стремлении дать математике иное и более арифметическое обоснование, нежели евклидово. Правда, ни он ни его время не созрели в достаточной степени для того, чтобы дать обоснование, которое могло бы выдержать какое-нибудь сравнение с евклидовым: они не были даже в состоянии полностью осознать то, что они хотели отвергнуть; но попытки их были естественным проявлением того стремления к самостоятельности, которое одновременно порождалось техническим прогрессом того времени и, в свою очередь, порождало новые достижения. Новые идеи, выдвинутые Рамусом, особенно философские, встретили в Париже как ярых противников, так и ревностных приверженцев. Его влияние как математика, распространившееся, благодаря его сочинениям и продолжительному его пребыванию в Германии, также и вне Франции, чувствуется, например, в „Геометрии круга" Томаса Финке, построенной на его предпосылках. Рамус, принадлежавший к гугенотам, был убит в Варфоломеевскую ночь.

В тесных сношениях с видными гугенотскими фамилиями находился и Франциск Виета (François Viète или Vieta, 1540—1603), сам, однако, не переменивший религии. Родился он в городе Фонтеней (в Ба-Пуату), где с 1559 г. занимался адвокатской деятельностью. В качестве адвоката он вел дела одной дворянки, которая пригласила его также преподавателем астрономии к своей дочери Екатерине Партеней, оказавшейся очень способной ученицей; во время этих занятий у Виета возник план большого астрономического труда, который должен был, в противоположность коперниковой системе, бывшей, по мнению

Виета, недостаточно точной, содержать исправление и дальнейшее развитие птоломеевой. Над этим трудом, никогда не увидевшим света, он работал в продолжение всей жизни. Прежде всего ему нужна была усовершенствованная тригонометрия, и он работал над ней в Фонтенее с большим усердием и увлечением. Благодаря браку своей ученицы Виета завязал сношения с Генрихом Наваррским (впоследствии королем Франции Генрихом IV) и его матерью.

В 1571 г. Виета переселился в Париж, где продолжал адвокатскую деятельность. Переезд его был вызван желанием познакомиться лично с парижскими математиками, в частности с Рамусом; он имел в виду также напечатать свою тригонометрическую работу. Работа эта, или, вернее, только две из четырех частей, из которых она должна была состоять, смогла появиться только в 1579 г. под заглавием „Математические таблицы" („Canon mathematicus"). За это время Виета сперва (в 1573 г.) стал советником парламента в Бретани, а потом частным советником Генриха III, у которого он в 1580 г. получил должность докладчика по ходатайствам (Maître des requêtes). В 1584 г. по настоянию Гизов он был отстранен от этой должности; но в 1589 г. он вернулся к Генриху III, когда тот, теперь уже сам беглец, поселился в Туре. Здесь Виета отличился между прочим расшифровкой важной переписки между противниками короля и испанцами. После смерти Генриха III он в том же году перешел на службу к Генриху IV. Здесь на его долю выпал в Фонтенебло в 1594 г. математический триумф, о котором мы расскажем дальше. Незадолго до смерти он по болезни оставил службу.

Виета в течение большей части своей жизни так был занят своей юридической деятельностью, что трудно представить себе, как он справлялся со своими большими математическими работами, являющимися плодом глубоких математических исследований и свидетельствующими об основательном изучении древних авторов. Рассказывают, что он мог проводить за своим рабочим столом над занимавшими его исследованиями по трое суток кряду. Упомянутый выше промежуток времени с 1584 г. по 1589 г. был, конечно, в особенности использован Виета для выполнения плана его главного труда „Искусство анализа" („Ars analytica") и для обработки различных отдельных его частей. Эти части появлялись, однако, только постепенно в виде самостоятельных работ, и притом в иной последовательности, чем это должно было быть по плану Виета; большинство их было издано лишь после смерти Виета его учениками, особенно шотландским математиком Андерсоном (Anderson, 1582—1619), жившим и преподававшим в Париже. В некоторых местах Андерсон очень умело восполнил те пробелы, которые имелись в работе его учителя.

Собраны были эти работы, имеющие основное значение для новой алгебры и тригонометрии и в то же время охватывающие важные проблемы геометрии и теории чисел, только в 1646 г. Скоу-

теном (Frans van Schooten). В согласии с заглавием „Математические работы Франциска Виета" („Francisci Vietae Opera mathematica") сюда включены также другие работы, не указанные в плане „Искусства анализа", но, к сожалению, среди них нет вышеупомянутых „Математических таблиц". Дело в том, что Скоутен ложно истолковал сожаление Виета о том, что это произведение появилось в печати, и желание Виета выпустить его в новом издании, в том смысле, что таблицы его являются ненадежными. В действительности желания Виета сводились только к исправлению изложения и обозначений.

Другие сочинения, опубликованные самим Виета, получили благодаря щедрости, с которою он рассылал их европейским математикам, большое распространение. Они составляли, однако, как уже упомянуто, лишь часть его большого труда; притом чтение его работ затрудняется несколько изысканной формой, в которой повсюду сквозит его большая эрудиция, и большим количеством изобретенных им и совершенно не привившихся греческих терминов. Поэтому влияние его, столь значительное по отношению ко всей последующей математике, распространялось лишь сравнительно медленно.

Так как в самой Франции математики, бывшие достойными преемниками Виета, появились не сразу, то мы упомянем раньше о нескольких математиках, живших одновременно с Виета и несколько позже его в соседних странах по обе стороны Ламанша.

В Нидерландах освободительные войны против испанцев, а также позднейшее участие в тридцатилетней войне не оказали на науку того разрушительного влияния, как тридцатилетняя война в Германии. В качестве весьма выдающегося ученого мы должны назвать прежде всего Симона Стевина (Simon Stevin, 1548—1620). Стевин родился в Брюгге и сперва был купцом, но позже работал в качестве инженера и в частности занимал должность главного квартирмейстера гидравлических сооружений. Он находился в близких отношениях с принцем Морицем Нассау-Оранским, преемником Вильгельма Оранского. Отношения эти отразились даже на его математических работах, на которых, как сам он признает, сказалось некоторое влияние Морица Оранского. В противоположность Виете, Стевин в своих математических работах является автором, учитывающим постоянно потребности практики. Это сказывается не только в выборе тем (вычислительные таблицы, популярное произведение о десятичной системе, наряду с работами по практической геометрии и по вопросам равновесия твердых и жидких тел), но и в самом способе изложения вопросов арифметики и алгебры. Математические работы Стевина отражают также и национальные тенденции эпохи, особенно ярко проявлявшиеся на его родине в эту эпоху, когда Голландия боролась за освобождение от иноземного владычества и за преобладание голландского торгового капитала на мировой арене. Это сказывается в том, что Стевин не только пишет на

своем родном языке, но и употребляет голландские переводы математических терминов, а также в том, что он вообще превозносит свой родной язык за его ясность и понятность. Идея Стевина насадить национальную математическую терминологию и поныне сказывается в Голландии, которая, например, является единственной, кажется, страной, где математика именуется национальным термином — Wiskunde.

Некоторые из работ Стевина были постепенно переведены на латинский и французский языки; наиболее значительные были собраны после его смерти его учеником Жираром во французском издании, появившемся в 1635 г. после ранней смерти редактора. Альберт Жирар (Albert Girard, 1595—1633), родившийся в Лотарингии, но большую часть времени проведший в Голландии, где он искал убежища как протестант, был сам выдающимся математиком. Главный его труд „Новое открытие в алгебре" („Invention nouvelle en l'algèbre", 1629) содержит существенные новые результаты и отличается в то же время ясностью изложения. Жирар издал также работы по тригонометрии и снабдил примечаниями произведения Стевина.

Из работавших в Нидерландах математиков назовем еще Лудольфа Цейлена (Ludolph von Ceulen, 1539—1610); он родился в Гильдсгейме и был профессором фортификации в Лейдене. Далее заслуживают упоминания Роумен (Adriaen Romanus или von Roomen, 1561—1615), профессор в Львове и Вюрцбурге, и, наконец, Виллеброрд Снеллий (Willebrord Snellius, 1581—1626). Последний родился в Лейдене и был там же профессором, как и его отец. Особенно известен он открытием закона преломления световых лучей. Сверх того он занимался и практическими вопросами мореплавания. Главный математический его труд — тригонометрия — вышел после его смерти в 1627 г.

В Англии, где в средние века геометрией занимался Брадвардин (Bradwardinus, 1290—1349), исследовавший, например, вопрос о сумме углов звездчатых многоугольников, в начале нового времени математика была представлена королевским лейб-медиком Робертом Рекордом (Robert Recorde, 1510—1558). Большее значение имела деятельность Томаса Гэрриота (Thomas Harriot, 1560—1621), родившегося в Оксфорде и там же получившего университетское образование. По возвращении из путешествия в Северную Америку, где им выполнены были крупные картографические работы, Гэрриот с успехом занимался астрономией, физикой и математикой. Наиболее значительной математической его работой является сочинение „Практика искусства анализа" („Artis analyticae praxis"), появившееся, однако, только в 1631 г., долго спустя после его смерти. В этом произведении излагается теория уравнений, в связи с работами Виета; заслугам последнего автор в предисловии воздает должное, так что он неповинен в том, что его соотечественник Валлис изобразил его впоследствии соперником Виета. Однако, как мы увидим, мы обязаны и ему самому многими усовершенствованиями, особенно в отноше-

нии обозначений, делающих его книгу значительно более удобочитаемой, чем работы Виета, и частично вошедших в общее употребление. Из оставленных Гэрриотом рукописей видно, сверх того, что он знал многое, впоследствии вновь открытое другими.

Новые пути были подготовлены и проложены к этому времени творцом логарифмов Непером и Бриггом. Джон Непер (John Napier или Neper, 1550—1617) родился в Мерчистоне в Шотландии. По смерти отца, бывшего старше его всего на 16 лет, он стал бароном Мерчистонским; до этого времени он обладал небольшим поместьем. Он рано совершил заграничное путешествие и во время его или по возвращении познакомился с тригонометрическими трудами виднейших авторов от Региомонтана до Питиска (работы Виета, однако, кажется, оставались ему неизвестными). Его интересы устремлялись по различным направлениям. Так, он написал толкование Апокалипсиса, в котором ожесточенно полемизирует против католиков; это сочинение было переведено на голландский и немецкий языки. В своем имении он занимался земледелием, применяя механические инструменты своего изобретения; изобретал он также военные приборы.

Судя по одному письму, Непер уже в 1594 г. знал принцип образования и применения логарифмов; однако, его таблицы с пояснением относительно их употребления появились лишь в 1614 г. в сочинении „Описание удивительных таблиц логарифмов" („Mirifici logarithmorum canonis descriptio"). Написанное раньше „Построение удивительных таблиц логарифмов" („Mirifici logarithmorum canonis constructio"), в котором Непер разъясняет составление таблиц, появилось только после его смерти в 1619 г. с примечаниями Бригга. Эти работы содержат также важные усовершенствования в области тригонометрии, а способ, которым Непер определяет логарифмы, не только создал превосходное вспомогательное средство для вычислений, но содержит также зародыш идей исчисления бесконечно-малых.

Появление новых таблиц возбудило большой интерес к этому вычислительному средству у двух соотечественников Непера — Райта (Wright), переведшего „Описание" на английский язык и вскоре после этого умершего, и Бригга, продолжившего его дело. На континенте „Описание" также скоро привлекло к себе внимание математиков и астрономов — в частности, как мы уже говорили, Кеплера.

Только что упомянутый Генри Бригг (Henry Briggs, 1561—1630) родился в Иоркшире, учился в Кэмбридже и затем был там преподавателем; в 1596—1619 гг. он был профессором геометрии в лондонском колледже. Из Лондона Бригг был приглашен Севилем (Savile) на кафедру, учрежденную последним в Оксфордском университете (так называемая „Севилева профессура"), где он занимал первое после учредителя место. Как астроном Бригг вел борьбу с астрологией. Во время выхода „Описания" он занимал упомянутую должность в Лондоне; он был так восхищен

произведением Непера, что, как только смог, отправился в Шотландию, чтобы познакомиться с автором, и впоследствии повторил свой визит. При этом Непер и Бригг условились относительно нового и практически более удобного основания для новых больших таблиц, за которые взялся Бригг. Уже в 1617 г. он смог опубликовать логарифмы чисел до 1000 с 8 десятичными знаками. В 1624 г. появилась „Логарифмическая арифметика" („Arithmetica logarithmica") с 14-значными логарифмами чисел до 20 000 и от 90 000 до 100 000 — работа, пополненная впоследствии голландцем Флакком (Adriaen Vlack), по профессии книготорговцем. Бригг написал затем, кроме астрономических и географических работ, еще небольшие статьи о логарифмах и их применении, в которых развил способы вычисления, указанные в его большом труде. Из английских математиков назовем еще здесь сельского священника Вильяма Аутреда (William Oughtred, 1574—1660).

Обращаемся теперь снова к Франции, где в промежутке между Виета и великими математиками XVII в. мы встречаем Баше де-Мезириака (Bachet de Méziriac, 1587—1638), уроженца Бург-ан-Бресса (Bourg-en-Bresse). Баше изучал в Париже и Риме языки и литературу; потом возвратился на родину. Он сам был неплохой поэт, писавший по-французски, итальянски и латыни и знавший сверх того греческий язык. В 1635 г. он стал членом только что учрежденной Французской академии. Его эстетические наклонности проявляются и в математических его работах. Так, его интересуют старые задачи, часто идущие из седой древности и облеченные в форму анекдота или занимательного рассказа. Эти задачи собраны Баше в его книге „Приятные и занимательные задачи", („Problèmes plaisants et délectables" 1612, 2-е исправленное и дополненное издание 1624). Эта работа показывает, что Баше был хорошим математиком: он оттеняет в задачах математически интересные моменты и старается обобщать частные вопросы. Такова, например, его трактовка неопределенных уравнений 1-й степени. Его многостороннее образование дало ему возможность выпустить в 1621 г. издание Диофанта на греческом и латинском языках, снабдив его дополнениями и примечаниями. После него осталась неопубликованная работа по арифметике.

Баше проложил путь открытию глубоких и важных положений теории чисел и решению крайне трудных задач, относящихся к ней. В этой области значительно выше всех других стоял Ферма; но именно благодаря хорошо обработанной почве он не только встречал понимание значения своих открытий, но и мог то в одном, то в другом исследовании найти самостоятельных сотрудников. К ним принадлежали не только такие люди, как Декарт, но и математики, всецело специализировавшиеся в исследованиях по теории чисел. Из числа последних надо упомянуть Сент-Круа (Sainte-Croix), получившего это имя по монастырю, в котором он был настоятелем; но наиболее значительным из

них был Френикль де-Бесси (Frénicle de Bessy, 1602?—1675), служивший на монетном дворе. Ферма удивляется тем крупным и общим результатам, которых Френикль достиг без алгебры, открывая их не путем математических рассуждений, а исключительно индуктивными приемами, опираясь на свое замечательное чутье к числовым соотношениям. Работы же, которые Френикль позднее опубликовал в „Трудах Французской академии наук", не представляют особенного интереса. Пьер де-Ферма (Pierre de Fermat, 1601—1665), сын торговца кожами, родился близ Монтобана. Он изучал в Тулузе юридические науки и, пробыв некоторое время адвокатом, стал там же советником парламента. На этой должности он провел всю свою жизнь, не отмеченную крупными внешними событиями, которые заслуживали бы упоминания. Служба его оставляла ему время для исследований, проложивших новые пути и приведших к крупнейшим результатам почти во всех отраслях математики. Нередко эти исследования берут исходный пункт в математике древних, с которою Ферма был прекрасно знаком. Алгеброй он обычно пользовался в том виде и с теми обозначениями, которые ввел Виета, не придавая значения достигнутым после Виета формальным упрощениям: острота его мысли позволяла ему обходиться без них. Результаты его работ в части, касающейся теории чисел, стали известны благодаря его письмам, особенно к Френиклю, и примечаниям его на его экземпляре Диофанта в издании Баше. Результаты других своих математических исследований Ферма довольно часто посылал парижским математикам, частью в письмах, частью в маленьких рукописных статьях, и они становились таким образом известны не только в Париже, но и в иностранных математических кругах, находившихся в сношениях с парижскими. Ферма, в свою очередь, мог благодаря этому следить за всем происходившим вообще в математическом мире. Только некоторые его сочинения были сразу опубликованы, и то лишь по настойчивым требованиям его друзей. Остальные произведения его, вместе с большим количеством научных писем, появились лишь в 1679 г. в изданных сыном его „Различных сочинениях" („Varia opera"). Издание всего, что смогли собрать из написанного им, появилось сравнительно недавно под заглавием „Сочинения Ферма" („Oeuvres de Fermat").

Заглавия отдельных сочинений Ферма мы укажем в дальнейшем, разбирая их содержание в тех отделах, к которым каждое относится. Мы увидим в соответствующих местах, как велико было влияние Ферма во всех областях математики: в теории чисел, в геометрии, в алгебре; мы увидим также, какое значение имели работы Ферма для создания диференциального исчисления. Здесь мы заметим только, что переписка его носила обычно дружеский характер, но в 1637—1638 гг. она вылилась в бурную полемику с Декартом. Ферма подверг строгой критике „Диоптрику" Декарта. Одновременно он послал Декарту свое сочинение „О максимумах и минимумах" („De maximis et minimis"),

в котором он фактически производит операцию, именуемую теперь диференцированием, и применяет ее не только к решению задач на минимум и максимум, но и к решению задач на разыскание касательных к кривым. Декарт ответил бурною и очень несправедливою критикою сочинения Ферма. Спор, в котором на стороне Ферма выступили Роберваль и старший Паскаль, был все же улажен, частью благодаря посредничеству Мерсенна, через которого велась переписка и о котором мы будем говорить ниже, частью благодаря примирительному поведению самого Ферма. Здесь, как и при нетактичном выступлении Френикля, предшествовавшем его более близкому знакомству с Ферма, Ферма проявляет себя человеком, у которого чувство собственного достоинства было совершенно свободно от мелочного тщеславия.

Более разнообразна была жизнь и более пылок темперамент у противника Ферма в упомянутом споре, того из его современников, который ближе всех стоит к нему как математик и который имеет столь же крупное имя в философии, как в математике, — у Ренэ Декарта (René Descartes, по-латыни Cartesius, 1596—1650). Декарт родился в Турене и происходил из дворянского рода. Воспитание получил он в иезуитской коллегии „La Flèche," где он занимался как естественными науками, так и схоластической философией, но особый интерес проявлял к математике. Окунувшись на некоторое время в удовольствия веселой парижской жизни, он вдруг отошел от нее и занялся упорной углубленной научной работой. Через некоторое время он прервал занятия, чтобы соприкоснуться ближе с жизнью. Его привлекла военная служба. Сначала он поступил на службу к Морицу Оранскому и вместе с его армией принимал участие в тридцатилетней войне. Философские размышления, однако, не покидали его, и во время стоянки на зимних квартирах в Нейбурге 10 ноября 1619 г. — эту дату Декарт сохранил в своей памяти — его осенила внезапно творческая мысль, и он положил в этот день, как он выражается сам, „основание удивительной науки". Этой возникшей в его экзальтированном уме и затем тщательно продуманной идея была идеей аналитического метода в общем философском смысле, состоящего в том, чтобы каждую трудность разлагать на ее составные части и затем от самого простого и легкого подвигаться к более сложному. Этот путь обычно является путем от общего к частному. Наглядным примером этого метода являлась математика, которая идет в своих исследованиях именно таким образом, даже тогда, когда ее форма изложения состоит в постепенном синтетическом образовании более сложного. Но Декарт создал и в самой математике „аналитическую" в особом смысле геометрию. Геометрия эта является применением его общего аналитического метода, потому что в ней рассмотрение пространственных величин производится посредством применения к этому частному случаю общего учения о величине. Однако в отношении общности этот подход пре-

восходит подход древних, быть может, не в такой мере, как это думал сам Декарт, так как у древних геометрия была как раз формой общего учения о величинах. Как в недостаточном понимании этого, так и вообще в той манере, с которой он противопоставляет свой метод методу древних, Декарт проявляет ту же недооценку того, чем он обязан другим, за которую его упрекали и в области философии. Это нередкая ошибка великих умов, которые воспринятое от других тотчас же путем новой и самостоятельной переработки включают в свою собственную систему. В религиозном экстазе Декарт дал обет совершить паломничество в Лорето, если богоматерь, к которой он обращал свои мольбы, дарует ему успешное завершение новой науки. Сам он посвятил разработке ее всю жизнь. После того как он еще некоторое время принимал участие в войне, он вернулся во Францию, где получил в наследство несколько имений, а в 1629 г. переселился в Голландию, чтобы там, согласно своему девизу „Bene vixit qui bene latuit" (хорошо прожил тот, кто хорошо укрылся), продолжать занятия в более спокойной обстановке. Искать этой обстановки его заставило неодобрение и даже преследования, которых он должен был ожидать со стороны католического духовенства за те мысли, которые он высказывал. От этого отрицательного отношения, огорчавшего его как правоверного католика и благодарного ученика иезуитов, его не смогло, однако, оградить и расстояние, и ради примирения он пошел на большее, чем должен был бы сделать, стараясь после осуждения Галилея скрыть свое согласие с ним и оставив неопубликованным сочинение о вселенной. В Голландии Декарт, в свою очередь, натолкнулся на сопротивление с другой стороны, именно со стороны протестантских богословов, также придерживавшихся схоластической философии.

Во время своего пребывания в Голландии Декарт опубликовал свои труды, из которых прежде всего появились в 1637 г. в Лейдене „Философские опыты" („Essays philosophiques"). Они содержат четыре сочинения: „Рассуждение о методе" („Discours de la méthode"), „Метеоры" („Météores"), „Диоптрику" („Dioptrique") и „Геометрию" („Géométrie"). Последняя, читающаяся теперь совершенно легко, так как введенное в ней алгебраическое изложение геометрических вопросов дается в форме, принятой еще и теперь, в то время требовала для своего понимания, с одной стороны, упражнений в буквенном исчислении, с другой — комментариев. Первые были даны в руководстве, написанном по указаниям Декарта, но не напечатанном, последние были составлены его друзьями, среди которых находился голландский математик Скоутен; они были присоединены к выпущенному Скоутеном латинскому изданию „Геометрии", вместе с самостоятельными работами их авторов, о которых мы будем говорить ниже.

Остальные изданные в то же время сочинения Декарта посвящены большей частью философским вопросам и не имеют непосредственного отношения к математике; математические свои

результаты, помимо содержащихся в „Геометрии", Декарт делал достоянием современников путем переписки, нашедшей себе, конечно, место в позднейших изданиях его сочинений. К его корреспондентам в области философии принадлежали две государыни — Елизавета Пфальцская и шведская королева Христина. По приглашению последней Декарт переехал в 1649 г. в Швецию, где в следующем году он умер.

Мы не видим здесь надобности рассматривать декартово понятие о боге или его мнение об отношениях между душой и телом. Но мы не можем не коснуться, хотя бы вкратце, того, как ставил Декарт вопрос о применении математики к изучению природы. Декарт, так же как и Кеплер и Галилей, пользуется индукцией, восходя от наблюденных явлений и числовых соотношений к причинам этих явлений; он так же требует эмпирической проверки заключений, полученных путем дедукции из принятых гипотез. Но он не придает этому такого значения, как Кеплер и Галилей.

В области теории познания он быстро преодолевает сомнение, которым по его утверждению должно начинаться всякое научное исследование, тем, что выставляет положение. „Я мыслю, следовательно я существую" („Je pense, donc je suis"). Таким же образом в области естествознания он быстро оставляет индуктивный подход к опытным фактам и обращается к интуиции, служащей исходным пунктом его дальнейшей дедукции. Первоосновой, на которой Декарт стремится построить объяснение всех явлений, являются его положения (истинность которых вытекает, по мнению Декарта, из их интуитивной очевидности) о протяженности, делимости и подвижности материи. Эти предпосылки его механического миропонимания играют у Декарта примерно такую роль, как аксиомы в математике, и основной задачей Декарта является вывод законов и явлений природы из этих предпосылок. Конечно, их надо проверить опытом, главным образом с тем, чтобы посмотреть, не имели ли место при возникновении действительного явления другие причины, кроме предположенных; но устраивать эти опыты в большем масштабе эти его установки ему не дозволяли. Его делом была дедукция, через ряд умозаключений ведущая с наивозможной математической ясностью и достоверностью от причины к действиям. Чтобы показать на примере, какие результаты получает таким путем Декарт, мы укажем, что исходя исключительно из предпосылок о протяженности, делимости и подвижности, Декарт умозаключает, что сумма движения, порожденного при сотворении мира, должна оставаться неизменной. Термину „сумма движения" Декарт придает здесь тот смысл, в каком мы употребляем термин „количество движения". Поэтому вышеприведенное положение не является правильным. Однако, если заменить понятие „сумма движения" современным понятием энергии, а также освободить формулировку Декарта от теологической оболочки, то перед нами будет один из важнейших законов современного естествознания.

К этому закону гораздо ближе, как мы увидим, подошел Лейбниц. Веру Декарта в возможность простого механического объяснения всех явлений природы, даже относящихся к живой природе, подкрепило открытие Гарвеем кровообращения. При проведении своих механических объяснений Декарт нередко вынужден был прибегать к математике. Так, мы увидим, что некоторые из важнейших его математических исследований находятся в связи с диоптрикой.

Наиболее важная часть математической переписки Декарта была адресована в Париж, представлявший собою в то время крупнейший центр математической мысли. Здесь находились выдающиеся математики, собиравшиеся на еженедельные заседания; этот кружок находился в сношениях как с жившими вне Парижа еще более крупными французскими математиками, именно Ферма и Декартом, так и с иностранными математиками, в том числе с Гюйгенсом. Благодаря этому между всеми ними, как мы уже видели, говоря о Ферма и Декарте, устанавливались взаимные сношения. Главным посредником во всей этой переписке был долгое время священник Мерсенн (Mersenne, 1588—1648) из ордена миноритов, живший в Париже с 1620 г. Он учился вместе с Декартом в коллегии „La Flèche“ и все время был его верным другом. Декарт, с своей стороны, был первым, избравшим Мерсенна своим поверенным в Париже. Мерсенн, выступавший сам как борец за веру и, с другой стороны, всегда готовый защищать своего старого друга, лучше всех подходил для того, чтобы охранить Декарта от объявления его еретиком со стороны богословского факультета в Париже и прежних его учителей иезуитов. Но Мерсенн едва ли особенно много способствовал предотвращению споров Декарта с парижскими математиками, с которыми, как, например, с Робервалем, Мерсенн стоял на столь же дружеской ноге. Во всяком случае, он выступал посредником, когда обмен мнений принимал бурный характер. „Физико-математические размышления“ („Cogitata physico-mathematica“) самого Мерсенна не представляют собою самостоятельной работы, но имеют то значение, что в них впервые появляются различные открытия его друзей и корреспондентов, как, например, Ферма. В них сказывается интерес к математике и понимание ее, сделавшие Мерсенна столь пригодным для роли посредника между математиками. Со многими из них, жившими вне Парижа, Мерсенн познакомился во время своих путешествий; в Париже он был постоянным участником упомянутых еженедельных заседаний.

Преемником Мерсенна в качестве общего математического корреспондента явился Пьер де-Каркави (Pierre de Carcavy, умерший в 1684 г., год рождения не установлен). Прежде он был в Тулузе коллегой Ферма, с которым был тесно связан и общими математическими интересами. Страстный библиофил, Каркави через некоторое время по приезде в Париж, где он сблизился с Робервалем и Паскалем, сделался королевским библиотекарем;

свое пребывание в этой должности он ознаменовал крупными заслугами. В 1666 г. Каркави оказывал помощь министру Кольберу при основании Академии наук, среди первых членов которых находились те математики, которые были прежде участниками частного кружка Мерсенна, называвшегося иногда тоже „Академией". Первым председателем вновь учрежденной Академии был Гюйгенс, переехавший в связи с этим в Париж. Работы, о которых дают сведения первые заседания Академии, заключались главным образом в производившихся коллективно физических и физиологических опытах и в имевших большое значение астрономических исследованиях. Академия служила, конечно, и делу связи между математиками, но только в конце столетия начали появляться работы ее членов имевшие значение и для математики.

За год до основания Академии в Париже стал выходить научный печатный орган—„Journal des Savants" („Журнал ученых"). В этом журнале, организации которого содействовал тот же Кольбер, помещались выдержки из появлявшихся книг, иногда сопровождавшиеся критикой. В конце XVII и в начале XVIII столетия, когда этим журналом руководил математик Пьер Вариньон (Varignon, 1654—1722), этот журнал приобрел особенно большое значение, так как в нем братья Бернулли помещали свои работы по исчислению бесконечно-малых.

Проследив за научными органами во Франции до конца XVII столетия, мы снова возвращаемся к французским математикам середины этого столетия, современникам Ферма и Декарта. Среди живших и работавших в это время в Париже надо назвать прежде всего Клода Мидоржа (Clode Mydorge, 1585—1647), друга Декарта. Мидорж принадлежал к высшему чиновничеству, но, занимая должность только номинально, жил на свои средства. Это позволяло ему оказывать Декарту помощь в шлифовке стекол для его диоптрических опытов. Главная собственная работа Мидоржа, появившаяся в 1631—1639 гг., — „Сочинение о конических сечениях". Написанное им продолжение этого сочинения утеряно. В рукописном виде дошло до нас большое количество относящихся к теории конических сечений задач на построение; часть этих задач решается с помощью линейки и циркуля, а часть приходится решать приближенными построениями; для многих из этих задач Мидорж дает решения.

В то время как Мидорж в своих исследованиях конических сечений в основном примыкал к древним, Жирар Дезарг (Girard Desargues, 1593—1662) пролагал совершенно новые пути. Дезарг родился в Лионе и был архитектором и инженером. Об этой его деятельности известно, что ему на заключение был переслан план лионской ратуши и что в окончательном виде этого плана многое принадлежит ему; известно также, что он как военный инженер принимал участие в осаде Ларошели, где, в 1628 г. его навестил Декарт. Время с 1626 по 1650 г. Дезарг провел в Париже, где он часто появлялся на упоминавшихся заседаниях математиков и физиков. Об его всестороннем научном образова-

ии свидетельствует вес, который Декарт придавал его мнению относительно своих философских работ.

Исходным пунктом математической деятельности Дезарга служила его практическая работа. В 1630 г. он издал свое учение о перспективе, к которому позже добавил сочинения о резьбе по камню и о солнечных часах; он дает в них точные геометрические обоснования практическим операциям. Что в этих своих сочинениях и в своих методах, которые позже в дополненном виде были опубликованы в работе его ученика, гравера по меди Боссе (Bosse), он проводил нечто действительно новое, видно, с одной стороны, из горячего признания, полученного им у способных учеников, среди которых он кроме Боссе называет одного художника и одного резчика по камню, с другой — из сильного сопротивления со стороны многих практиков, не понимавших его и не хотевших отказаться от обычных, менее целесообразных и часто прямо-таки неправильных приемов. Бороться с этим сопротивлением было тем труднее, что оно шло от людей, которые не могли даже понять приводимых против них аргументов. Боссе помимо упомянутого сочинения имел случай пропагандировать идеи Дезарга на лекциях в Академии художеств. Ему удалось получить признание со стороны некоторых художников; но сопротивление было столь сильно, что в конце концов Боссе было запрещено пользоваться методами Дезарга, что заставило его просить об увольнении.

Дезаргу мы обязаны не только практическими правилами построений и точными геометрическими разъяснениями и доказательствами их: его практические установки нашли широкое применение и для развития самой геометрии. Мы видим это в его главном математическом труде, появившемся в 1639 г. Заглавие этого труда трудно перевести дословно на русский язык. Его можно было бы передать так: „Черновой набросок вторжения в область того, что происходит при встрече конуса с плоскостью" („Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan"). О судьбе этой работы и заложенных в ней богатых мыслей мы будем говорить подробнее в связи с разбором ее содержания. Здесь упомянем только, что и это сочинение нашло глубокое понимание и получило горячее признание у великих математиков того времени: у Ферма, у Декарта, хотя последнему был свойственен в это время совершенно иной подход к геометрии, и, наконец, как мы скоро увидим, у совсем юного Паскаля; но оно не нашло доступа в более широкие круги, не понявшие его основной мысли и отпугнутые большим количеством новоизобретенных технических терминов. Сочинение это было так скоро забыто, что в XIX в., после того как содержавшиеся в нем мысли вновь возникли, развились и упрочились, его пришлось печатать по сохранившейся рукописной копии.

Вслед за этими учеными, стоявшими к Декарту в дружеских личных отношениях, но не испытавшими его влияния в своих математических работах, я упомяну, хотя и отдаляясь этим на

некоторое время от Парижа, Флоримона де-Бон (Florimond de Beaune, 1601—1652); он был офицером, позже чиновником-юристом в Блуа и первым французом, вполне примкнувшим к декартовой трактовке математики. Собственные его математические работы нашли поэтому естественное свое место в скоутеновском издании „Геометрии“ Декарта; одна из этих работ является комментарием к „Геометрии“. Имя его связано, кроме того, с несколькими задачами, предложенными им в 1639 г. „знаменитейшим математикам в Париже и Тулузе“ и давшими Декарту толчок к исследованиям нового рода, именно к исследованиям об „обратных задачах на касательные“.

В этот период, столь блестящий в истории французской математики, профессуру по математике в Collège de France, учрежденную в 1632 г. Рамусом, занимал Жиль Персонн (Giles Personne, 1602—1672), получивший по месту своего рождения в северо-западной Франции имя Роберваля (Roberval), под которым он больше всего и известен. Естественно, что мы встречаем его в числе главных участников математических заседаний, а впоследствии в числе основных членов Академии наук; в трудах Академии находятся его важнейшие работы (собранные только в 1693 г. и снова напечатанные в 1730 г. в „Мемуарах Академии“); подобно работам Ферма, они, однако же, сразу получали распространение в кружке, к которому он принадлежал, и среди корреспондентов его. Как мы увидим, особенно плодотворными мыслями и значительными достижениями обязаны мы ему в области инфинитезимальных исследований. Однако с талантливостью он соединял тщеславие, делавшее его несправедливым и придирчивым по отношению к тем, кто опережал его с открытиями, неосуществленные планы которых имелись у него самого. Это тщеславие порой толкало Роберваля на выступления, компрометировавшие его, что не упускал случая использовать Декарт в своих спорах с Робервалем.

Декарт часто с иронией говорит о Робервале, как об официальном представителе математики, и это заставляет искать главную причину его неприязни к Робервалю и насмешек над ним в том, что тот при преподавании не уделял должного места новым воззрениям Декарта и даже критиковал некоторые места „Геометрии“. Критика Роберваля далеко не является неосновательной, и мы увидим, что в его совместной с Этьеном Паскалем защите метода касательных Ферма истина была на его стороне и что в вопросе об определении приведенной длины физического маятника он тоже имел превосходство над своим противником. Напротив, неправы были Роберваль и младший Паскаль в их бурных нападках на Торичелли, который, как теперь выяснено, самостоятельно пришел к тому же методу касательных, как и Роберваль.

Только что упомянутый Этьен Паскаль был председателем апелляционного суда в Клермон-Ферране; по смерти своей жены он отказался в 1631 г. от этого места и переселился в Париж,

где он с интересом и успехом взялся за математику и физику на первом плане у него стояли, однако, заботы о воспитании и образовании своих троих детей. Одним из них был сын, Блэз Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662), необычайно рано развившийся. В занятиях математикой отец сперва сдерживал его, так как предвидел, что она будет отвлекать его от других предметов; и только тогда, когда он увидел, как далеко мальчик ушел самостоятельно, он не только предоставил ему полную свободу, но даже стал водить его с собою на заседания математиков, где тот прислушивался ко всем выступлениям с большим вниманием и, как это скоро обнаружилось, с большими результатами. А именно, он смог здесь настолько усвоить недоступные большинству современников взгляды Дезарга, главный труд которого появился в 1639 г., что в том же году в возрасте 16 лет он написал основанное на этих воззрениях, но в их плане совершенно оригинальное сочинение о конических сечениях, в котором их свойства выводятся из так называемого теперь паскалева шестиугольника. Сочинение это встретило полное признание со стороны Дезарга и Декарта; последний сначала не хотел верить, что оно принадлежит столь юному автору. Напечатана была, к сожалению, только часть его „Опыт (теории) конических сечений" („Essai sur les coniques", 1640); план остального известен по выдержке, сделанной Лейбницем из утерянной впоследствии рукописи, которую он взял у семьи Паскаля. Паскаль, проведший время с 1641 по 1649 г. в Руане, где его отец поступил на службу, в 18-летнем возрасте изобрел арифмометр. После этого он занимался физическими исследованиями и дал доказательство предположению Торичелли, что явления, приписывавшиеся раньше „боязни пустоты", обусловливаются давлением воздуха. Действительно, произведенный под его руководством опыт показал, что барометр на вершине горы Пюи де-Дом стоял ниже, чем в глубокой долине. К этому времени относится также его сочинение о так называемом арифметическом треугольнике и некоторые другие математические сочинения, которые после его смерти были напечатаны, но впоследствии были найдены на складе не вышедшими в свет.

К числу математических вопросов, привлекавших внимание Паскаля по его возвращении в Париж, принадлежали также задачи по теории вероятностей; они возникли в связи с некоторыми вопросами, обращенными к нему его знакомым де-Мере, ярым игроком, но в то же время человеком, имевшим влияние на его гуманитарное образование. Об этом новом роде математических исследований Паскаль вел в 1654 г. переписку с Ферма. Между тем, около этого времени в нем произошел внезапный переворот, называемый обычно его „вторым обращением", — переворот, направивший его деятельность на другие пути. Строят различные предположения относительно внешних причин этого перелома; известно, что сильное впечатление произвела на Паскаля внезапная опасность, которой подверглась его жизнь. Из

того, как он старается в своих „Мыслях" („Pensées") убедить читателя, что искать мира нужно в вере, можно видеть, что свою предшествовавшую жизнь Паскаль считает жизнью греховной. Теперь он переходит к строжайшему аскетизму. Он не только усердствует в воздержании от пищи, питья и удовольствий, добавляя к страданиям, производимым его крайне слабым здоровьем, еще самоистязания, но долгое время он воздерживается даже от продолжения своих исследований по математике и физике, хотя, как видно из незадолго перед тем составленной программы, у него были тогда частью готовы, частью начаты разнообразные и значительные работы. Бездеятельным он, однако, не остается. Он пишет свои „Письма к провинциалу" („Lettres à un provincial"), в которых он примыкает к так называемым янсенистам в их борьбе против иезуитов. В письмах этих Паскаль проявляет блестящее литературное дарование. Он опровергает противоречия, содержавшиеся в догматических нападках иезуитов и доминиканцев на янсенистов, с такой силой, что вся образованная Франция оказывается привлеченной на его сторону: его нападки на казуистическую мораль иезуитов являются сокрушительными, и „Письма" еще и теперь являются классическим образцом французского языка, на развитие которого они имели большое влияние. Писал Паскаль под псевдонимом Луи де-Монтальт (Louis de Montalte), в воспоминание о барометрическом измерении на высокой горе. Собственная его глубокая религиозность проявляется, однако, сильнее всего не в „Письмах к провинциалу", но в записанных в виде изречений и набросков и изданных после его смерти „Мыслях".

Математическая карьера Паскаля была, однако, еще не закончена. В 1658 г. он открыл некоторые свойства циклоиды, или, как он и другие французские математики называли ее, рулетты. Сестра его в написанной ею биографии отмечает, что мысли об этом являлись ему как навязчивые идеи в ночи, когда он не мог спать из-за зубной боли; в этом она, повидимому, хочет найти извинение его возвращению к математике. Однако сам он и его верующие друзья уже не так смотрели на дело в это время. Как раз при содействии одного из этих друзей он смог публично назначить приз за решение в течение известного срока некоторых задач, основывавшихся на найденных им свойствах. Приз, вместе с собственным решением Паскаля, был передан Каркави, который должен был совместно с Робервалем произвести присуждение. Из присланных ответов один, довольно малозначительный, принадлежал иезуиту Лалуверу, другой — Валлису. Последний ответ вряд ли был столь полным, как тот, что был позже напечатан Валлисом, так как и он не был удостоен приза. Конкурс этот дал повод к тому, что другие выдающиеся математики — Гюйгенс, Слюз и Рен, — не отвечая на самый поставленный вопрос, прислали сообщения о других найденных ими свойствах циклоиды; особое впечатление на французских математиков произвело сообщение Рена о ее спрямлении. Паскаль

опубликовал к этому времени свою „Историю рулетты" („Histoire de la roulette"), содержащую, с одной стороны, упомянутые выше нападки на Торичелли в пользу Роберваля, с другой — нападки на Лалувера. В 1659 г. появились собственные статьи Паскаля, содержащие не только доказательства соответствующих предложений относительно циклоиды, но и общий метод квадратуры или интегрирования, по отношению к которому вопросы о циклоиде являются только приложениями. При издании этих статей Паскаль, предложивший свои вопросы анонимно, пользуется псевдонимом Amos Dettonville, составленным из тех же букв, что и Louis de Montalte „Писем к провинциалу".

Среди оставшихся после Паскаля сочинений упомянем об отрывке „О геометрическом духе" („De l'esprit géométrique"), отражающем как религиозно-философские, так и математические его воззрения. Паскаль хочет подобно Декарту, но в еще более строгой связи с геометрической системой Евклида, приобрести достоверное знание на пути, избранном математикой. Знание это должно быть получено при помощи определений, аксиом и основанных на них доказательств. То, что Паскаль высказывает по этому поводу, не представляет ничего нового для человека, знакомого с геометрией; но он показывает сверх того, как необходимо предъявлять требование такой же строгости при рассмотрении и других вопросов; как раз соблюдение им самим этих логических требований и делает его „Письма к провинциалу" столь убедительными. Приведем, например, его требование, употребляя для краткости слово, которому было дано определение, повторять мысленно всякий раз все определение, чтобы не допустить ничего свойственного пониманию этого слова в обычной речи, но не заключающегося в определении. Как раз за несоблюдение этого правила он с большой силой обрушивается в первом из „Писем к провинциалу" на иезуитов и доминиканцев. Хотя Паскаль и утверждает, что математика следует его правилу, но надо признать, что в его время она погрешала против этого правила, по крайней мере в исчислении бесконечно-малых, одним из основоположников которого был он сам. Доказательства в этой области математики не были надежными именно потому, что термин „бесконечно малая величина" употреблялся без точного ограничения его содержания.

С почти одновременною смертью Ферма, Дезарга и Паскаля наиболее блестящий период французской математики XVII в. остался позади, и в основанной в 1666 г. Академии иностранец Гюйгенс играл бо́льшую роль, чем математики-французы. Среди последних надо все же упомянуть крупного геометра конца столетия Филиппа де-ла-Гира (Philippe de la Hire, 1640—1718). Де-ла-Гир, подобно своему отцу, сперва был художником; после поездки в Рим он открыл в Париже школу живописи, но вскоре перешел к занятиям астрономией и математикой и стал членом Академии (1678) и профессором в Collège de France Первая его профессия дала ему повод к занятиям перспективой

которую он, подобно Дезаргу, применил к коническим сечениям, не порывая, однако, со старыми методами в той мере, как Дезарг. Де-ла-Гир не сделал этого, даже когда познакомился с главным трудом тогда уже почти забытого Дезарга. Быть может, эта осторожность в отношении к новым воззрениям содействовала тому, что его сочинения о конических сечениях, появившиеся в 1673 и 1679 гг., и затем главный его труд „Конические сечения" („Sectiones conicae", 1685) встретили понимание в сравнительно широких кругах и избегли участи произведений Дезарга. Алгебраическими исследованиями обязаны мы Мишелю Роллю (Michel Rolle, 1652—1719), принадлежавшему с 1685 г. к числу состоявших па жаловании членов Академии. В 1690 г. вышел его „Курс алгебры" („Traité d'algèbre").

В то время как де-ла-Гира правильнее всего рассматривать как выдающегося эпигона предшествующего периода, упомянутый выше Вариньон (Varignon) и маркиз де-Лопиталь (de l'Hospital, 1661—1704), бывший сперва офицером, но потом всецело отдавшийся научным занятиям, уже всецело принадлежат новому периоду, отмеченному именами Ньютона и Лейбница. Лопиталь как ученый примыкал как раз к последнему. Он рано познакомился с первой опубликованной работой Лейбница по диференциальному исчислению (1684), с 1692 г. был в переписке с ним и встречался с одним из первых ученых созданной им школы, Иоганном Бернулли (Johann Bernoulli), когда тот жил в Париже. Знакомство это было ему очень полезно для усвоения лейбницева диференциального исчисления, полное изложение которого он издал первый в „Анализе бесконечно-малых" (1696). Лопиталь сам говорит, что излагает здесь то, чему его научили Лейбниц и братья Бернулли. Иоганн Бернулли хотел впоследствии представить дело так, что изложение в целом основано не только на устных, но даже на письменных его сообщениях; утверждение это по многим соображениям является мало вероятным, оно недоступно проверке, и характер Иоганна Бернулли никоим образом не служит достаточным ручательством за достоверность этого утверждения.

От Франции мы снова обращаемся к соседним северным странам: Голландии и пограничной между ней и Францией области, образующей главную составную часть теперешней Бельгии. В последней стране мы встречаем в течение XVII в. троих представителей католического духовенства, которые существенно способствовали росту зарождавшегося исчисления бесконечно-малых. Первый из них — иезуит Жан Шарль де-ла-Файль (Jean Charles de la Faille) — издал в 1632 г. в Антверпене сочинение „О центре тяжести частей круга и эллипса" („De centro gravitatis partium circuli et ellypsis"). Сочинение это отличается как остроумием приемов, так и античной строгостью и полнотою обоснований — свойствами, которые впоследствии были оценены Гюйгенсом, многочисленные исчерпывающие исследования которого обладают теми же достоинствами.

Значительно больше по объему „Геометрический труд" („Opus geometricum", 1647) другого иезуита, Григория Сен-Винцента (Gregorius St. Vincentius, 1584—1667). Григорий родился в Брюгге, учился в Риме у Клавия (Clavius) и затем стал профессором в Праге, в стенах которой он находился, когда Декарт принимал участие в ее осаде. При завоевании Праги он лишился своих математических бумаг. Вскоре после этого он переехал в Вену, а затем вернулся на родину, где прожил до самой смерти в Генте. Здесь издал он упомянутый большой труд, в основу которого частью легли некоторые из его пражских бумаг, через десять лет снова попавших ему в руки. Главной целью работы является квадратура круга и конических сечений; относительно первой он думал, что ему удалось выполнить ее точно. Несмотря на указанные Декартом и Гюйгенсом ошибки, „Геометрический труд" содержит многочисленные методы и соображения, говорящие о большой изобретательности автора и близко родственные тем, которые в руках других математиков (Ферма, Паскаля) приобрели большое значение. Когда в совпадении с исследованиями Кавальери у Григория хотят найти плагиат, то не имеют к этому совершенно никаких оснований. Сравнение между архимедовой спиралью и параболой, о котором здесь идет речь, в такой мере подсказывается работой Архимеда, что мысль о нем легко могла возникнуть у различных авторов и в действительности возникала и у других, помимо Кавальери и Григория.

Третий бельгиец, которого мы должны здесь назвать, — Ренэ де-Слюз (René de Sluse, 1622—1685), родившийся близ Льежа. Слюз учился в Риме, где имел много знакомств, но позже жил, оторванный от других математиков, в Льеже, где был каноником. Он усердно следил за крупными математическими успехами своего времени как по книгам, о приобретении которых он очень заботился, так и путем переписки, завязавшейся у него постепенно с наиболее выдающимися математиками, как, например, с Гюйгенсом и Паскалем, а впоследствии, при содействии секретаря английского Королевского общества Ольденбурга, с английскими учеными. Королевское общество приняло и его в число своих членов. Из писем Слюза видно, что он умел по-своему трактовать возникавшие тогда инфинитезимальные задачи. Опубликовал он немного. Важнейшая его работа „Отыскание середины" („Mesolabum") появилась в 1659 г. и в расширенном виде в 1668 г. Она рассматривает определение двух средних геометрических с помощью конических сечений; но Слюз подходит здесь также и к инфинитезимальным вопросам. Его метод касательных, которым он владел уже в 1652 г. и который он позже усовершенствовал, в совершенно кратком изложении и по настойчивым просьбам Ольденбурга был напечатан в 1673 г. в журнале Королевского общества „Philosophical Transactions" („Философские труды"). Слюз пользовался заслуженным уважением также как филолог, в частности как знаток восточных

языков; в качестве такового он смог познакомиться с новооткрытым арабским изданием дотоле утерянных книг Аполлония, раньше чем они появились в переводе; сверх того у него имелись основательные исторические исследования, и наконец, он был сведущ в юриспруденции.

Уже одно присутствие Декарта в Голландии должно было установить связь между развитием математики во Франции и в этой стране, столь выросшей во всех отношениях после освободительной войны. Великий французский философ и математик нашел здесь горячего приверженца в лице Франца Скоутена (Franz van Schooten, 1615—1660), унаследовавшего от своего отца место профессора математики в Лейдене. Собственные его „Математические этюды" („Exercitationes mathemticae") имеют значение, главным образом, благодаря заключающимся в них выдержкам из других писателей; наибольшей заслугой его является упомянутое уже издание сочинений Виета в 1646 г. и „Геометрии" Декарта на латинском языке, сперва в 1649 г., а затем в 1659 г., с комментариями и дополнениями, принадлежащими как ему самому, так и другим авторам. Наиболее значительные из этих добавлений написаны двумя более молодыми голландскими математиками Гейратом и Гудде, которым Скоутен давал также для решения трудные инфинитезимальные задачи, присылавшиеся ему его знаменитым учителем Гюйгенсом. Из работ Генриха Гейрата (Heinrich van Heuract) известно, однако, только упомянутое маленькое добавление — оно является первой напечатанной работой, содержащей спрямление алгебраической кривой. Иоганн Гудде (Johannes Hudde, 1628—1704) родился в Амстердаме. Он занимался правом, но уделял время и математике, которую применял также и практически, работая, например, по сооружению шлюзов. Сверх того он принимал деятельное участие в амстердамских городских делах; он даже был там девятнадцать раз мэром. Деятельность его как математического писателя ограничивается двумя дополнениями к „Геометрии" Декарта, касающимися приведения уравнений и максимальных и минимальных значений; в свое время мы будем говорить о них подробнее. Статьи эти названы выдержками из более крупного труда, который, однако, никогда не появился, быть может потому, что работы Ньютона и Лейбница сделали его излишним. Гудде имел случай беседовать об этих вопросах с различными математиками, посещавшими его время от времени в Амстердаме, а также с Лейбницем.

Среди авторов дополнений к декартовой „Геометрии" мы встречаем еще де-Витта (Jan de Witt, 1623—1672). Де-Витт учился в 1641—1645 гг. в Лейдене. Через некоторое время после этого он как лидер республиканской партии стал во главе управления своим отечеством и, благодаря своему уму, дельности и редкой в то время неподкупности, положил предел продвижению Людовика XIV на север; дальнейшие военные неудачи и усиление враждебной партии стоили де-Витту жизни: в 1672 г. он был

убит своими соотечественниками. Его обширная деятельность оставила ему все же время написать сочинение о величине пожизненной ренты, появившееся за год до его смерти. Оно имеет практическую цель, но основано на математических исследованиях, справедливость которых он поручил в приписке проверить Гудде.

Выше всех среди нидерландских математиков стоит, однако, Христиан Гюйгенс (Christian Huygens, 1629—1695), имя которого одинаково знаменито как в истории математики, так и в истории физики. Гюйгенс происходил из дворянского рода; дед и отец его принадлежали к наиболее верным приверженцам Оранского дома. Отец, Константин Гюйгенс, был дипломат, человек разносторонне, в том числе и математически образованный, притом любитель искусства, обладавший и сам немалым поэтическим дарованием. Он дал своим сыновьям, из которых Христиан был его любимцем, очень тщательное и очень раннее образование; частью он занимался с ними сам, когда его многочисленные поездки оставляли ему время для этого. Однако упражнения в сочинении латинских стихов интересовали на этих уроках Христиана Гюйгенса меньше, чем механика, конструирование и практические работы, которые он сам связывал с этими занятиями. Шестнадцать лет он вместе со своим братом Константином, бывшим позже его верным помощником во многих работах, поступил в Лейденский университет, а через два года в университет в Бреда. Целью было юридическое образование, но для Христиана главным сделалась математика; в Лейдене он нашел учителя и друга в Скоутене, который связал его с Декартом и с Мерсенном, а через последнего со всеми великими математиками того времени.

После короткого путешествия с нидерландским посольством в Данию и пребывания при тамошнем дворе, находившемся тогда во Фленсбурге, Гюйгенс поселился в Гааге, где усердно занялся научными исследованиями. Что касается математики, то он с большим интересом и успехом брался за различные вопросы, занимавшие математиков того времени. Об этом свидетельствуют отдельные его сочинения, например, о квадратуре конических сечений с помощью определения центров тяжести; сочинение „О расчетах в азартной игре“ („De ratiociniis in ludo aleae“), положившее наряду с одновременными работами Ферма и Паскаля основание теории вероятностей и включенное Скоутеном в его „Математические этюды“; далее „О найденной величине круга“ („De circuli magnitudine inventa“). Весьма разнообразные результаты, найденные им, содержатся далее в его обширной корреспонденции с Скоутеном, парижскими математиками, Слюзом и другими. Гюйгенс проявляет здесь часто большое искусство в решении встречающихся ему инфинитезимальных задач, не устанавливая, однако, особого метода их решения; но эта большая свобода в приемах связана как раз с большим богатством мыслей. Впоследствии Гюйгенс получил многие важные результаты, которые

теперь относятся к исчислению бесконечно-малых, но которых он сумел достигнуть путем изящного применения средств, имеющихся уже в античной геометрии. Способность к тонкой критике, которой требует рассмотрение каждого отдельного вопроса при отсутствии общих методов исчисления бесконечно-малых, Гюйгенс проявил уже в Лейдене, показав ошибочность предположения Галилея, что тяжелая однородная нить принимает форму параболы, и дав затем даже распределение массы, соответствующее этой форме. В Гааге он подверг публичной критике квадратуру круга Григория, но придал этой критике такую форму, что она не помешала дальнейшим дружеским отношениям между ними. Сам Гюйгенс, которому мы обязаны столь многими важными результатами, говорил, что он меньше ценит результаты, чем безупречность вывода и ясность доказательства.

В то время как гюйгенсова критика Галилея и Григория, а также и Кавальери возбуждали восхищение его учителя Скоутена, этот ревностный картезианец не осмелился вдаться в критику декартовых принципов движения или способствовать распространению такой критики. Но как раз новые принципы, выставляемые Гюйгенсом вместо декартовых, а именно: принцип движения центра тяжести и ограниченное, но правильное установление принципа живой силы, являются в связи с галилеевым законом падения основанием его математических исследований об ударе упругих тел, центробежной силе и о приведенных длинах маятников. Последние находятся в его главном математическом труде „О маятниковых часах“ („De horologio oscillatorio“); в этом сочинении содержатся также важное математическое исследование о падении по циклоиде и учение об эволютах. Сочинение это появилось только в 1673 г.; но многое из его содержания стало различными путями известно уже раньше.

Математические исследования образуют лишь одну сторону названных здесь работ. Результаты исследований были проверены опытами, а поводом к математическим исследованиям в только что упомянутом труде послужило изобретение Гюйгенсом часов с маятником, о значении которых в повседневной жизни, в астрономии и при измерении силы тяжести нам нет надобности говорить. Наряду с занятиями механикой Гюйгенс предпринял в Гааге исследования по оптике и с помощью своих усовершенствованных телескопов открыл спутников и кольцо Сатурна.

Из Гааги Гюйгенс неоднократно ездил в Париж и в Англию, где в 1663 г. стал членом только что основанного Королевского общества.

В 1666 г. он перебрался в Париж на длительное время, приняв почетное предложение быть первым председателем Академии наук. Ему принадлежит значительная доля заслуг в крупных астрономических работах, проведенных соответствующим разделом Академии. Умел он извлекать результаты и из более случайных опытов естественно-исторического раздела. Так, он имел случай

на трупе, переданном Академии для исследования, убедиться в приспособляемости глаза, вполне исследованной, однако, лишь значительно позже. В лаборатории Академии он сконструировал пороховую машину по тому же принципу, который через 200 лет применили к газовому двигателю. Помощником его в этой работе был молодой Папин, впоследствии один из изобретателей паровой машины.

Сверх того Гюйгенс продолжал в Париже свои собственные работы, издал здесь, как уже упомянуто, свою работу о маятнике и написал здесь свой „Трактат о свете" („Traité de la lumière"), вышедший в 1691 г., в котором впервые изложена и положена в основу важнейших световых явлений волновая теория. Подобно тому, как эта теория представляет собою противоположность одновременной ньютоновой теории излучения, Гюйгенс отказался и от ньютонова учения о притяжении, не признавая дальнодействия за механическое объяснение, за что его Ньютон собственно также не выдает. Отношения между обоими учеными были, впрочем, хорошими: Ньютон удивлялся, например, тонкости доказательств Гюйгенса. Теснее с Гюйгенсом связан был Лейбниц; но Гюйгенс, проведший уже столько инфинитезимальных исследований без техники диференциального исчисления, не мог в старости освоиться с нею.

Для поправления здоровья Гюйгенс поехал в 1681 г. из Парижа на родину; отмена Нантского эдикта помешала ему вернуться назад.

После его смерти важнейшие работы его были в 1724 г. собраны и изданы под заглавием „Различные сочинения" („Opera varia"). В последние годы к этому прибавилось издание всех сохранившихся писем его и к нему.

Необычайный подъем, испытанный математикою в середине XVII в. на западно-европейском континенте, в конце века получил продолжение по ту сторону Ламанша, где были проложены новые пути и получены крупные новые результаты. Впереди других шел там в этом отношении оказавший немалое влияние на своих последователей Джон Валлис (John Wallis, 1616 - 1703), сын кентского священника. Валлис получил хорошее классическое образование, но с арифметикой познакомился только случайно, и занимался ею затем в часы досуга для своего удовольствия. У него была феноменальная память на числа, так что однажды в бессонную ночь он вычислил в уме 27 цифр квадратного корня из 53-значного числа и утром продиктовал их. Занимаясь самообразованием, он стал читать математические книги, которые случайно попадались ему; по большей части эти книги носили прикладной характер. Затем он познакомился, однако, также с инфинитезимальными исследованиями Торичелли и Кавальери и с „Геометрией" Декарта, а позже с античными математиками. Если добавить к этому пробудившийся у него несколько позже интерес к криптографии и его способности к расшифровке криптограмм, то мы будем иметь некоторый материал для понима-

ния его особенностей как математика. Значением своим он обязан главным образом своей способности к числовой индукции — интерполяции, как он называл ее — и своему чутью к аналогии. Благодаря этим свойствам он пришел к имеющим большое значение общим результатам; некоторые из них были строго доказаны современными ему математиками, справедливость же других была доказана лишь впоследствии.

Обращаясь снова к его биографии, заметим, что по окончании курса учения он сперва занимал в разных местах должность капеллана, затем получил место младшего преподавателя в Кэмбридже, но скоро отказался от этой должности, женился и жил затем некоторое время в Лондоне на свои средства. Здесь он, примкнув к кружку ученых, о которых мы будем говорить ниже, продолжал свои занятия математикой и принимал участие в политической жизни. Уже в бытность капелланом он оказал однажды парламентской партии услугу расшифровкой одной депеши; в Лондоне он продолжал быть приверженцем этой партии, принадлежа к ее умеренному крылу, будучи, например, против казни короля. Оливер Кромвель относился к нему с уважением и в 1649 г. сделал его профессором севилевой кафедры геометрии в Оксфорде (раньше это место занимал Бригг). Место это Валлис сохранил и после реставрации и соединил с ним должность королевского придворного капеллана. Таким образом Валлис, как позднее некоторые французские математики эпохи великой революции (например Лаплас), хорошо уживался как с революционным, так и с реакционным режимом. Эта политическая беспринципность была вполне сознательной. Так, при диктатуре Кромвеля Валлис, располагая сведениями, которые он получал при расшифровке перехваченной корреспонденции роялистов и которые могли скомпрометировать ряд лиц, предусмотрительно сохранял эти сведения втайне. Также и позже при господстве Оранского дома Валлис сохранил свое влияние и продолжал оказывать помощь при криптографических работах. По его совету было отвергнуто введение грегорианского календаря, из страха перед влиянием Рима.

Главный труд Валлиса „Арифметика бесконечных величин" („Arithmetica infinitorum") появился в 1655 г. К нему было присоединено аналитико-геометрическое исследование конических сечений. Его „Переписка" („Commercium epistolicum", 1658) содержит главным образом рассмотрение задач Ферма по теории чисел. В сочинении „О циклоиде" („De cycloide", 1659) Валлис решает задачи Паскаля об этой кривой. К 1685 г. относится появление его „Трактата алгебры" („Treatise of Algebra"). Полное издание его сочинений вышло в 1693—1699 гг.

Вышеупомянутый кружок, в котором Валлис стал одним из наиболее выдающихся членов, собирался приблизительно с середины столетия то в Лондоне, то в Оксфорде главным образом для совместного планирования и выполнения физических опытов; однако, так же как и в Париже, с этим связано было и более

широкое взаимное научное влияние. Эта совместная работа, в которую путем переписки были вовлечены также иностранные ученые, оказалась настолько плодотворной, что после реставрации решено было обеспечить ее продолжение учреждением Королевского общества (Royal Society), начавшего вскоре после этого издание своих „Философских трудов" („Philosophical Transactions").

Первое место среди тех, кто подготовил и основал это общество и сразу придал ему большое значение, занимал, конечно, химик и физик Роберт Бойль (Robert Boyle). Другим его физиком был Роберт Гук (Robert Hooke, 1635—1703), сын священника, рано обнаруживший большие способности как к механике, так и к математике. В Обществе он проявил себя как неутомимый экспериментатор и богатый идеями исследователь, нередко заранее догадывавшийся о том, что другие строго обосновывали лишь позже. Это обстоятельство при раздражительности его характера часто приводило его к бурным спорам относительно авторства, например с Ньютоном. Наиболее значительным математиком этого кружка был Валлис; но кроме него там было еще несколько человек, которым мы обязаны важными успехами в математике.

Среди них назовем Кристофа Врена (Christoph Wren, 1632—1723), у которого кружок собирался в Лондоне, когда он был профессором астрономии в Gresham College. Позже (1660—1673) был он профессором севилевой кафедры астрономии в Оксфорде. Он оказывался особенно полезным членом общества благодаря своей способности искусно производить наблюдения и опыты; он часто пользовался при этом саморегистрирующими инструментами. Он предпринял между прочим опыты для изучения удара упругих тел („Philosophical Transactions", 1669), законы которого Гюйгенс, однако, открыл уже раньше. При естественноисторических исследованиях очень полезны оказывались его способности к графическим работам. Врен пользовался графическими построениями и для целей астрономии; в частности он применил циклоиду, длину дуги которой он нашел первый, к решению так называемой задачи Кеплера. Вскоре после учреждения Королевского общества, председателем которого он был в 1680—1682 гг., он дал в одной своей речи полную программу его деятельности. Сверх того он уже тогда начал карьеру архитектора. Под его руководством построен между прочим большой купол храма святого Павла.

Первым председателем Королевского общества был виконт Вильям Броункер (William Browncker, 1620—1684), изучавший математику в Оксфорде и после реставрации занимавший различные высокие должности. Сведения об его исследованиях по теории чисел и его применении бесконечных непрерывных дробей имеются у Валлиса, а работа его о квадратуре гиперболы помещена в „Phiosophical Transactions".

Далее, мы должны упомянуть Вильяма Нейля (William Neil или Neile, 1637—1670), который, по сообщению Валлиса, первый

нашел в 1657 г. в Оксфорде, где он учился, длину кривой, именно длину полукубической параболы; Гейрат (Heuraet) и Ферма получили впоследствии тот же результат независимо от него. Нейль с 1663 г. был деятельным членом Королевского общества, но ранняя смерть разрушила возлагавшиеся на него надежды. Среди математиков, принадлежавших к тому же обществу, назовем еще голштинца Николая Меркатора (Nicolaus Mercator). Настоящая фамилия его была Кауфман (что значит „купец"). „Меркатор" — это перевод фамилии на латинский язык (купец по-латыни — mercator). Меркатор учился в Копенгагене и в Ростоке; в Лондоне, будучи членом общества, он написал наиболее значительный из своих математических трудов „Логарифмотехнику" („Logarithmotechnica", 1667). Впоследствии он уехал во Францию, где принимал участие в водопроводных работах в Версале, и в 1687 г. умер.

Наконец, наряду с упомянутыми математиками из Лондона и Оксфорда назовем еще несколько более молодого Эдмунда Галлея (Edmund Halley, 1656—1742), хотя он был главным образом астрономом и хотя деятельность его частично выходит за пределы рассматриваемого в этой книге периода. Галлей был сыном богатого пивовара в Лондоне; в 1673 г. он приехал учиться в Оксфорд, куда привез с собой инструменты, употреблявшиеся им для астрономических наблюдений уже в детстве. Позже он наблюдал на острове святой Елены южное звездное небо и по возвращении в 1678 г. представил Королевскому обществу, членом которого он стал в это же время, звездный каталог, составленный им на основании своих наблюдений. О содействии, которое Галлей оказал Ньютону в деле опубликования его трудов, мы будем говорить ниже. Здесь надо только упомянуть, что, неся издержки по изданию, он уже не был богатым человеком, так как отец его тогда только что умер в бедности. Позже он все же смог сообщить Ньютону, что выручка от продажи покрыла расходы. За свои материалистические воззрения он не был допущен к занятию в 1691 г. севилевой профессуры астрономии в Оксфорде, однако, в 1703 г. стал преемником Валлиса по севилевой профессуре геометрии. Мы не будем говорить здесь о крупных заслугах Галлея как астронома и его исследованиях по метеорологии и земному магнетизму, но укажем на его перевод с арабского сочинения Аполлония „О пропорциональном сечении" и его издании „Конических сечений" Аполлония со включением переведенных им с арабского пятой, шестой и седьмой книг. Эти издания и высказанные им догадки о содержании восьмой книги „Конических сечений" обнаруживают такое проникновение в ход мыслей греческих математиков, каким обладали еще ученые, подобные Ферма, Гюйгенсу и Ньютону, а позже Роберту Симсону, но которое с тех пор стало значительно реже, так как, овладев могущественным формальным аппаратом современности, математики утратили понимание того, что могут дать старые формы. Гал-

леевы таблицы смертности, о которых мы еще будем говорить, находятся в „Philosophical Transactions", XVII.

Два члена Королевского общества могут быть упомянуты здесь с тем же правом, как раньше Мерсенн и Каркави в Париже; — это Ольденбург и Коллин. Генрих Ольденбург (Heinrich Oldenburg, 1615—1677) родился в Бремене, но с 1640 по 1648 г. жил в Лондоне. Во второй раз он приезжал туда с дипломатической миссией к Кромвелю; позже он жил в Оксфорде, где находился в тесных сношениях с Бойлем и Валлисом и принимал участие в совместных естественнонаучных исследованиях. При учреждении Королевского общества он стал одним из его первых секретарей. Он взял на себя этим большую работу, так как на его обязанности лежало ведение журналов о трудах общества, издание „Трудов", а главное, обширная переписка со многими иногородними и иностранными учеными, находившимися в сношениях с обществом. Он стал также связующим звеном и между ними. Так, имевшая большое значение переписка, которая велась в 1676 г. между Ньютоном и Лейбницем, адресовалась Ольденбургу как секретарю общества и получала благодаря этому значительно более публичный характер, чем если бы это был простой обмен мыслями двух великих людей.

Менее официальное положение занимал Джон Коллин (John Collins, 1625—1683), бывший книготорговцем, а во время гражданской войны ставший моряком. После реставрации он занимал различные маленькие должности и получал маленькую пенсию; для пополнения доходов он брал трудные вычислительные работы. Право быть упомянутым здесь дают ему не его собственные труды по математике и ее приложениям, но искренний интерес, с которым он следил за математическими успехами своего времени и помогал ученым словом и делом. С одной стороны, он содействовал им при издании их книг, с другой — он вел чрезвычайно обширную переписку, с помощью которой все время держал их в курсе новейших достижений науки.

Среди заграничных ученых, поддерживавших при посредничестве упомянутых сейчас лиц сношения с лондонскими математиками и с Королевским обществом, мы уже упомянули Слюза и Гюйгенса. Внутри Великобритании можно начать в этом отношении с шотландца Джемса Грегори (James Gregory, 1638—1675), сына священника. По материнской линии он был в родстве с Андерсоном, учеником Виета.

В 1663 г. Грегори первый выдвинул идею конструкции зеркального телескопа. 1664—1667 гг. он пробыл в Падуе, где им была издана в 1667 г. „Истинная квадратура круга и гиперболы" („Vera circuli et hyperbolae quadratura"), произведение, подвергшееся несправедливой критике Гюйгенса; впоследствии к нему была добавлена „Всеобщая часть геометрии" („Geometriae pars universalis").

В 1668 г. Грегори стал членом Королевского общества и профессором в университете святого Андрея, в 1674 г. профессором

в Эдинбургском университете. В 1668 г. он издал „Геометрические этюды" („Exercitationes geometricae"), а в 1672 г.—„Геометрические попытки изучения движения маятника и брошенных тел" („Tentamina quaedam geometrica de motu penduli et projectarum"). Мы увидим, что в названных здесь трудах Грегори сделал весьма существенный вклад в начинавшуюся тогда разработку инфинитезимальных вопросов и, в частности, что подобно Ньютону, с которым он поддерживал связь через Коллина, он ввел широкое употребление бесконечных рядов. Ранняя смерть помешала ему далее следовать за Ньютоном по его блистательному пути.

Прежде чем перейти к Ньютону, бессмертные работы которого были выполнены, как известно, в Кэмбридже, надо вспомнить его предшественника по кафедре в университете этого города, его учителя и друга Исаака Барроу (Isaac Barrow, 1630—1677). Этот весьма выдающийся человек, сильно содействовавший развитию математики, был сыном торговца мануфактурой, состоявшего на службе у Карла I. Верность королю привела отца к гибели; равным образом верность Стюартам и епископальной церкви создавала в период перед реставрацией трудности сыну. Благодаря чужой помощи ему все же удалось продолжать занятия в Кэмбридже, начатые при более благоприятных обстоятельствах; но из-за своих политических убеждений он не смог получить здесь профессуру по греческому языку, на которую имел шансы, несмотря на свою молодость. Кроме древних языков Барроу изучал математику, профессором которой был Валлис. Даже и математику рассматривал он как вспомогательный предмет для теологии, потому что „чтобы быть хорошим теологом, надо знать хронологию которая требует знания астрономии, требующего, в свою очередь, знания геометрии". Условия на его родине толкнули его на чужбину, в путешествие (1655—1659), в котором он кроме Франции, Италии и Германии побывал также на востоке и испытал разные приключения. Быть может, во время этого путешествия он приобрел имевшее столь большое значение для его собственных работ знание сочинений Галилея и Торичелли; может быть, впрочем, он обязан этим знанием влиянию Валлиса.

Тотчас же по возвращении Барроу принял священнический сан, а затем, как только изменились политические обстоятельства, получил профессуру по греческому языку в Оксфорде, потом профессуру по геометрии в Gresham College в Лондоне и, наконец, в 1663 г. профессуру математики в Кэмбридже. Во время этой преподавательской деятельности он написал свое наиболее значительное математическое сочинение „Лекции по математике" („Lectiones mathematicae"), служащее продолжением „Лекций по оптике" („Lectiones opticae"); при содействии Коллина в 1669—1670 гг. вышло первое издание, в 1674 г. — второе. Как неоднократно упоминает сам Барроу, он получал при этом различные импульсы и советы от молодого Ньютона, который за два года до занятия Барроу кафедры в Кэмбридже был включен

в списки студентов этого университета. Указания крайне добросовестного Барроу и наши сведения о формах, какие приняли приемы самого Ньютона уже в 1665—1666 гг., позволяют выделить те места, где это содействие могло быть особенно значительным; и все же тогда остается принадлежащим одному Барроу такой основной для всей книги пункт, как ясное установление взаимной обратности между задачами, решаемыми теперь диференцированием и интегрированием, и применение ее к решению так называемых обратных задач на касательные, т. е. таких задач, которые выражаются теперь с помощью диференциальных уравнений. Барроу применяет, правда, указанную зависимость только к тому, чтобы сводить простые задачи этого рода к квадратурам; но под рукою Ньютона и Лейбница эта зависимость должна была вскоре образовать основание нового анализа бесконечно-малых.

Много или мало Барроу был обязан в названной книге содействию Ньютона, но превосходство Ньютона как математика было ему, повидимому, вполне ясно; он решил поэтому, хотя ему самому было только 39 лет, передать ему свое преподавательское место в Кэмбридже. Этот необычный шаг он мотивировал тем, что математика отнимала у него время от тех дел, к которым его обязывал его священнический обет. Во всяком случае он проявил этим большое бескорыстие, так как первое время после его отставки ему пришлось довольствоваться скудными доходами. Впоследствии благодаря Карлу II, у которого он был придворным проповедником, его обстоятельства улучшились. Как проповедник он приобрел себе славу, которая в его отечестве нисколько не уступает его известности как математика. Он продолжал притом и математическую работу и издал, по побуждению своего друга Коллина, некоторых из греческих математиков.

Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1642—1727), к которому мы теперь обращаемся, был сыном арендатора из Линкольншира, умершего до рождения сына. Сперва он проходил несколько расширенный школьный курс обучения, но так как его отчим тем временем умер, то ему рано пришлось вернуться домой, чтобы взять на себя ведение хозяйства. К этому, однако, у него не было влечения; он больше интересовался занятиями или изготовлением солнечных часов, механических кунстштюков и т. п. Таким образом он продолжал свои занятия, пока сводившиеся главным образом к изучению древних языков, и в 1661 г. поступил в Кэмбриджский университет. Здесь он с большим усердием погрузился в математику. Евклида он вначале оценил недостаточно, находя, что нелепо доказывать самоочевидные вещи; но позже он не только восхищался строгими формами древних, но и сам пользовался ими. Напротив, декартова геометрия, которой он первый дал имя „аналитической", сразу пришлась ему по вкусу. Далее он изучал „Арифметику бесконечно-малых" Валлиса и с 1663 г. слушал лекции Барроу. Одновременно началась также его собственная неутомимая работа мысли, которая, как расска-

зывают, могла до того поглощать его, что он совсем забывал об окружающем. Подтверждение этому мы находим в его ответе на вопрос о том, как он может решать такие трудные задачи: „Постоянным размышлением о них“.

Наилучший случай сконцентрировать свои мысли представился ему, быть может, у него дома в Линкольншире, когда эпидемия чумы побудила его оставить Кэмбридж. Во всяком случае известно, что как раз в это время (1665—1667 гг.) он обосновал свои важнейшие математические открытия: распространение формулы бинома на степени с дробными и отрицательными показателями и в связи с этим широкое применение бесконечных рядов, свой метод касательных, совпадающий с его прямым исчислением флюксий, обозначения которого он начал употреблять уже тогда, и обратное исчисление флюксий, т. е. применение взаимной обратности между „диференцированием“ и „интегрированием“ к совершенно новому и систематическому нахождению квадратур. Применение это, пролагающее новые пути в математике, принадлежит ему, хотя о самой взаимной обратности он мог узнать на лекциях Барроу. Тогда уже был ему ясен и закон всемирного тяготения. Он находил подтверждение его в третьем законе Кеплера (примененном к круговым путям) — мысль, почти одновременно возникшая также у других — у Врена и Гука — и соответствующая гюйгенсову определению центробежной силы: но Ньютон при этом нашел, что притяжение, удерживающее Луну на ее орбите, должно быть то же, что и заставляющее падать на землю яблоко с дерева. Правда, вследствие неточности тогдашних данных относительно величины земного радиуса, Ньютон не мог еще в то время получить тождественных результатов для обоих падений; но до поры до времени он утешался возможностью существования других побочных влияний. Полного подтверждения своего мнения добился он в 1672 г., когда на заседании Королевского общества, в члены которого он только что был принят, был сообщен результат пикарова измерения градуса. Около этого же времени начал он конструирование зеркального телескопа, убедившись, что применению одной отдельной линзы мешает светорассеяние.

Ньютон тогда же изложил свои вышепоименованные крупные чисто математические открытия в письменной форме — в сочинениях, из которых сочинение о флюксиях (и в частности, обратное исчисление флюксий) лежит в основе появившегося только в 1704 г. „Трактата о квадратуре кривых“ („Tractatus de quadratura curvarum“). Сочинение его „Об анализе при помощи уравнений с бесконечным числом членов“ („De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“), в котором он развивает свое учение о бесконечных рядах, поясняет это учение весьма важными приложениями и при этом в виде примера разбирает основной принцип прямого и обратного исчисления флюксий (без применения, однако, особых названий и обозначений), — написано в 1665 г. и тоже осталось пока лежать у него самого.

Когда в 1669 г. появилась „Логарифмотехника“ Меркатора, содержащая одно частное применение метода бесконечных рядов, то это, как утверждает сам Ньютон, ослабило его интерес к его собственной гораздо более общей работе, так как он думал, что Меркатор и его читатели могут теперь получить все его результаты; однако он показал свою рукопись Барроу, и тот нашел нужным тотчас же отослать ее Коллину, чтобы при его содействии ее содержание стало более широко известным. Благодаря Коллину познакомился с ньютоновым применением рядов Грегори; впоследствии, в 1676 г., эту работу просматривал у Коллина Лейбниц; но напечатана она была только в 1711 г. Не лучше обстояло дело с главным математическим трудом Ньютона „Метод флюксий и бесконечных рядов“ („Methodus fluxionum et serierum infinitarum“). Труд этот первоначально был написан как введение к английскому изданию одной голландской алгебраической работы; позже Ньютон решил издать его как дополнение к своей собственной работе по оптике (1671); однако рукопись так и осталась лежать и была напечатана только после смерти автора. Учение о флюксиях выступает в этом труде как замкнутая система; рассматриваются не только прямое и обратное исчисления флюксий и их ближайшие приложения к определению касательных, нахождению максимальных и минимальных значений и квадратурам, но также дальнейшие геометрические приложения к кривизне и, наконец. уравнения с флюксиями, соответствующие теперешним диференциальным уравнениям. О содержании этого труда к Коллину поступило только совсем краткое сообщение.

Между тем то, что стало известно о работах Ньютона, возбудило у Лейбница желание получить более обстоятельные сведения, особенно об употреблении Ньютоном бесконечных рядов. При содействии Ольденбурга Лейбниц получил в 1676 г. от Ньютона два содержательных письма по этим вопросам. Вместе с хранившимся у Коллина „Анализом“ они давали наиболее полное представление об инфинитезимальных исследованиях Ньютона, какое только тогда можно было получить. Правда, они не дают полных сведений о принципе и применениях метода флюксий, не говоря уже об его технике и символике; но многочисленные и важные результаты, сообщаемые в них, и указания относительно хода мыслей Ньютона, например относительно того, как он пришел к разложению бинома и отсюда к другим разложениям в ряды, должны были иметь громадное значение для тех, кто был знаком с основами тогдашней математики и имел случай просмотреть хранившийся у Коллина труд и узнать из него, как сообщаемые в письмах результаты интегрирования можно проверить диференцированием. Естественно, что письма эти должны были дать очень много такому человеку, как Лейбниц, который уже сам был близок к взглядам и методам Ньютона.

Эти главные методы собственно даны в письмах, но в такой форме, что читатель не может воспользоваться ими, так как они

скрыты в двух анаграммах; первую из них Ньютон лишь значительно позже расшифровал следующим образом: „Когда дано уравнение с любым числом флюент, найти флюксии, и обратно“, а последнюю так. „Один метод состоит в получении флюенты из уравнения, содержащего также и флюксии; другой — только в том, что предполагается существование ряда для одного из неизвестных, откуда легко вывести остальные, и в таком сравнении соответствующих друг другу членов уравнения, что их можно использовать для нахождения членов предполагаемого ряда“. О последнем методе — применении метода неопределенных коэфицнентов к разложению в бесконечный ряд — можно было бы, пожалуй, составить представление и без специальных пояснений из тех многочисленных и важных применений, о которых Ньютон сообщает в „Анализе“ и в обоих письмах; зато остальные сведения, содержащиеся в анаграммах, дали бы не много даже и в том случае, если бы они были сообщены в незамаскированной форме. Речь здесь идет о новом и связном методе, который вообще можно понять и правильно оценить только тогда, когда он будет изложен подробно и систематически.

Невозможность сделать понятным метод флюксий без пространного и тщательного изложения служит естественным объяснением примененной здесь анаграмматической формы, нередко употреблявшейся в то время; к ней прибегали в тех случаях, когда автор хотел обеспечить за собою в будущем признание того, что к данному моменту он обладал некоторым результатом, но когда он собирался сообщить этот результат лишь в связи с чем-нибудь другим, что пока еще было не совсем готово. Пользование анаграммами мы неоднократно встречаем, например, у Гюйгенса. Вполне естественно поэтому, что и Ньютон не хотел опубликовывать своего метода флюксий, прежде чем он не сможет изложить его в безупречной форме — безупречной в его собственных глазах и огражденной от нападок со стороны других.

Что касается полного изложения учения о флюксиях, то Ньютону не посчастливилось и в дальнейшем. Он и позже ограничился отдельными пояснениями, содержащимися в его „Математических началах натуральной философии“ и в предназначенном для опубликования письме к Валлису (1692), но слишком краткими, чтобы стать предметом критики. Значительно позднее было издано сочинение о квадратуре кривых, одна глава в котором посвящена учению о флюксиях. Объяснение этому можно найти в особенностях характера самого Ньютона. Оно заключается, во-первых, в некоторой неохоте заниматься исследованиями, которые велись и другими; это проявилось у него в отношении к бесконечным рядам, когда он увидел, что Меркатор также пользовался ими, и могло иметь место и по отношению к применению флюксий, когда ответ Лейбница на его второе письмо показал, что тот в своем диференцировании обладает подобными же ресурсами. Далее надо принять во внима-

ние неохоту, с которой Ньютон опубликовывал что-нибудь; неохота эта коренилась в боязни быть вовлеченным в полемику,— боязни, проявленной им, как мы увидим, и в других случаях. Неудивительно, что она должна была сказаться с особой силой, когда речь шла о совершенно новом методе бесконечно-малых, обосновать который было делом нелегким,—гораздо легче было нападать на его логические основы. Ньютон с интересом изучал Валлиса и видел, как много может дать его индуктивное применение аналогий; Ньютон при случае сам пользовался ими, чтобы получать новые результаты. Так, он сообщает в одном из своих писем к Лейбницу, что к обобщенной формуле бинома он впервые пришел именно таким путем. Однако осторожному Ньютону не хотелось ограничиться таким изложением своих методов, которое не оградило бы их прочными доказательствами от столь страшивших его возражений. К тому же эпоха слишком сжилась с античной строгостью и с теми формами, в которых она достигается и вне которых математики того времени не чувствовали себя уверенными в ее достижении. Что Ньютон требовал от себя самого этой строгости, мы видим как из тщательных доказательств в его более позднем главном труде (мы говорим о „Математических началах"), так и из того, что свою работу о методе флюксий, в которой этот метод был изложен с наибольшей полнотой, он не решался опубликовать вплоть до смерти. Если, однако, и последнее сочинение не вполне удовлетворяло его самого или если он боялся, что неясности могли бы вызвать возражения, то в наше время этому не приходится удивляться: с одной стороны, мы знаем, как много прошло времени еще и в XIX в., раньше чем методы исчисления бесконечно-малых, плодотворность которых XVIII в. так широко использовал, оказались вполне проникнутыми логическою ясностью, достигнутой древними в более ограниченной области, с другой стороны, мы видим, что еще и теперь по временам появляется критика на Ньютона, основанная на совершенном непонимании его мыслей.

Не будем входить в разбор того, достаточны ли указанные нами мотивы чтобы объяснить и тот факт,, что Ньютон продолжал скрывать свое учение о флюксиях даже тогда, когда Лейбниц в 1684 г. опубликовал принципы своего диференцирования. Сделано это было Лейбницем, правда, в более доступной форме, чем та, которую могло иметь в то время ньютоново учение о флюксиях, но вряд ли в более безукоризненной; и тогда еще Ньютон мог бы доказать свое превосходство, раскрыв значительно более широкие области, в которых он уже давно применял опубликованные теперь Лейбницем правила.

Наше объяснение кажется нам все же лучше, чем обычное мнение, что Ньютон скрывал свои методы, чтобы тем больше импонировать результатами. Правда, и мы указывали как на одну из причин его упорного молчания на нежелание его заниматься тем, что знали и умели применять также и другие; это чувство,

однако, вовсе не должно было иметь столь эгоистический характер, как иногда хотят это представить. Во всяком случае оно больше всего вредило самому Ньютону и, таким образом, в действительности не служило никаким эгоистическим целям.

Напротив, вряд ли несправедливым является утверждение, что Ньютон был в указанном отношении человеком со странностями; в конце концов, здесь могло действовать несколько указанных нами мотивов; как они сочетались между собой,—вряд ли возможно теперь определить точнее.

После этого отступления, связанного с раннею разработкою Ньютоном учения о флюксиях, возвращаемся к его биографии. Получив в 1669 г. после Барроу профессуру, он читал между прочим лекции по общей арифметике, т. е. по алгебре, конспект которых был издан в 1707 г. его преемником по кафедре, а в 1722 г. — в исправленном виде самим Ньютоном. Главным предметом его исследований и лекций в первое время его профессуры было, однако, учение о свете. Здесь, как известно, мы обязаны ему прежде всего учением о цветорассеянии; что касается его теории излучения света, то она вскоре уступила место гюйгенсовой волновой теории. Работая над учением о цветорассеянии, Ньютон на некоторое время потерял охоту к этой работе вследствие возражений Гука, который был занят подобными же мыслями, но не довел их до создания собственного закона,—снова один из случаев, где Ньютон ясно проявил страх перед полемикой.

Между тем в другом значительно более важном пункте Гук имел на Ньютона стимулирующее влияние, заставив его возобновить начатые им в 1665 г. исследования о действии всеобщего притяжения. А именно, в 1679 г. Гук как секретарь Королевского общества послал Ньютону предложение поставить обществу какую-либо тему. Ньютон ответил на это предложением исследовать падение с высокого пункта; надо было ожидать, что падающее тело отклонится к востоку. На приложенном чертеже Ньютон изобразил тело описывающим спираль около центра Земли. Позднее Ньютон объяснил, что эту форму траектория получает благодаря наличию сопротивления воздуха. Этот чертеж дал Гуку повод к замечанию, что траектория будет эксцентрической, эллипсовидной кривой, и он предложил Ньютону определить ее. Ньютону удалось найти, что траекторией, в согласии с первым законом Кеплера, будет эллипс с фокусом в центре Земли, если предполагать, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли,—конечно, не в случае падения внутрь Земли, когда притяжение уже не будет подчинено этому закону. Однако когда это вычисление было выполнено и его результат был сообщен Гуку, Ньютон спокойно отложил его в сторону.

Снова обратиться к этому вопросу побудил Ньютона Галлей. Под влиянием исследований Гюйгенса о центробежной силе у Галлея также зародилась мысль, что третий закон Кеплера

можно (предполагая орбиты кругами) объяснить притяжением, действующим обратно пропорционально квадрату расстояния, а это, в свою очередь, привело его к догадке, что и первый закон Кеплера может допускать подобное объяснение. Он посоветовался в Лондоне с Вреном и Гуком, которые не смогли дать ему удовлетворительного ответа, хотя сами занимались тем же вопросом; но Гук указал ему на Ньютона. Галлей тогда же (1684) отправился в Кэмбридж, чтобы поговорить с ним. Ньютон дал ответ с большой готовностью, сообщив, что он нашел доказательство правильности предположения Галлея. Как мало, однако, за последнее время он думал об этом доказательстве, видно было из того, что, попробовав воспроизвести его, он сначала не мог разобраться в своем собственном чертеже, так как две линии, которые должны были изображать любую пару сопряженных диаметров, имели такой вид, словно бы они должны были образовать прямые углы. Все было, конечно, сейчас же выяснено. Галлей, однако, не ограничился этим. Своей настойчивостью по отношению к Ньютону он добился того, что тот публично сообщил Королевскому обществу об уже достигнутых им крупных результатах в области небесной механики, а затем в короткое время написал и опубликовал в 1686—1687 гг. большой труд „Математические начала натуральной философии" („Philosophiae naturalis principia mathematica"). Галлей, тогда уже не бывший богатым человеком, взял на себя расходы по изданию и помогал Ньютону в связанной с этим работе как только мог.

Меньше всего труда стоило при этом, конечно, побудить Ньютона к необходимой громадной работе мысли. Работа эта требовалась как для того, чтобы пополнитьглавные положения небесной механики, например, учением о притяжении шаров, так и для того, чтобы выполнить обширные исследования по механике, физике, астрономии, геометрии и исчислению бесконечно-малых, к которым Ньютон был приведен стремлением полностью использовать полученные и с таким успехом примененные им принципы механики. Для того чтобы развернуть в таком масштабе свои громадные творческие силы, Ньютон, раз вернувшись к этим вопросам, вряд ли нуждался в каком-либо уговаривании со стороны Галлея; но нужно было долго убеждать Ньютона в том, что его труд необходимо опубликовать. Так, Ньютон долго не давал согласия на издание третьей книги, после того как предыдущие вызвали полемические выступления со стороны Гука.

Нет надобности долго задерживаться на выяснении того, что дали человечеству „Начала". Значение доказанного единства и связи сил, господствующих у нас на Земле и во вселенной, ясно всем. Понятно, что принципы Ньютона могут быть применены и действительно применялись в разное время также и для того, чтобы столь же определенно доказать единство и связь между другими разнообразными и, повидимому, различными физическими явлениями. Но в истории математики особенно должно быть от-

мечено, что центральную роль играет здесь математическое доказательство тождественности так называемого ньютонова закона притяжения с эмпирическими законами Кеплера. Ньютон отличается от остальных, занимавшихся подобными вопросами, именно тем, что он дал полное доказательство и что ведущие к этому ясно изложенные математические принципы применимы в то же время и к другим исследованиям; сам Ньютон дал в своем капитальном труде много ярких примеров приложения этих принципов. Установленное Ньютоном общее понятие силы есть то самое понятие, которое теперь кладется в основу рациональной механики и вместе с тем всех математико-физических исследований. Правда, со времен Ньютона до настоящего времени ощущается неудовлетворенность столь метафизическим понятием, как понятие дальнодействия, не объясненного никакими физическими причинами; но сам Ньютон не виноват в этом, так как он отнюдь не отрицает необходимости исследовать природу тяготения. Он только констатирует, что он сам не в состоянии дать удовлетворительного объяснения всемирного тяготения.

Но ньютоновы „Начала" имели фундаментальное значение не только для механики, но и для самой математики и в особенности для математики бесконечно-малых. В них, правда, Ньютон не пользуется языком и обозначениями ни исчисления флюксий ни, само собой разумеется, диференциального исчисления. Но дело в том, что именно для того, чтобы создать материал для применения этих новых исчислений и средства, необходимые для такого применения, Ньютон должен был развить предварительно такие инфинитезимальные методы, которые не укладывались в рамки новых исчислений или которые не сразу поддавались переводу на их язык.

Исследование различных движений у Ньютона носит ярко выраженный инфинитезимальный характер; более того, его понятие скорости почти совпадает с понятием флюксии. Но Ньютон не имел в распоряжении методов диференциальной геометрии; он не мог поэтому использовать исчисление флюксий в связи с аналитической геометрией для вывода кеплеровых законов из закона притяжения или, наоборот, закона притяжения из кеплеровых законов. Он должен был поэтому комбинировать инфинитезимальные свои принципы с синтетическим изучением свойств конических сечений; необходимые ему предложения теории конических сечений он мог найти у Аполлония, которого Ньютон знал в совершенстве. Однако и для этой цели ему пригодилось его учение о флюксиях или по крайней мере, навыки в применении его принципов. Ньютон сам говорит об этом.

При этой работе должно было стать ясным, что эти принципы применимы к гораздо более широкому кругу вопросов и что формы, в которых эти принципы должны применяться к их изучению, по существу не отличаются от тех форм, в которых совершалось непосредственное применение исчисления флюксий. Иногда решение задачи требовало даже прямого использования

результатов, полученных в исчислении флюксий; часто, однако, решение механической задачи приводило к математической задаче, еще не разрешенной в методе флюксий, и тогда само исчисление флюксий обогащалось новыми вопросами и развивалось на решении их. Во многих случаях этого рода приходится сожалеть о том, что Ньютон не прибегает здесь к исчислению флюксий и к его обозначениям, которые он, однако, должен был бы в таком случае предварительно изложить. Но когда лейбницевы диференциальное и интегральное исчисления, а затем и ньютоново исчисление флюксий стали известными, постепенный перевод на язык этих исчислений не мог представить уже больших затруднений. Это, в свою очередь, способствовало развитию новых исчислений. Чаще всего дело обстояло так, что геометрические доказательства Ньютона находили слишком трудными и результаты Ньютона передоказывались средствами диференциального и интегрального исчисления; при этом, однако, не замечали, что полученное доказательство по существу совпадает с ньютоновым, представляя лишь его перевод на язык диференциального и интегрального исчисления, т. е. по существу представляет обратный перевод доказательств Ньютона на язык тех аналитических операций, которые Ньютон проделывал в форме исчисления флюксий.

В силу всех этих соображений в настоящей книге, в которой прикладная математика сама по себе находится лишь на заднем плане, „Начала" являются одним из трудов, требующих самого обстоятельного разбора.

После издания „Начал" Ньютон получил в своем отечестве известность. В 1689 г. он был избран членом парламента от университета; кандидатура его была выставлена вигами, к числу которых он в то время принадлежал. Когда парламент признал Вильгельма Оранского королем Англии, он побудил и университет признать новое правление. Вообще говоря, однако, Ньютон как в политическом отношении, так и особенно в церковных вопросах (он был приверженцем епископальной церкви) был консервативен. Неудивительно поэтому, что позже, когда борьба шла уже не с католиками, мы находим его в парламенте среди тори. Как тори он был против претензий Ганновера на престолонаследие, за которые со стороны Ганновера боролся Лейбниц; это, конечно, могло лишь усилить начинавшую тогда расти взаимную неприязнь между обоими великими математиками. К религиозным вопросам Ньютон проявлял большое рвение. Он тщательно изучал богословие, о чем свидетельствует как переписка его с философом Локком, так и собственные богословские сочинения Ньютона, среди которых имеются — так же как у Штифеля и Непера — работы о пророчествах Даниила и откровении Иоанна.

В 1696 г. Ньютон поступил на службу на лондонский монетный двор; в 1699 г. он стал там заведующим. В этой должности он приобрел большие заслуги введением полноценной монеты

Служба эта требовала у Ньютона очень много времени. Однако еще больше утомлял его, при его особой чувствительности к подобным вещам, разгоравшийся между его приверженцами и приверженцами Лейбница спор о приоритете в деле создания нового исчисления бесконечно-малых — спор, в котором оба великих человека принимали как косвенное, так и прямое участие. В этом споре Ньютон, конечно, совершил тоже много ошибок, главным образом, участием в том, что писали другие о Лейбнице. Сам он признал еще во 2-м издании своих „Начал" (1713), что Лейбниц в 1677 г. обладал методом исчисления бесконечно-малых, подобным его собственному; при этом Ньютон совершенно не касался вопроса о том, в какой мере Лейбниц мог быть обязан своими достижениями сообщениям самого Ньютона или сведениям о его работах, полученным от других лиц. Позже, когда появилось обвинение, что, наоборот, Ньютон был обязан своим методом сообщениям Лейбница, Ньютон в 3-м издании выбросил всякое упоминание о Лейбнице и ограничился указанием на то, что сам он владел примененными им методами еще ранее.

Если не говорить об этой борьбе, в которой слишком большую роль играла его подозрительность, то Ньютона никак нельзя заподозрить в высокомерии. Он искренне ценил своих предшественников, на работе которых он основывался, и сравнивал свои собственные открытия с раковинами, которые ребенок находит на берегу большого моря, исследование которого должно быть делом будущего. В денежных делах он отличался щедростью. О том, что он продолжал математическую работу, свидетельствует его участие в издании в 1704 г. „Оптики" с двумя дополнениями, из которых одно посвящено кривым 3-го порядка, а другое содержит сочинение о квадратуре кривых. Он принимал также участие во 2-м издании своей „Всеобщей арифметики" и во 2-м издании „Начал" (1713), которое редактировал его ученик Котес, но лишь договорившись с самим Ньютоном обо всех изменениях, и в 3-м, которое редактировал Пембертон. Из работ Ньютона упомянем еще появившееся в 1711 г. сочинение „Разностный метод" („Methodus differentialis"), посвященное интерполяциям высших порядков.

Ньютон уже вполне владел своими могущественными методами и большим количеством полученных при помощи их результатов, когда немцы после тридцатилетней войны снова начали принимать деятельное участие в развитии математики. Правда, им пришлось искать учителей и импульсы в западных странах; но зато один из них сравнялся с этими учителями и в деле создания исчисления бесконечно-малых, которому он придал сохранившийся и доселе внешний вид, оказался соперником самого Ньютона.

Прежде чем перейти к нему, упомянем о Вальтере Чиргаузе (Walther von Tschirnhaus, 1651—1708). Чиргауз происходил из моравско-богемского дворянского рода и родился в Герлице в Саксонии; воспитывался он в своем родном городе и самостоя-

тельно занимался здесь математикой. С 1668 г. он продолжал свои занятия в Лейдене. Они, однако, были прерваны чумою и войною; в войне против Франции ему пришлось самому принять участие. Во время своих многочисленных путешествий он познакомился, с одной стороны, с философами, как, например, со Спинозой, с другой — с математиками, как, например, с Гудде, Гюйгенсом, Ньютоном, Коллином и Ольденбургом; в частности, в 1675 г. он был вместе с Лейбницем в Париже, где позже, в 1682 г. стал членом Академии наук. В том же году он вернулся на родину и женился; вскоре после этого он вступил во владение имениями своего отца; несмотря на заманчивые предложения из-за границы, он остался на родине.

Здесь им были открыты индустриальные предприятия, пострадавшие, однако, от вторжения Карла XII. Математические его работы, находящиеся в трудах Парижской академии и в издававшемся с 1682 г. в Лейпциге журнале „Acta Eruditorum" („Труды ученых"), свидетельствуют об уме находчивом, но нередко слишком поспешном в утверждениях, оказывавшихся потом неправильными.

Обращаемся теперь к Готфриду Вильгельму Лейбницу (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716), имя которого одно из самых крупных в истории математики, в такой же мере принадлежит и философии, и который выполнял важные дипломатические поручения, предпринимал обширные и капитальные исторические исследования и в некоторой степени проложил путь таким новым дисциплинам, как политическая экономия и сравнительное языковедение.

Лейбниц родился в Лейпциге. Отец его, нотариус и профессор морали, умер уже в 1652 г., мать — в 1664 г. Ребенком он жадно проглатывал книги в библиотеке своего отца, особенно древних авторов. Уже тогда зародился у него интерес к логике и возникла мысль об алфавите, символизирующем человеческие мысли. В 1661 г. он поступил в университет своего родного города, где изучал юридические науки, но наряду с ними также Аристотеля и Декарта, между воззрениями которых он сначала колебался. Декартово механическое объяснение природы одержало верх, и это увеличило уже проснувшийся в нем интерес к математике. Этим предметом он занимался и во время своего пребывания в Иене. В 1666 г. он получил должность доцента благодаря своей „Диссертации о комбинаторном искусстве" („Dissertatio de arte combinatoria"), в которой Лейбниц стремится вывести общие правила для редукции составных понятий и устанавливает табличную схематизацию всех наук; как дополнение содержала она математическое доказательство существования бога.

В 1667 г. Лейбниц, получивший к этому времени в Альтдорфе степень „доктора обоих прав" (doctor juris utriusque), познакомился в Нюренберге с Бойнебургом (Boineburg), бывшим политическим деятелем, который отнесся к нему с большой сим-

патией и с которым он уехал во Франкфурт. Под влиянием Бойнебурга Лейбниц заинтересовался политикой, в частности, церковной политикой, что сказалось позже в его стремлениях снова объединить католическую и протестантские церкви, или, так как это не удавалось, хотя бы последние. Во время своего пребывания во Франкфурте Лейбниц написал в 1671 г. работу относительно учения о движениях, одну часть которой — о конкретном движении — переслал Королевскому обществу, что повело к его переписке с Ольденбургом; вторую часть — об абстрактном движении — он отослал в Парижскую академию. Как мало владел еще тогда Лейбниц механикой, видно из того, что он в том же году думал, что нашел perpetuum mobile. В более зрелом возрасте он, в согласии со своим учением о сохранении живой силы, рассматривал как perpetuum mobile всю вселенную.

Кругозор Лейбница расширялся, когда он в следующем году приехал в Париж в качестве дипломатического посланника курфюрста майнцского. Он имел поручение действовать так, чтобы по возможности вызвать со стороны Франции нападение на Египет, и, как результат этого, войну между Францией и Турцией, которая отклонила бы от Германии честолюбивые взоры Людовика XIV. Это не удалось; но зато пребывание в Париже привело Лейбница в соприкосновение с французской наукой, переживавшей тогда один из самых блестящих своих периодов. Сверх того в 1673 г. он получил случай совершить непродолжительную поездку в Англию, где в это время начинался неменьший расцвет науки. С Ольденбургом он был уже здесь знаком, и ему была предоставлена возможность продемонстрировать Королевскому обществу арифмометр, изобретенный им после ознакомления с паскалевым. Так как Лейбниц уже начал заниматься бесконечными рядами, то для него имело особое значение знакомство с относящимися сюда исследованиями Меркатора. Коллина в Лондоне в это время не было, так что Лейбниц не имел возможности просмотреть хранившееся у него значительно более широкое по охвату сочинение Ньютона, касавшееся тех же вопросов. Пребыванием в Лондоне Лейбниц воспользовался также и для того, чтобы достать себе лекции Барроу, на которые Ольденбург еще раньше обратил его внимание. Доказательством того, что сам он произвел на английских ученых хорошее впечатление и вступил с ними в тесную связь, служит факт избрания его вскоре по возвращении его в Париж членом Королевского общества.

В Париже Лейбниц вскоре после этого близко познакомился с Гюйгенсом, бывшим тогда председателем Академии. Мастерство этого ученого в нахождении для каждого отдельного инфинитезимального исследования особых подходящих именно к этому случаю приемов служило, конечно, для Лейбница немалым импульсом в его стремлениях найти, наоборот, общие установки и средства, которые охватили бы эти исследования единообразными и общими правилами. Он знал сверх того инфинитезималь-

ные работы Кавальери и Григория, а Гюйгенс обратил его внимание на исследования, оставленные Паскалем. Последние возбудили живой интерес Лейбница, послуживший, вероятно, импульсом к тому, что он, как уже было упомянуто, раздобыл у семьи Паскаля его рукопись учения о конических сечениях. Быть может, через семью же Паскаля он познакомился с янсенистом и картезианцем Арно (Arnauld), с которым находился впоследствии в оживленной переписке. Во время пребывания в Париже Лейбниц часто виделся со своим старым товарищем и соотечественником Чирнгаузом, приехавшим в 1675 г. из Лондона и привезшим оттуда много математических новостей.

Все эти обстоятельства представляют особый интерес потому, что как раз в это время Лейбниц положил основание своему диференциальному и интегральному исчислению. Роль разжегшей огонь искры сыграл для Лейбница, как он сам вспоминает через много лет в одном из писем, применявшийся Паскалем безгранично уменьшающийся треугольник, стороны которого стремятся к нулю, в то время как отношения их имеют определенные предельные значения, получаемые из подобного треугольника. Лейбниц был наведен этим на мысль применить такой треугольник—свой так называемый характеристический треугольник — к совершенно общей задаче нахождения касательной, и таким образом он уже в 1673 г. выработал, исходя из этого, общий метод касательных. Вскоре после этого он обратил также внимание на взаимно обратную связь между операциями, через некоторое время получившими название диференцирования и интегрирования, и заметил, что он обладал в них средством сводить так называемые обратные задачи на касательные к квадратурам. Но это есть то же самое, чему ясно и определенно учил в своей упомянутой выше книге Барроу и что он применял к большому количеству задач; далее метод касательных Лейбница по существу не отличался от метода Ферма, хотя тот был обоснован иначе; даже в принципах, например в употреблении характеристического треугольника, он был близок к тому методу, который сообщает Барроу в написанном под влиянием Ньютона дополнении. Что касается этих совпадений, то никто не может судить о влиянии, которое мог испытать Лейбниц при беглом просмотре книги Барроу, обстоятельнее проштудированной им, по его собственным словам, лишь в 1675 г., когда он уже сам продвинулся вперед достаточно далеко. Занятый развитием своих мыслей, он, вероятно, как это естественно для математика при его самостоятельной работе, медлил обращаться за советом к другим, пока он сам не пришел к определенному заключению Против этого ничего нельзя сказать; упрекнуть Лейбница можно лишь за то, что, проштудировав в конце концов Барроу, он не вполне оценил его по заслугам. Из того, как в письмах к Ньютону, другу Барроу, он отмечает свое собственное решение обратных задач на касательные, видно, что он не заметил даже, что Барроу вполне владел и пользовался тем же методом. Извинением

Лейбницу служит то, что, будучи занят своей установкой, он в то же время был проникнут ясным сознанием, что может дать гораздо большие результаты, чем те, что были уже получены им самим и Барроу.

И в этом Лейбниц был прав. В некотором отношении он даже сделал уже шаг вперед. Во время своего пребывания в Париже он разбирал с Чирнгаузом вопрос о методе нахождения кривых, поддающихся квадратуре, и, как выяснилось из позднейшей полемики, он получал уравнения этих кривых как раз с помощью операции, получившей вскоре название диференцирования; он, следовательно, отдавал себе отчет, что диференцирование есть первоначальная операция, на которой надо строить обратную ей квадратуру, или интегрирование. Мы знаем, правда, что Ньютон уже десятью годами раньше обладал пониманием этого, что видно из труда его, хранившегося у Коллина; характерным для Лейбница является однако, то, что он, в полном согласии с общими своими научными устремлениями, пользуется особой символикой, и связывает с нею определенные правила, не только относительно того, как вывести результат каждой отдельной требуемой операции (главным образом диференцирования), но и как в простых случаях, из которых составляются более сложные, этот результат непосредственно записать. Таким образом эти операции превращаются в особого рода исчисление, доступное также и тем, кто по своему математическому уровню стоял значительно ниже крупных ученых, которые до тех пор одни могли выполнять эти исследования. Из относящихся к тому времени бумаг Лейбница видно, что он упорно стремился тогда к развитию такой системы. Даже символы d и $\int$, позднейшие знаки диференцирования и интегрирования, имеются уже в этих бумагах, хотя употребляются они и не совсем так, как позже.

Таково было положение вещей, когда в 1676 г. при посредничестве Ольденбурга началась упомянутая выше переписка Лейбница с Ньютоном (стр. 65). Мы видим, что Лейбниц сам продвинулся достаточно далеко, чтобы не считать себя обязанным Ньютону тем, что давало его диференциальному и интегральному исчислению особую ценность; но, с другой стороны, оказывается, что он был достаточно знаком с подобного рода исследованиями и достаточно интересовался ими, чтобы понять значение важных результатов, сообщенных Ньютоном. О способе их нахождения Ньютон в первом письме дал, правда, немного разъяснений; но, по настоянию Лейбница, он добавил их во втором письме; в то же время Лейбниц при своем непродолжительном посещении Лондона имел случай сделать выписки из хранившегося у Коллина „Анализа" Ньютона и таким образом подробно познакомиться с общей трактовкой затронутых в письме Ньютона вопросов. Речь здесь идет, конечно, — если не говорить о том, что скрыто в анаграммах, — не о прямом изложении методов, соответствующих у Ньютона диференцированию и интегри-

рованию, но о тесно связанном с ними разложении в ряды; в совокупности своей все это должно было решительно содействовать существенному обогащению системы, построением которой Лейбниц был со своей стороны занят. В одном важном пункте это делало даже почти прямой вклад в эту систему, так как расширенную формулу бинома Ньютона можно непосредственно превратить в лейбницево правило диференцирования корней. Правило это, которому он впоследствии придавал большое значение, он нашел как раз в это время, таким образом, наверное, не без влияния сообщений Ньютона. Для Лейбница могло также послужить импульсом к дальнейшему развитию его собственного метода полученное им тогда из Лондона сообщение, что „Ньютон обладает методом, посредством которого можно, исходя из уравнения кривой, без большого труда решать совершенно общим способом задачи на касательные, и который, собственно, есть часть еще более общего метода, позволяющего решать и другие задачи — нахождение кривизны кривых, площади, длины дуги, центра тяжести и т. д.". Все эти сообщения так хорошо подходили к методу, обоснованием которого он был занят сам, что он должен был почувствовать в себе новую энергию для продолжения работы. Он сам ушел в этих вопросах так далеко, что на последнее письмо Ньютона, в котором тот упоминает о существовании своего метода, но скрывает его основные правила в анаграммах, он смог сейчас же ответить полным разъяснением простейших правил диференцирования и их ближайших применений. Он высказал при этом предположение, что этот метод совпадает с методом Ньютона.

Несмотря на формальные различия, это так и было. Именно поэтому сообщение Лейбница не содержало ничего поучительного для Ньютона, который увидел теперь, что ему также нет больше надобности разъяснять Лейбницу свой метод. Вместе с тем Ньютон, вследствие особенностей своего характера, о которых мы выше говорили, потерял и сам интерес к дальнейшей его разработке, а также охоту к дальнейшей переписке с Лейбницем и углубился в другие свои исследования.

Лейбниц, со своей стороны, был также слишком загружен другими занятиями, чтобы сейчас же обработать свое диференциальное исчисление до такой степени, которая позволила бы опубликовать его. В 1676 г. он был приглашен в Ганновер в качестве заведующего герцогской библиотекой. По пути он имел случай встретиться в Амстердаме с Гудде и поближе узнать его метод касательных, а также познакомиться с философом Спинозой, в учение которого он был посвящен еще в Париже Чирнгаузом, не соглашаясь, однако, с ним. Только в Ганновере он получил упомянутое выше второе письмо Ньютона и ответил на него. Рукописи Лейбница свидетельствуют, что и первое время в Ганновере он также не оставлял ни работы над методом касательных, ни общих математических исследований. Среди последних „Новое продвижение алгебры" („Nova algebrae promo-

tio") содержит зародыши теории детерминантов. Частично математические работы Лейбница шли рука об руку с философскими. Это относится, например, к написанному в 1679 г. его сочинению „Геометрическая характеристика" („Characteristica geometrica"), которое мы в дальнейшем рассмотрим ближе. Из Ганновера Лейбниц вел также обширную переписку с мыслителями всех стран, благодаря которой его философские мысли, по его собственному свидетельству, достигли к 1685 г. зрелости, удовлетворявшей его самого.

В то же время Лейбницу приходилось выполнять большие работы, возлагавшиеся на него его должностью и пригласившим его двором. Он был советником этого двора в экономических вопросах, в частности, в вопросах, относящихся к горной промышленности; вторжение Людовика XIV в Германию давало предмет для политических мемуаров; но особенно много времени отняла у него задача написать историю дома Вельфов. Необходимые для этого архивные изыскания были ближайшим поводом к большому путешествию на юг (1687—1690), во время которого Лейбниц посетил между прочим Вену и Рим.

Еще до этого путешествия он начал печатать в выходившем в Лейпциге с 1682 г. журнале „Acta Eruditorum" математические сочинения, в которых впервые было опубликовано его диференцирование и интегрирование. Вызваны они были прежде всего, быть может, тем, что Чирнгауз в одной статье применил такие методы нахождения допускающих квадратуру кривых, которые некогда были предметом их парижских бесед. Эта работа непосредственно побудила Лейбница к написанию сочинения „О нахождении размерностей фигур" („De dimensionibus figurarum inveniendis"), в котором он показывает, что то, к чему стремится Чирнгауз, достигается как раз диференцированием. Правила этой операции были изложены вскоре в мемуаре „Новый метод нахождения максимумов и минимумов, а также касательных, которому не служат помехой ни дробные, ни иррациональные количества, и особый для этого род исчисления". „Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus", 1684).

Далее, в 1686 г. среди других работ появилось сочинение „О скрытой геометрии и анализе неделимых и бесконечных (величин)" („De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum"), в котором впервые встречается знак интеграла. Словом „интеграл" Лейбниц стал пользоваться, однако, лишь после того, как его ввели в употребление братья Бернулли.

Следующие номера содержали новые сочинения Лейбница, в которых, с одной стороны, его новые методы получали дальнейшее развитие, с другой — выявлялась возможность их многочисленных приложений к вопросам не только геометрического и чисто математического, но и механического характера. Богатый материал для этих приложений Лейбниц должен был найти

в уже вышедших тогда „Началах" Ньютона. Так как он сам обладал теперь диференциальным и интегральным исчислениями, совпадавшими с исчислением флюксий, то ему не могло создавать больших трудностей то обстоятельство, что у Ньютона применения метода флюксий не выступали непосредственно; напротив, Лейбницу было бы легко проверить интересовавшие его результаты и исследования, сообщенные в геометрической форме, посредством найденного им самим алгорифма исчисления бесконечно-малых. Лейбниц, находившийся тогда в путешествии, не сразу, правда, получил пересланный ему экземпляр „Начал", но сперва только помещенное в „Acta Eruditorum" изложение его содержания. Но его он прочел с огромным интересом и применил затем свой собственный метод исчисления бесконечно-малых, чтобы доказать в 1689 г. сообщенные здесь главные результаты в статье, появившейся в том же журнале. В связи с этим он сделал попытки физически объяснить притяжение.

Применения исчисления бесконечно-малых, принадлежащие самому Лейбницу, ни по числу своему и разнообразию, ни по объему и значению не могут сравниться с исследованиями, находящимися в ньютоновых „Началах". Эти исследования по самой природе своей, как уже было отмечено, являются чисто инфинитезимальными, хотя они и не могли быть представленными в виде приложений готового метода исчисления, так как Ньютон не опубликовал такового; как раз это обстоятельство содействовало тому, что Ньютон оставался здесь почти в полном одиночестве; современники его могли, правда, понимать его важнейшие выводы, но не получали от него средств производить те или иные исследования сами. Все богатства, скрытые в „Началах", вряд ли до сих пор полностью извлечены из них. Лейбниц, напротив, сразу смог создать школу, так как он начал с изложения своего метода, и притом с такого изложения, что метод этот в руках других современников, особенно братьев Бернулли, тотчас же превратился в весьма полезное орудие. С братьями Бернулли и другими математиками, в том числе с упоминавшимся выше французом Лопиталем, Лейбниц находился в оживленной переписке и с интересом следил за их работами. Они давали друг другу импульсы, ставя различные вопросы и сообщая найденные ими решения тех или иных задач. Все это попадало потом и в более широкие круги, главным образом через Acta Eruditorum.

Одною из таких задач была задача о так называемой брахистохронной кривой; Лейбниц сделал замечание, что кроме его самого и тех, кто подобно братьям Бернулли и Лопиталю, обладали его методами, эту задачу смогли бы решить, вероятно, лишь немногие другие — Гюйгенс, если бы он был жив, Гудде, если бы он еще занимался подобными исследованиями и, наконец, Ньютон. Последний дал ответ с указанием, что эта кривая — циклоида. И сам Ньютон и его друзья чувствовали себя, однако, повидимому, обиженными той формой, в которой Лейбниц сде-

лал свое замечание, так как Лейбниц, казалось, забыл о том, что он сам раньше всех других должен был бы знать о находившемся еще ранее в распоряжении Ньютона подобном и столь же могущественном методе. Эта обида толкнула приверженцев Ньютона на шедшие значительно дальше выпады против Лейбница, вплоть до обвинений в плагиате. Непрерывно растущее взаимное недоверие, сопутствующее таким обвинениям, и услужливое усердие друзей обоих ученых содействовали тому, что возникший теперь спор о приоритете в создании исчисления бесконечно-малых приобрел чрезвычайную остроту. На этом споре, который мог бы вскрыть нам некоторые слабости обоих великих людей, мы, однако, не считаем нужным останавливаться, даже совершенно независимо от того, что он имел место лишь в XVIII в. Фактические данные, выявленные во время этого спора, и результаты исторических исследований позднейших времен устанавливают, что мы обязаны многим и тому и другому из противников. Кого из этих двух людей поставить выше — зависит от того, ценить ли выше открытие глубоких математических истин, лежащих в основании обоих общих методов, или выработку и легко доступное изложение техники, тотчас же давшее метод в руки и других способных математиков и мало-помалу сделавшее ее доступным даже и таким людям более практического склада, которые не обладают особенно глубоким пониманием математики или интересом к ней.

Лейбниц, снова продолжавший в Ганновере по возвращении из путешествия (1690) свои философские и упомянутые здесь математические работы, занимался также вопросом об общей организации научной деятельности и набросал план Всемирной академии. Учредить ее ему, правда, не удалось, но все же — после того как в 1700 г. он был избран членом Парижской академии — он в том же году стал основателем Академии в Берлине. Лейбниц был вызван туда как для этой, так и для других научных целей курфюрстом Фридрихом III, женившимся на ганноверской принцессе. Из Берлина Лейбниц вскоре вернулся в Ганновер, где снова занялся политической деятельностью. Особенно много энергии проявил он в 1713 г., в деле поддержки курфюрста ганноверского, когда тори в Англии старались лишить его принадлежавшего ему права на престолонаследие. Это обстоятельство, как мы уже видели, не могло улучшить его отношений с Ньютоном. Когда курфюрст действительно вступил в 1714 г. на английский престол под именем Георга I, Лейбниц, однако, лишился министерства; последние два года своей жизни он провел в Ганновере, покинутый и притом больной.

Личных свойств Лейбница и его большого значения в разных областях, в частности как философа, мы можем коснуться здесь лишь в той мере, в какой это связано со свойствами, которые он проявил как математик, и с его математическими работами. То обстоятельство, что он действительно мог в такой степени выдаваться в стольких разнообразных отношениях, обус-

ACTA ERUDITORUM
ANNO MDCLXXXII
publicata,

ac

SERENISSIMO FRATRUM PARI,

DN. JOHANNI GEORGIO IV,
Electoratus Saxonici Hæredi,

&

DN. FRIDERICO AUGUSTO,
Ducibus Saxoniæ &c.&c.&c.

PRINCIPIBUS JUVENTUTIS

dicata.

Cum S. Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Electoris Saxoniæ Privilegiis,

---

LIPSIÆ,

Proftant apud J. GROSSIUM & J. F. GLETITSCHIUM.

Typis CHRISTOPHORI GüNTHERI.

Anno MDC LXXXII.

Титульный лист первого номера журнала «Acta Eruditorum» 1682 г.

ловлено прежде всего большой гибкостью его гения, позволявшей ему брать мысли из самых различных областей и приводить их во взаимную тесную связь; далее, здесь играли роль его спекулятивное глубокомыслие и упорная настойчивость, с которой он путем неутомимой работы доводил свои мысли до полного развития. Его необыкновенная память помогала ему в этом.

Только что упомянутая гибкость, к приобретению которой ему уже рано дала случай его профессия дипломата, а к дальнейшему развитию — его частые соприкосновения с высокопоставленными особами, могла иногда проявляться как не особенно приятная черта характера; но в интеллектуальной области она имела громадное значение. Прежде всего она обусловливала огромную восприимчивость. Сам Лейбниц говорит, что он видал мало людей и мало книг, из которых он не умел бы извлечь пользы. Далее он был в состоянии так обработать весь этот воспринятый им материал и так приобщить к своему собственному ходу мыслей, что материал этот становился полною его собственностью. Наконец, он мог придать развитым таким образом мыслям форму, в которой они оказывались понятными и плодотворными.

Вместе с тем та же восприимчивость Лейбница проявляется и в присущем ему эклектизме, сказывающемся в самых разнообразных областях. В области церковной политики Лейбниц пропагандирует слияние церквей. В области философской он стремится объединить мировоззрения, столь различные, как телеологическое, в котором все объясняется целью, которой служит происходящее, и механическое, в котором все объясняется причинами, вызывающими явления. Лейбниц перерабатывал в себе взгляды различных направлений таким образом, что он воздает должное каждому в отдельности и старается с большой гибкостью найти формулу, в которой все они в конце концов могли бы быть объединены. Ища таким образом везде лучшее и сглаживая противоречия, он становится оптимистом, который в „Теодицее“ не только верит в то, что все в мире устроено к лучшему, но и хочет доказать это.

Те же свойства Лейбниц проявляет и как математик. Восприимчивость его сказывается в быстроте, с которою он повсюду усваивает лучшее, что было сделано до него в исчислении бесконечно-малых. Яркий пример ее мы видим в том, как в своем ответе на первое письмо Ньютона Лейбниц, с одной стороны, выказывает умение тотчас же применить методы, на которые тот только сделал намек, и расширить сообщенные ему результаты, а с другой — обращается к Ньютону за справками как раз о том, что действительно требует более подробного объяснения. При этом включение всего усвоенного Лейбницем в его собственную систему происходит так быстро, что он совершенно не замечает, например, как много сделал уже Барроу, а при позднейших спорах он сам уже, конечно, не сознает, сколь многим он был обязан Ньютону при образовании своей системы. Очень ярко проявляется гибкость Лейбница и в том, как он умеет предста-

вить свои методы в такой форме, что ими сейчас же могут воспользоваться и другие; делается это им вполне сознательно. Восприимчивость Лейбница и уменье его путем переработки воспринятого от других создавать новое сказываются также в том, как он устанавливает в механике принцип живой силы. Еще раньше, благодаря Декарту, внимание его было обращено на механическое объяснение природы; но, тогда как Декарт, пользуясь им, пришел к результату, что раз существующее количество движения, т. е. сумма произведений масс на скорости, должно оставаться неизменным, и нашел подтверждение этого в ударе твердых тел, Лейбниц, на основании математических исследований Гюйгенса об ударе упругих тел и о центробежной силе, пришел к другому выводу. Гюйгенс, так же как отчасти и Галилей, исходит из того, что неизменной остается сумма произведений масс на высоты падения, которые сообщили бы им их скорость, т. е. то, что мы теперь называем энергией, или сумма произведений масс на квадраты скоростей, именуемая Лейбницем „живой силой". Лейбниц в чисто механическом отношении не выходит за пределы того, что с такой ясностью сознавал уже Гюйгенс. Но что здесь принадлежит самому Лейбницу, — это желание распространить закон на все области. Там, где его справедливость нельзя непосредственно доказать механически, как, например, при ударе неупругих тел, он чувствует себя убежденным в том, что кажущаяся потерянной живая сила должна продолжать свое существование в колебаниях молекул. Основание этого его убеждения имеет, правда, телеологический характер и исходит из его веры в целесообразное устройство вселенной. Но само его в высшей степени смелое утверждение представляет собою не что иное, как общий закон сохранения энергии, который мы теперь можем установить путем доказательства перехода энергии из одной формы в другую — в движение, теплоту и т. д. Лейбниц идет даже еще дальше, желая перенести этот закон по аналогии и на душевную жизнь.

Мы имеем здесь пример стремления Лейбница дать тому, что оказалось полезным при некоторых математических исследованиях, значительно более общее и широкое значение. Как раз на том обобщении, состоящем в установлении определенных правил, охватывающих все те операции, которые математика раньше применяла по отдельности к решению, повидимому, различных задач, и основано большое значение Лейбница как математика, причем важно здесь не только то, чего он сам достиг таким образом, но и пример, даваемый математикам позднейшего времени. Как мы уже видели, говоря об его расширении понятия „живой силы", его обобщения, или по крайней мере попытки их, часто далеко выходят за границы математики. Упомянутая выше удивительная способность Лейбница усваивать чужие мысли как раз и объясняется тем, что он сразу становился на более общую точку зрения. Это стремление

к обобщениям было присуще ему уже очень рано; оно проявляется уже в самых первых его сочинениях.

Как тогда, так и много позже Лейбниц стремился даже выразить общие правила всякого логического мышления на общем языке, который должен был бы соответствовать алгебраическому; с применимостью последнего в тех широких формах, какие ей дал Декарт, Лейбниц был рано знаком. Подобно тому, как Декарт оперирует с уравнениями, образуя путем преобразования и комбинации их новые уравнения, Лейбниц хотел оперировать с тождествами в логике. В связи с этим вместо закона противоречия, которое в аристотелевой логике равнозначаще с доказательством от противного античной геометрии, Лейбниц вводил закон тождества, соответствующий математической операции с уравнениями. Правда, Лейбницу не удалось полностью осуществить свое намерение создать общую символику для логических операций. Но он сумел в своем сочинении „Геометрическая характеристика" („Characteristica geometrica") создать такую символику для синтетической геометрии; то, что и для своих инфинитезимальных исследований он выработал такую символику, которая не только давала возможность легко обозреть проделанное, но при определенных правилах исчисления легко могла быть применена и другими, также является ценным плодом этих его широких стремлений. Надо заметить, что если теперь, повидимому, оказываются осуществленными и его более общие намерения, то это частично основывается на том, что теперь не довольствуются тем, чтобы изображать символами тождества, соответствующие уравнениям, но принимают во внимание и такие суждения, которые утверждают, что некоторый класс заключается в другом более общем классе, и таким образом соответствуют математическим неравенствам.

Далее, Лейбниц устанавливает как внутри математики, так и вне ее принцип непрерывности. То, что именно он должен был придавать в математике значение непрерывности, является вполне естественным, так как непрерывное изменение функции служит необходимым — хотя, как мы теперь знаем, и недостаточным — условием ее диференцируемости. Та же непрерывность, т. е. постепенные переходы без скачков, должна, по мнению Лейбница, существовать также и в природе, если математика применима к ней, и Лейбниц, верящий в гармонию и разум вселенной, хочет поэтому видеть непрерывность повсюду. То, что имеет силу по отношению к движущемуся телу, должно иметь силу также тогда, когда скорость тела равна нулю, т. е. оно находится в покое; то, что имеет место при ударе двух любых неравных шаров, должно иметь место также и тогда, когда шары равны, и т. д.

Величины, свойства и законы, которым мы приписываем непрерывность, не могут, очевидно, быть сложными, так как тогда все определения границ внутри их были бы произвольными. Между тем вселенная представляет собою нечто сложное. Это

заставляет Лейбница притти к его учению о монадах, учению об индивидуумах. На свойствах, которые он приписывает этим монадам, мы не можем здесь подробно останавливаться. Укажем только, чтобы предупредить возможное недоразумение, что его монады представляют противоположность диференциалам в том отношении, что они обладают определенно ограниченной индивидуальностью, тогда как граница диференциала внутри континуума, в котором он берется, является текучей. При этом, однако, с одной стороны, диференциал, получая обозначение, выступает в исчислении в роли индивидуальной величины, а с другой — Лейбниц хочет установить некоторую непрерывность и среди монад, принимая, что они сами составляют столь бесконечно плотно следующий друг за другом ряд, что можно перейти без скачка от свойств одной к свойствам другой.

Мы уже упомянули братьев Бернулли (Bernoulli) как ученых, тотчас же применивших лейбницево исчисление бесконечно-малых и тем способствовавших его развитию, содействовавших дальше непосредственно выработке самих методов и, наконец распространивших их и передавших многочисленным последователям. Братьев Бернулли приходится называть вместе не только потому, что старший—Яков. овладевший этими методами раньше, был учителем младшего — Иоганна, но и потому, что они до некоторой степени работали совместно даже и тогда, когда бурный спор между ними дошел до открытой схватки, причем каждый из них прежде всего стремился к тому, чтобы показать свое превосходство в трактовке одних и тех же вопросов.

Бернулли принадлежали к протестантскому роду, перебравшемуся во время религиозных гонений Альбы в Нидерландах в Базель. Здесь отец их был членом городского совета. Яков Бернулли (Jakob Bernoulli, 1654—1705) сперва по желанию своего отца сделался теологом, но вместе с тем тайком он занимался математикой. Во время путешествия, предпринятого им в 1676 г., попал он, между прочим, в Бордо, где добывал себе средства частными уроками. Здесь он составил таблицы для солнечных часов. В 1681 г. он был снова в Базеле и написал теорию комет. Во время путешествия в Нидерланды и Англию Яков Бернулли познакомился с тамошними математиками. По возвращении он читал в Базеле лекции по экспериментальной физике и в 1687 г. стал в университете профессором математики. В 1691 г. он едва не был лишен этого места за борьбу свою с некоторыми злоупотреблениями. В 1687 г. он проштудировал относившуюся к 1684 г. статью Лейбница по механике и после этого обратился в письменной форме к самому Лейбницу с вопросами относительно его нового метода; письмо это, однако, дошло до Лейбница только по возвращении его в Ганновер в 1690 г.; к тому времени Яков Бернулли уже сам справился со своими затруднениями и в помещенной в „Acta Eruditorum" работе, в которой впервые встречается слово „интеграл", применил новые методы к изохронной кривой. Он продолжал затем в ряде статей приме-

нять их к различным вопросам как геометрии, так и механики. Из учеников его надо назвать, кроме его брата Иоганна, также Николая Бернулли — сына другого брата — и Павла Эйлера — отца великого математика Леонарда Эйлера. Так как в споре между братьями утверждения одного часто прямо-таки противоречат утверждениям другого даже в отношении фактов, то надо отметить, что Яков Бернулли славился своей откровенностью и правдивостью; однако его горячность и раздражительность, связанные в позднейшие годы с его слабым здоровьем, немало содействовали обострению спора.

Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli, 1667—1748) сперва готовился стать купцом, но потом под руководством брата занялся математикой, а также, по совету его, медициной; в 1690 г. он получил лицензию на врачебную практику. После этого он отправился путешествовать и, в частности, задержался в Париже, где он и учился и преподавал сам. Одним из его учеников здесь был уже упомянутый, несколько старший его маркиз де-Лопиталь, для которого он составил записки, во всяком случае содержавшие интегральное исчисление, изданное им, однако, только в 1742 г. Мы уже упоминали (стр. 52) о шатком обвинении, выставленном Иоганном Бернулли против Лопиталя спустя долгое время после его смерти, в том, что тот в своем изложении диференциального исчисления в „Анализе бесконечно-малых" („Analyse des infiniment petits") будто бы пользовался его записями; упоминали мы (стр. 46) и о том, что благодаря Вариньону для Бернулли были открыты страницы „Journal des Savants".

В 1692 г. Иоганн Бернулли вернулся в Базель, где в 1694 г. стал доктором медицины. В следующем году он по рекомендации Гюйгенса получил в Гренингене место профессора физики. В 1705 г. он снова вернулся в Базель, где сперва при содействии своего тестя он получил профессуру по греческому языку, а затем в том же году, после смерти брата, по математике. Среди многочисленных и выдающихся базельских его учеников надо назвать троих его собственных сыновей, но прежде всего Леонарда Эйлера (Leonhard Euler). Профессуру эту он сохранил до смерти.

Иоганну Бернулли как врачу принадлежат ценные работы по физиологии; но наибольшее значение имеют его многочисленные математические статьи, рассеянные в „Acta Eruditorum", „Journal des Savants" и других журналах. Наряду со статьями его брата они способствовали тому, чтобы выработать форму и обогатить содержание диференциального и интегрального исчислений и расширить область их применения. Работы обоих братьев были собраны и изданы в 1742 и 1744 гг. Крамером (Cramer). Оба брата, особенно Иоганн, были членами многих научных обществ и находились в сношениях с наиболее выдающимися математиками всех стран.

Спор между братьями возник в 1694—1695 гг., перед тем, как Иоганн переселился в Гренинген, и, вероятно, имел причиной,

наряду с чисто личными обстоятельствами, взаимную зависть и недостаточно обоснованное выдвигание младшим братом своих заслуг за счет заслуг старшего; последний, Яков Бернулли, в статье в „Acta Eruditorum“ (1695) предал спор гласности, выступив против брата с очень резкими нападками и насмехаясь над его работами. В 1696 г. Иоганн поставил задачу о брахистохронной кривой, т. е. о кратчайшем пути, по которому тяжелое тело всего быстрее упадет из одной точки в другую, лежащую под первой не на одной с ней вертикали. Эту задачу, которая интересовала также Лейбница, и о которой мы говорили, касаясь его спора с Ньютоном (стр. 79) Яков решил в 1697 г., причем он с новыми издевательствами над братом присоединил к ней значительно более общую задачу, касавшуюся так называемой изопериметрической проблемы.

Иоганн сопровождал свои попытки решить эту задачу оскорблениями и несправедливыми обвинениями; Яков критиковал эти не вполне удачные попытки и в 1701 г. дал полное решение в статье, которая была выдержана в более спокойном тоне и содержанием своим представляла первый шаг к позднейшему вариационному исчислению. Только много спустя после смерти брата Иоганн сознался в допущенных им ошибках. Зависть свою к научным заслугам других он не преминул проявить даже по отношению к одному из своих сыновей.

Своими сочинениями и широкой педагогической деятельностью, в частности подготовкой некоторых из ученых, которым суждено было представлять математику в следующем поколении, братья Бернулли утвердили лейбницево диференциальное и интегральное исчисление как главное средство инфинитезимальных исследований, причем одновременно даны были весьма развитые механические правила для всех соответствующих операций, и обнаружена была применимость этих исчислений к большому количеству областей. Правда, теперь опубликовано было в поздно изданном „Методе флюксий“ и ньютоново учение о флюксиях, обозначения которого сами по себе, быть может, столь же пригодны, как и лейбницевы; метод этот также получил дальнейшую разработку в руках некоторых из соотечественников Ньютона, и применимость его была доказана рядом важных приложений. Но было слишком поздно. Диференциальное и интегральное исчисление уже одержало победу как та форма исчисления бесконечно-малых, которую должны были принять все математики и которая сохранилась до настоящего времени.

Это мощное орудие открыло новую эру в истории математики, сделав возможным решение множества новых задач; с одной стороны, его твердые правила привлекали к математической работе все возраставший круг ученых, с другой — дальнейшее развитие относящихся сюда методов по-новому направляло работу наиболее выдающихся математиков.

II. АНАЛИЗ КОНЕЧНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

1. Алгебраическое решение уравнений 3-й и 4-й степени.

Вопрос о решении уравнений 3-й и 4-й степени должен был, как мы уже говорили („Древние и средние века"), совершенно естественно встать уже в древности. Наряду с задачами, сводящимися алгебраически к уравнениям 2-й степени, приходилось наталкиваться и на такие, которые ведут к уравнениям 3-й степени. Напрашивался также переход от построений на плоскости, при помощи которых изучались проблемы, алгебраически сводящиеся к уравнениям 2-й степени, к соответствующим операциям с пространственными образами, в частности с параллелепипедами. Особые обстоятельства способствовали, однако, тому, что вопрос о сведении таких задач методами геометрической алгебры к простейшим построениям, аналогичным построениям для решения уравнений 2-й степени, либо вообще не возникал либо, же скоро снова отступил на задний план; действительно, если бы даже такое решение удалось получить, то оно не имело бы особого значения. В самом деле, когда в XVI в. нашли решение уравнения 3-й степени, то оказалось, что оно либо сводится к извлечению кубичного корня, либо связано с применением тригонометрических таблиц. В геометрической форме, которую принимали задачи в геометрической алгебре древних и которая частично была в употреблении и в XVI в., извлечение кубичного корня представляется как решение делийской задачи или как определение двух средних геометрических, а требующееся здесь применение тригонометрии — как деление угла на три равные части. В древности, естественно, удовлетворялись возможностью сводить новые задачи к тем, которые уже были столь хорошо знакомы, и примеры сведения некоторых задач к извлечению кубичного корня действительно имеются. Однако общие правила для такого сведения потеряли интерес, когда было замечено, что те же вспомогательные средства, которые употреблялись для извлечения кубичного корня (в частности, пользование коническими сечениями), можно было применить к данным задачам и непосредственно. Мысль об общем сведении некоторого класса задач к трисекции угла, вероятно, совсем не возникала.

Арабы продолжали решать задачи, связанные с уравнениями 3-й степени, с помощью конических сечений, в значительной степени следуя манускрипту, приписываемому Евтокием Архимеду („Древние и средние века", стр. 130). В манускрипте этом, как известно, имеется решение уравнения 3-й степени с помощью точек пересечения двух конических сечений и связанный с ним диоризм. В построении и классификации уравнений арабы пошли дальше. Поиски алгебраического решения имели для них и для их европейских последователей интерес, которого они не могли иметь для греков. Действительно, вычисление кубических корней было теперь арифметической операцией, с которой постепенно осваивались все лучше; алгебраическое сведение уравнений 3-й степени к чисто кубическим уравнениям являлось бы теперь, таким образом, крупным успехом. Правда, как Леонардо из Пизы, так и несколько позже Улуг-бек или его приближенные за неимением такого алгебраического решения применяли числовые приближения непосредственно к уравнениям 3-й степени; но имеются также указания, что делались по крайней мере попытки найти алгебраические решения.

Одна из этих неудачных попыток особенно интересна, потому что ясно показывает нам, что представляло трудности при нахождении такого решения или, вернее, что не представляло трудностей. В одной итальянской рукописи XIV в. для уравнения

$$ax^3+bx^2+cx=k$$

дается решение:

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3+\frac{k}{a}}-\frac{c}{b},$$

что верно только тогда, когда $b^2=3ac$. Отсюда ясно видно, что в случаях, когда уравнение 3-й степени простою заменою неизвестного $\left(\text{здесь подстановкою } z=x+\frac{c}{b} \text{ или } z=x+\frac{b}{3a}\right)$ можно свести к чисто кубичному, подобно тому как уравнение 2-й степени сводится к чисто квадратному, решение не представляло трудностей. Эта замена, которой в употребительном тогда геометрическом изложении соответствовал перенос начальной точки, в общем случае может быть использована для уничтожения члена, содержащего x^2, или, если предпочитать ту форму, в которой дает уравнение 3-й степени Архимед („Древние и средние века", стр. 149), для уничтожения члена, содержащего x. Замены этой можно даже совсем избежать, сразу выбирая неизвестное надлежащим образом; такому выбору должно было тогда придаваться тем большее значение, чем меньше имелось средств для преодоления алгебраических трудностей, вызывавшихся усложненной формой уравнений, и у Диофанта можно найти немало примеров, когда задача решается удачным выбором неизвестного.

Понятно, таким образом, что когда, наконец, решение уравнений 3-й степени было найдено, то главное внимание обращено было на правила для решения различных уравнений вида:

$$x^3 + ax + b = 0,$$

получающихся при тех или иных знаках a и b. Преобразование уравнения с 4 членами в уравнение с 3 членами, как мы видели, не представляло трудностей, хотя общие правила для такого преобразования установил только Кардано, давший в „Ars magna" систематическое изложение вопроса об уравнениях 3-й степени. Самим решением написанного выше уравнения с 3 членами Кардано обязан, как мы знаем, сообщению Тартальи и бумагам, оставшимся после Сципиона дель-Ферро.

Сообщения, которые Кардано с такой настойчивостью вырвал у Тартальи (стр. 19), сводились к следующему: уравнение

$$x^3 + ax = b, \quad (1)$$

в котором через a и b обозначены положительные величины, имеет решение:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v},$$

где u и v определяются из условий:

$$u - v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3,$$

откуда u и $-v$ находятся как корни уравнения 2-й степени; уравнение

$$x^3 = ax + b \quad (2)$$

имеет решение:

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v},$$

где u и v определяются из условий:

$$u + v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Относительно уравнения

$$x^3 + b = ax \quad (3)$$

Тарталья сообщил только, что его можно решить с помощью уравнения (2).

Надо заметить, что эти сообщения, сделанные в стихотворной форме, не дают сведений о каком-либо методе, с помощью которого можно найти решение уравнений 3-й степени; они просто предлагают решение, указывая только, как можно представить корни в виде разности или суммы кубичных корней из корней уравнения 2-й степени. Дело здесь идет, таким образом, вовсе не об изобретении метода, но об открытии — именно открытии — формы иррациональности, которую должны иметь корни упомянутых уравнений; относительно того, каким путем было найдено это решение, мы остаемся в неведении. Так как

Сципион дель-Ферро имел решение уравнения (1), и Фиоре (1535) вызвал на поединок Тарталью как раз потому, что знал это решение, то очевидно, что он обладал тем же самым решением, так как кроме него никакого второго вообще нет. Предположение о том, что решение Ферро могло касаться лишь каких-нибудь частных случаев, также должно отпасть, так как примеры Фиоре вели к иррациональным ответам, а во всех таких случаях приходится поступать совершенно одинаковым образом. Сверх того Кардано также говорит, что он нашел в бумагах Ферро то же решение, какое сообщил ему Тарталья.

Таким образом первенство открытия принадлежит Сципиону дель-Ферро, а Тарталья, раньше занимавшийся уравнениями 3-й степени без особого успеха, нашел решение снова, но только после того, как он узнал, что уравнения вида (1) действительно разрешимы. Было бы, однако, несправедливо из совпадения решений заключить, что Тарталья сам знал решение Ферро: действительно, если они оба вообще могли решать такие уравнения, то это совпадение, как было уже сказано, является необходимостью.

Неудивительно, что Тарталья, решив уравнение (1), тотчас же нашел и вполне аналогичное ему решение уравнения (2). Гораздо больше должно нас удивлять, что не сделал этого и Ферро. Это может иметь следующую причину. Уравнения

$$u + v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3,$$

с помощью которых уравнение (2) было решено Тартальей и к которым совершенно естественно вела аналогия с уравнением (1), становятся невозможными, когда

$$\left(\frac{b^2}{2}\right) < \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

В настоящее время эта невозможность не играет особой роли, так как мы допускаем и мнимые корни. Напротив, как в древние века, так и во времена Ферро решение не всегда возможной задачи связывалось с диоризмом или условием возможности, которое для рассматриваемого здесь уравнения 2-й степени имело бы вид:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Последнее условие не могло, однако, быть выставлено как диоризм, или условие возможности для положительного корня уравнения (2):

$$x^3 = ax + b,$$

что было нетрудно заметить в то время, когда этими уравнениями занимались так много. В таких случаях обыкновенно делают пробы с числовыми примерами, и тогда это было тем естественнее, что уравнения выражались тогда только в словесной форме, и

не было еще и речи об особых обозначениях для известных, но произвольных величин (в данном случае наших a и b). Уравнение имеет положительный корень, — а только его в сущности и искали, — независимо от того, имеет ли место неравенство $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{a}{3}\right)^3$ или нет. Последний случай называется обычно неприводимым, так как решение уравнения 3-й степени здесь нельзя привести к уравнению 2-й степени.

Вот почему данное Тартальей решение уравнения (2) являлось неполным, в одних случаях применимым, в других нет. Возможно, что это и удержало Ферро от того, чтобы с своей стороны дать такое решение. Напротив, Тарталья, хвалившийся уменьем решать уравнения еще и раньше, когда он мог делать это только в совершенно частных случаях, нисколько не усомнился, после того как он нашел решение, сообщенное им позже Кардано, что он может решать уравнение (2) без добавления какого-нибудь ограничения. Как талантливый математик, каким он, судя по всему, несомненно, был, он, однако, скоро должен был заметить, что его решение не всегда применимо.

Это открытие должно было привести его к попыткам найти полное решение, не имевшим, однако, успеха. Непобежденная трудность, независимо от других возможных причин, служила ему достаточным основанием для того, чтобы снова и снова откладывать работу над сочинением об уравнениях 3-й степени, в которой он сам хотел сообщить об открытиях, опубликованных к его большой досаде Кардано в „Ars magna". На то, что боязнь Тартальи оказаться опереженным Кардано особенно относилась к неприводимому случаю, указывает тот факт, что, когда непрерывно продолжавшиеся вопросы Кардано начали касаться этого пункта, он тотчас же перестал на них отвечать. Кардано, однако, ушел в этом отношении не дальше его.

Тот же неприводимый случай появляется в ином виде в третьем классе уравнений:

$$x^3 + b = ax. \tag{3}$$

Тарталья сообщает об этом, как было упомянуто, только то, что такие уравнения решаются с помощью уравнения (2). Но о том, каким образом Тарталья пользовался этим уравнением, Кардано не узнал. Не знаем этого и мы. Несомненно, каким-то образом была использована существующая между обоими уравнениями взаимная зависимость, выражающаяся в том, что корни одного равны корням другого, взятым с противоположными знаками. В то время, так же как в некоторых случаях и раньше, значение отрицательных корней уже осознавалось, и мы увидим, что Кардано понимал даже выгоду рассмотрения их. Но вообще тогда предпочитали избегать их и задачи, которые можно решить с помощью отрицательных корней уравнения (2):

$$x^3 = ax + b$$

к такому виду, чтобы они решались с помощью положительных корней уравнения (3):

$$x^3 + b = ax.$$

Уравнение (2) в приводимом случае $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{3}\right)^3$ имеет только один действительный корень, и корень этот положителен. Напротив, в неприводимом случае $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ оно имеет два отрицательных корня, и следовательно, уравнение (3) — два положительных. Условие $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^3$, которое, если принимать во внимание лишь положительные корни, для уравнений вида (2) образует только границу между теми уравнениями, которые можно и нельзя решить по формуле Тартальи, для уравнения (3) дает действительную границу возможности. Эти общеизвестные теперь вещи явствуют из приводимого ниже решения задачи (3), данного Кардано.

Каким путем пришел к тому же Тарталья, мы не знаем; однако, так как в более поздних своих сочинениях он дает в одном месте решение задачи на maximum и определенно добавляет, что оно найдено посредством новой алгебры, то он едва ли мог воспользоваться для этого чем-нибудь другим, кроме рассмотренной здесь границы возможности. Действительно, такие границы возможности были тогда еще единственным средством для решения задач на maxima и при решении трехчленных уравнений 3-й степени не встречается никаких других пригодных для этого диоризмов. Это предположение вполне подтверждается также формой, в которой Тарталья дает решение своей задачи.

Задача Тартальи заключается в требовании разделить число 8 на две такие части, чтобы произведение их произведения на их разность было maximum. Решение его таково: „8 надо разделить на 2; квадрат этой половины, увеличенный на $^1/_3$ этого квадрата, должен быть равен квадрату разности обеих частей". Определенное указание относительно того, как найти эту разность, говорит, что он в своем решении принимал ее за неизвестное. Если мы обозначим ее через x и заменим число 8, которое, очевидно, представляет собою любое число, буквою a, то части будут $\frac{a}{2} - \frac{x}{2}$ и $\frac{a}{2} + \frac{x}{2}$ и выражение

$$x\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

должно иметь максимальное значение. Обозначая его через m, получаем уравнение:

$$x^3 + 4m = a^2x,$$

имеющее как раз форму (3); граница возможности $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ дает здесь $(2m)^2 = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3$, и уравнение имеет решение:

$$x^2 = \frac{a}{3} = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{4},$$

как и указывает Тарталья. Форма, в которой это проведено, должна стоять в связи с незнакомым нам способом его решения уравнения (3).

Напротив, способ, каким Кардано выполнил указание Тартальи относительно решения уравнения (3) с помощью уравнения (2), известен нам из „Ars magna". В несколько сокращенном виде его можно изложить следующим образом: уравнение

$$x^3 + b = ax \tag{3}$$

надо решить с помощью уравнения (2), (положительный) корень которого предполагается, таким образом, известным. Если мы обозначим его через y, то

$$y^3 = ay + b. \tag{2'}$$

Отсюда следует (у Кардано это сложнее), что

$$x^3 + y^3 = a(x + y),$$

или, по сокращении на $x + y$,

$$x^2 - xy + y^2 = a,$$

откуда окончательно

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4} y^2}.$$

Общего решения уравнения (3) этот способ, конечно, не дает. Он предполагает знание корня уравнения (2'); но, для того чтобы корни уравнения (3) были действительны, должно быть $y \leqslant \sqrt{\frac{4}{3}} = a$. Однако если $y < \sqrt{\frac{4}{3}} = a$, то как явствует из подстановки в (2'), $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{a}{2}\right)^2$, т. е. мы имеем как раз неприводимый случай, в котором нельзя найти y из (2'). Применимость метода к действительному решению ограничивается следовательно, случаем, когда $\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, и такими случаями, в которых корень уравнения (2') уже каким-нибудь образом известен. Случай первого рода лежит в основе только что рассмотренной задачи Тартальи на определение maximum'а. Что касается случаев, в которых известен корень уравнения (2'), меньший $\sqrt{\frac{4}{3}} = a$, то Кардано дает различные примеры их, что не представляет затруднений, так как он умел составлять уравнения, имеющие определенный корень.

Что, однако, в высокой степени заслуживает нашего внимания, это, во-первых, общие результаты, к которым приходит Кардано, а во-вторых, примененный им метод и то, что он из него извлекает.

Даже тогда, когда Кардано не находит положительного корня уравнения (2'), он знает о его существовании. По крайней мере в позднейшем своем сочинении, носящем также название

„Ars magna“ с добавлением лишь слова arithmeticae [1], он устанавливает еще более общее положение: уравнение, в котором все члены, стоящие в левой части, имеют более высокую степень, чем члены, стоящие в правой части (если все члены написаны в той части, где они положительны), имеет один и только один положительный корень. Весьма вероятно, что он сперва заметил это обстоятельство на уравнениях 3-й степени (1) и (2) и затем обобщил его. Это обобщение легко могло быть получено человеком, имевшим столько дела с численными примерами решения уравнений, хотя бы ему и недоставало средств для строгого доказательства. Справедливость этого предложения, впрочем, можно без труда доказать, разделив обе части уравнения на старший член правой части.

Уравнение (2'), примененное Кардано для решения уравнения (3), имеет, таким образом, всегда один и только один положительный корень y; Кардано, следовательно, может определенно указать $-y$ как отрицательный корень [radix ficta — ложный корень уравнения (3)]. Кроме того, как мы видим, он находит, что в неприводимом случае есть еще два положительных корня; уравнение, определяющее их, получается путем деления на $x+y$ или на разность между x и известным корнем $-y$, — методом, последующее развитие которого мы проследим в главе 3-й. Далее, из получающегося уравнения 2-й степени явствует, что числовое значение y отрицательного корня равно сумме положительных корней. Кардано отмечает это вполне определенно; то обстоятельство, что в пограничном случае $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ имеется один единственный положительный корень $x = \frac{y}{2}$, он рассматривает как частный случай предыдущего, обнаруживая этим правильное понимание двойного корня. Так как уравнения (2) и (3) получаются друг из друга изменением знаков корней, то Кардано замечает также, что уравнение (2) в неприводимом случае имеет один положительный и два отрицательных корня, сумма которых равна по абсолютной величине положительному корню.

Кардано владеет этими результатами настолько свободно, что переносит их также на полные уравнения 3-й степени или по крайней мере на такие из них, в которых член 2-й степени имеет знак, противоположный знаку члена 3-й степени. Такое уравнение

$$x^3 + bx = ax^2 + c$$

посредством введения новой неизвестной $y = x - \frac{a}{3}$ или подстановки $x = y + \frac{a}{3}$ сводится к предыдущим формам; это преобразование, как мы видели, тогда умели делать, хотя лишь Кардано определенно установил его в виде правила. Если существует

[1] Ars magna arithmeticae — великое искусство арифметики.

три действительных корня, то, как только что показано, сумма трех значений y равна нулю. Следовательно, сумма трех значений x равна a. Кардано, не имевший в своем распоряжении ясных и общих форм доказательства, ограничивается тем, что показывает это на числовых примерах; определенная ссылка его на результаты, которые он нашел перед этим для уравнений вида (2) и (3), свидетельствует, однако, что ход его мыслей передан здесь правильно.

Общее решение уравнения (2) в неприводимом случае, а следовательно, и решение уравнения (3), когда оно вообще имеет положительные корни, оставалось между тем задачей еще неразрешенной, и чем большие успехи делало учение об уравнениях 3-й степени в других отношениях, тем настойчивее становились попытки овладеть также и этими случаями.

Одна из попыток, произведенных в этом направлении, принадлежит Бомбелли и выделяется смелостью, с которою он оперирует с мнимыми величинами. В этом отношении Кардано был, однако, его предшественником, правда, в другой области, а именно, Кардано показал, что мнимые корни $5-\sqrt{-15}$ и $5+\sqrt{-15}$, к которым приводит обычное решение системы уравнений $x+y=10$, $xy=40$, действительно удовлетворяют этим уравнениям, если произвести с ними вычисления как с другими двучленными величинами и положить

$$-\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}=15.$$

По правилу, указанному Тартальей, уравнение (2)

$$x^3=ax+b$$

имеет решение:

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}};$$

при $\left(\frac{b}{2}\right)^2<\left(\frac{a}{3}\right)^3$ решение это становится непригодным. Бомбелли пробует, однако, применить его и в этом случае. Он пользуется для этого преобразованием выражения $\sqrt[3]{\alpha\pm\sqrt{\beta}}$. Если положить его равным $p\pm\sqrt{q}$, то можно определить p и q из соотношений:

$$p^3+3pq=\alpha;\quad p^2-q=\sqrt[3]{\alpha^2-\beta}.$$

Если положить $\sqrt[3]{\alpha^2-\beta}=\gamma$, то получаем для определения p уравнение:

$$4p^3=3\gamma p+\alpha.$$

Бомбелли пробует применить это извлечение корня к обоим членам вышенаписанного выражения для корня уравнения (2),

не обращая внимания на то, положительна или отрицательна β. Он делает подстановку $\alpha = \frac{b}{2}$, $\beta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$, откуда

$$\gamma = \frac{a}{3} \text{ и } x = p + \sqrt{q} + p - \sqrt{q} = 2p.$$

Таким образом Бомбелли действительно удается дать объяснение тому, что наше уравнение может иметь действительный корень даже и тогда, когда он выражается через кубичные корни из мнимых величин. Решения же задачи он не получает, так как его уравнение для определения p по подстановке значений α и γ принимает вид:

$$4p^3 = ap + \frac{b}{2},$$

а это есть не что иное, как данное уравнение, с заменою в нем x через $2p$. Исследования относительно кубичных корней из величин вида $a + \sqrt{b}$ предпринимались в связи с решением уравнений 3-й степени также Штифелем и Жираром.

Виета удалось найти решение уравнения 3-й степени в неприводимом случае путем применения средств, выходящих за пределы алгебры. В главе 4-й мы ближе познакомимся с формой, в которой это было сделано. Здесь укажем только вкратце, пользуясь современными обозначениями, что решение основано на соотношении

$$\cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u.$$

Если привести уравнение (2) к виду:

$$x^3 - 3r^2x = ar^2,$$

заменяя в нем прежние обозначения a и b через $3r^2$ и ar^2, то неприводимый случай имеет место при $r > \frac{a}{2}$. Можно, следовательно, положить $a = 2r\cos v$, а тогда вследствие вышенаписанного выражения для $\cos 3u$ уравнение удовлетворяется значением:

$$x = 2r\cos\frac{v}{3}.$$

Корни уравнения (3), принимающего теперь вид:

$$3r^2x - x^3 = ar^2,$$

можно найти методом, данным Кардано. Получаем:

$$x = r\cos\frac{v}{3} \pm \sqrt{3r^2\sin^2\frac{v}{3}},$$

что вполне соответствует результатам Виета.

Удачный результат возобновленных попыток решить уравнения 3-й степени, считавшиеся в течение веков неразрешимыми, пробудил желание найти также решение уравнений 4-й степени. Это оказалось, при умении решать уравнения 3-й степени, сопряженным со сравнительно незначительными трудностями. Дейст-

вительно, необходимые преобразования, ведущие к вспомогательному уравнению 3-й степени, до некоторой степени родственны тем, которые уже давно применялись при выводе решения квадратного уравнения. Решение уравнения 4-й степени было найдено уже молодым учеником Кардано Феррари, и Кардано смог поместить его в „Ars magna" в связи с подробным изложением учения об уравнениях 3-й степени.

Прием Феррари непосредственно применяется здесь только к таким уравнениям 4-й степени, в которых отсутствует член 3-й степени и которые мы напишем здесь в виде:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

предполагая, что a, b, c могут быть положительны или отрицательны (Кардано в своем изложении избегает отрицательных членов, распределяя члены по обе стороны знака равенства). Сперва уравнение преобразовывается так, чтобы в левой части стоял полный квадрат, а в правой — выражение не выше 2-й степени. В приведенных Кардано примерах это достигается несколькими способами, но определенно указывается, что всегда можно воспользоваться следующим приемом. Из уравнения получаем:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4}.$$

Чтобы сделать обе части квадратами, прибавляем к ним обеим по

$$2\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)t + t^2,$$

где t — пока неизвестная величина. Получаем:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c,$$

где правая часть представляет собою также квадрат, если

$$b^2 = 2t\,(4t^2 + 4\,at + a^2 - 4c).$$

Из этого уравнения 3-й степени определяется t, после чего нахождение x можно свести путем извлечения квадратного корня к уравнениям 2-й степени.

Кардано определенно отмечает, что к указанному здесь виду легко можно свести такие уравнения, в которых вместо члена 3-й степени отсутствует член 1-й степени. Это достигается преобразованием, которое он применял к таким уравнениям уже раньше и которое соответствует подстановке $x = \frac{k}{y}$, где k — положительная или отрицательная постоянная. Казалось бы, что для Кардано не должно было представить затруднений решение методом Феррари и таких уравнений, которые содержат члены как с 3-й, так и с 1-й степенью: он мог бы, например, уничтожить член 3-й степени аналогично тому, как уничтожал член 2-й степени в уравнении 3-й степени. Он мог бы также использовать непосредственно прием, вполне аналогичный вышеприведенному

приему Феррари, т. е. преобразовать уравнение так, чтобы обе части его стали полными квадратами. То, что Кардано этого не сделал, объясняется, конечно, лишь новизною предмета.

Пробел этот, во всяком случае, было легко заполнить, и он действительно был скоро заполнен; использован был при этом второй из указанных путей. Бомбелли, вообще иллюстрирующий решение уравнений 3-й и 4-й степени многочисленными примерами, решает, например, уравнение

$$x^4 + 8x^3 + 11 = 68x,$$

преобразуя его в

$$(x^2 + 4x - t)^2 = (16 - 2t)x^2 + (68 - 8t)x - (11 - t^2);$$

из

$$147t = t^3 + 666$$

получается $t = 6$, откуда

$$(x^2 + 4x - 6)^2 = 4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2.$$

2. Алгебраическая символика.

Найденное Ферро, Тартальей и Феррари решение уравнений 3-й и 4-й степени знаменовало столь очевидный успех по отношению к математике древних, что это должно было в высшей степени способствовать оживлению работы математической мысли, которая, как было упомянуто во вступлении, и помимо того получала пищу со всех сторон. В особенности это должно было дать новые импульсы для развития алгебраического направления. Так как эти открытия были непосредственно связаны с определенными видами уравнений 3-й и 4-й степени, то прежде всего вставал вопрос о сведении к этим видам других уравнений 3-й и 4-й степени. Далее, естественно, встал вопрос о возможно более широком использовании полученных результатов. Нужно было также показать применение правил на ряде примеров. Работы Кардано и Бомбелли скоро распространили теории, о которых идет речь, по всему свету. Так, вскоре в Германии Штифель чувствовал себя в этой области тоже совершенно свободно. Во Франции, где Виета сначала посвятил свое крупное математическое дарование главным образом тригонометрии, они, несомненно, способствовали тому, чтобы дать его деятельности более алгебраическое направление. Как уже было упомянуто, Виета сумел важные результаты своих тригонометрических работ перенести в алгебру; подробнее мы будем говорить об этом в 4-й главе. Работы итальянцев и Виета способствовали, в свою очередь, появлению исследований Симона Стевина, Жирара и Гэррриота, а те со своей стороны имели немало точек соприкосновения с работами Иобста Бюрги, Кеплера и др.

Мощный рост содержания алгебры все более и более требовал при таких обстоятельствах развития соответствующих форм, а усовершенствование форм опять-таки оказывало влияние как

на углубление содержания, так и на бóльшую его понятность и бóльшее распространение.

Тарталья и Кардано довольствовались еще алгебраическими обозначениями, которые были употребительны по обе стороны Альп уже в конце средневековья. Тогда, правда, применялись различные символы, если дело шло о записи, преобразовании и решении уравнений с данными числовыми коэфициентами, но когда надо было выразить общие правила или методы, то обходились совершенно без символики. Иногда, как делал это в свое время Диофант и как мы видели это выше у Тартальи, общий ход выкладок показывался на произвольных частных числовых значениях; это средство было, однако, не всегда достаточным. Общее уравнение $x^3 + ax = b$ выражалось примерно таким образом: „куб“ (x^3) $\tilde{p}$ (plus) некоторое количество (a) „вещей“ (x) равно известному „числу“ (b); при указании решения наш x именовался „вещь“; „количество вещей“ обозначало то, что мы записываем буквой a. Величина b именовалась „числом“. Известные в Германии знаки + и —, как видно отсюда, еще не применялись в Италии, где, напротив, употреблялись только $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ — простые сокращения письма. Написанные полностью слова plus и minus обозначали раньше положительные и отрицательные поправки при пользовании regula falsi. То же значение имеют символы + и — у Видмана, у которого они впервые встречаются. Только после него эти слова и знаки стали употребляться как обычные знаки сложения и вычитания.

Древние математики, мысли которых с течением времени усваивались все глубже, завещали, правда, еще одно средство изложения, носившее общий характер, — геометрическое изображение; но оно перестает быть непосредственно наглядным, как только дело начинает касаться выражений выше чем 2-й степени; для выражений выше чем 3-й степени оно ограничивается употреблением „гипергеометрических“ терминов, как квадратоквадрат для 4-й степени и т. п.

Знаки плюс и минус, имеющие то преимущество, что они ясно выступают среди обычного письма, быстро получили широкое распространение. Дальнейшее развитие символики шло преимущественно по пути новых сокращений записи уравнений. Бомбелли достигал этой цели, обозначая различные степени неизвестного символами $\breve{1}, \breve{2}, \breve{3}, \ldots$; Стевин изменил обозначения Бомбелли на ①, ②, ③, ...; Бюрги почти так же, как раньше это делал Шюке (о работах которого Бюрги, однако, вряд ли мог что-нибудь знать), приписывал показателей степени неизвестных римскими цифрами к соответствующим коэфициентам в виде показателей: $7^{\text{I}} - 14^{\text{III}} + 7^{\text{V}} - 1^{\text{VII}}$ обозначает у него $7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$. Это определенное обозначение показателя было яснее употреблявшихся раньше начальных букв (n вместо numerus, т. е. 1, q вместо quadratum и т. п.). Связанное со всеми этими обозначениями неудобство, состоящее в том, что они предполагают

только одну неизвестную, Стевин устраняет тем, что пишет перед обозначением степени *sec* или *ter*, если дело идет о „второй" или „третьей" неизвестной. „Умноженное на" обозначает он через *M* и „деленное на" — через *D*. Теперешнее уравнение

$$\frac{6x^3}{y} : 2xz^2 = \frac{3x^2}{yz^2}$$

он записывает так:

Если мы разделим 6 ③ *D sec* ① на 2 ① *M ter* ②,

то получим 3 ② *D sec* ① *D ter* ②.

Для известного, но произвольного числа у Стевина еще нет обозначения. Уравнение

$$ay = xy + bx^2$$

записывает он следующим образом: несколько *sec* ① равны 1 ① *M sec* ① плюс несколько ②; наш коэфициент a в последующих операциях носит название „количества *sec* ①". Такие же обозначения для степеней Стевин применял, как мы увидим, при изображении десятичных дробей в виде различных степеней $\frac{1}{10}$.

Корни к началу нового времени обозначаются стоящей перед выражением буквой *R*, которая обычно перечеркивается (℞). Это *R* или *r* у Стевина и Виета перешло в знак $\sqrt{\ }$. Если речь идет не о квадратных корнях, то показатель обозначается помощью особого добавления. Так, Виета изображает кубичный корень символом $\sqrt{c}$, тогда как Стевин пишет $\sqrt{}$③, и т. д. Стевин и его последователь Жирар для изображения квадратных и кубичных корней пользовались также особыми обозначениями. Находим мы у них и зачатки особой тригонометрической символики. Жирар употребляет даже столь сокращенную запись, как

$$\frac{(A + b) - (d)}{(A + b) - (b - A)},$$

соответствующую теперешнему выражению:

$$\frac{\cos(A - B) - \cos D}{\cos(A - B) - \cos(A + B)},$$

скобками обозначен здесь синус заключенного в них угла, а маленькою буквою — угол, дополнительный по отношению к углу, изображенному большой буквой.

Для изображения корня из сложного выражения Рудольф, Бомбелли и Стевин применяют различные средства; Жирар заключает подкоренное выражение в скобки и пишет, например, $\sqrt{}(7 - \sqrt{47})$. Курьезно, что этот общеупотребительный теперь алгебраический знак объединения появился впервые там, где теперь пользуются вместо скобок другим символом, употреблявшимся еще Виета, — горизонтальной чертой над сложным выражением (например, $\overline{B + D}$); эта черта соединилась у Виета с употребительным тогда знаком корня в обычный после него длинный знак корня: $\sqrt{7 - \sqrt{47}}$.

Заметим еще для сравнения с некоторыми ограничениями, которым, как мы увидим, подчиняется у Виета применение его символики, что его современник Стевин, так же как Кардано, не избегает в уравнении отрицательных корней и не задумывается производить операции над иррациональными корнями. Он ясно устанавливает понятие иррационального числа и указывает, что это отвергнутое Евклидом понятие находится, однако, в скрытом виде в его 10-й книге и что ее легче было бы читать, если бы оно было отчетливо выдвинуто и ближе пояснено числовыми примерами. В связи с этим Стевин и Жирар идут в операциях с радикалами довольно далеко. С применением обозначений они не связывают предположения, что изображаемые неизвестные или корни должны быть положительны или рациональны.

Символика Стевина дает очень простой вид уравнениям с данными числовыми коэфициентами и очень удобна при выполнении преобразований и решении их. Однако упомянутое отсутствие обозначений для известных, но произвольных величин делает ее непригодной для выражения общих правил и их общего обоснования. В этих случаях Стевин прибегает к помощи обычного языка. Надо, однако, сказать, что он умеет делать это проще и понятнее, чем большинство его современников. В то время как последние пользовались древними языками или по крайней мере заимствовали у них термины для обозначения научных понятий, Стевин находил наиболее пригодным для достаточно ясного изложения свой родной язык, хотя он и перевел потом свои сочинения частью на французский, частью на латинский. Одно из своих сочинений, „La Disme“, он постарался написать особенно популярно, чтобы сделать его понятным купцам, ремесленникам и другим читателям, для которых предлагаемая в нем десятичная система имела практическое значение.

Во всех этих отношениях он образует полную противоположность Виета. Последний был верным приверженцем древних, к воззрениям которых он примыкал, несмотря на все те крупные успехи, которые вскоре должны были дать алгебре совершенно отличный от прежнего вид. Все его изложение насыщено его эрудицией в области греческого языка. Оно полно греческих терминов, то написанных греческими буквами, то латинизированных, и эти термины, из которых лишь очень немногие приобрели впоследствии право гражданства, в высшей степени отягощают его стиль. Изображение числовых уравнений у него также не столь просто, как у Бомбелли или Стевина. Но зато у него есть нечто такое, чего еще не было у последнего и благодаря чему он является создателем алгебраической формулы и алгебраической символики, в которой, правда, слова еще вкрапляются в формулы.

Виета обозначал прописными буквами произвольные числа, и притом не только, как это делалось до него, неизвестные, но также и такие, которым в различных частных случаях можно было давать то или иное данное значение. Первые он обозна-

чает гласными, последние — согласными. Операции, которые он производит с составленными помощью этих обозначений выражениями, представляют собою, таким образом, настоящее буквенное исчисление, содержащее в себе все операции, какие получаются заменою букв всевозможными числовыми значениями. Он называет его Logistica speciosa в противоположность Logistica numeralis.

Как только что было упомянуто, символика Виета не во всех отношениях была развита до такой степени, как у некоторых из его современников. Он все еще употреблял в ней полные или сокращенные слова, например in вместо знака умножения, aequatur вместо знака равенства; у него мы находим также слова, обозначающие степени различных величин. Для трех низших степеней они взяты из геометрии и обозначают число измерений, что же касается высших степеней, то им даны гипергеометрические названия. A^3, A^9 обозначаются, например, таким образом: A cubus, A cubo-cubo-cubus; известная величина B представляется как величина 9-й степени помощью записи solido-solido-solidum. Величина 1-й степени носит название latus (сторона); если данное latus умножается на неизвестную величину, то оно обозначается как содействующее (coefficiens) при образовании соответствующей площади. Названия эти выбираются всегда так, чтобы уравнения были однородны относительно неизвестных и известных величин, взятых вместе. Из знаков употребляются +, — и дробная черта. Горизонтальная черта над многочленным выражением показывает, как уже упоминалось, что его надо рассматривать как одно целое, — то, что мы выражаем теперь помощью скобок. Данные числовые множители приписываются просто без особых обозначений. Уравнение

$$A^3 + 3BA = D$$

Виета записывает следующим образом:

A cubus + B planum in A 3 aequatur D solido.

Эта символика оказывается недостаточной, когда сам показатель может быть произвольным. В таких случаях Виета ограничивается менее определенными обозначениями, становящимися понятными лишь в данном контексте. Так,

B parabola in A gradum — A potestate aequatur Z homogenae

есть запись уравнения

$$BA^n - A^{m+n} = Z.$$

Своим несколько тяжеловесным и неудобным аппаратом Виета пользуется с математической щепетильностью, изобличающей в нем верного ученика древних. Подобно им, он считает за числа, с которыми вообще можно оперировать, только рациональные и положительные числа; их он и обозначает буквами. Вследствие этого справедливость результатов, вытекающих из операций при его способе обозначений, нуждалась еще в особом обосновании в тех случаях, когда неизвестное при подстановке значений

известных величин оказывается иррациональным. Такие особые обоснования были бы столь пространными, что этим уничтожались бы преимущества введения символики; Виета, однако, сознавая право на требования такого обоснования, добавляет в особенно важных местах так называемое „геометрическое" решение, с нашей точки зрения являющееся, правда, менее геометрическим, чем его символика, постоянно пользующаяся геометрическими или гипергеометрическими терминами. Это решение удовлетворяет требованиям, предъявлявшимся к геометрической точности как древними, так и арабами, в силу того, что оно базируется на евклидовом (евдоксовом) учении о пропорциях, равно применимом и к соизмеримым и к несоизмеримым величинам. В этом отношении Виета идет по стопам Омара Алхайями („Древние и средние века", стр. 205).

В качестве примера такого „геометрического" изложения приведем имеющееся у него решение уравнения Ферро и Тартальи. Прежде всего он представляет уравнение с помощью своей символики в форме, которую мы выше перевели как

$$A^3 + 3BA = D;$$

известное решение имеет тогда следующий вид: A есть разность „сторон", которые образуют площадь B и разность кубов которых равна D, т. е. если обозначить эти „стороны" через u и v:

$$uv = B, \quad u^3 - v^3 = D, \quad A = u - v.$$

Для того чтобы применить „геометрическое" решение, Виета пишет затем вместо „D solidum" произведение „B planum" на D, так что получается уравнение:

$$A^3 + 3BA = BD.$$

Затем он определяет четыре величины, образующие геометрический ряд, так, чтобы прямоугольник, построенный на средних или на крайних, равнялся B, а разность крайних равнялась D. В таком случае A будет разностью средних. Если мы обозначим эти четыре величины через z, u, v, t, то мы можем выразить сказанное следующим образом:

$$z : u = u : v = v : t,$$
$$zt = uv = B,$$
$$z - t = D,$$
$$A = u - v.$$

Отсюда видно, что оба решения совершенно совпадают (если, конечно, мы и в первом заменим D через BD) и что последний способ выражения соответствует античной замене кубичного корня двумя средними геометрическими. Действительно, пропорции дают:

$$u^3 = z^2t, \quad v^3 = zt^2,$$
$$u^3 - v^3 = zt(z - t) = B \cdot D.$$

Буквы у Виета всегда должны обозначать только положительные числа. Что касается *данных* величин, то такая установка продолжалась вплоть до Гудде, так что еще Декарт, желая написать уравнение с общими коэфициентами, ставит перед каждым членом многоточие вместо знака; это должно обозначать, что знак может быть как плюсом, так и минусом. Буквенный коэфициент выражает, таким образом, только абсолютную величину. Что касается *неизвестных* величин, то здесь труднее делать подобное предположение, так как не всегда можно предвидеть, будут ли они положительны или отрицательны, и не всегда можно наперед видоизменить уравнение так, чтобы они стали положительными. Если уравнение имеет отрицательный корень, то, как мы видели („Древние и средние века", стр. 189), уже индусы умели давать этому правильное объяснение; позже в Европе такой, например, ученый, как Шюке, вполне понимал значение отрицательных корней (там же, стр. 221). Кардано с полною ясностью относит к уравнению все его корни, как положительные, так и отрицательные. Виета, основательно знавшему работы Кардано, такой взгляд не мог, следовательно, оставаться неизвестным. Поэтому он, конечно, обдуманно допускает только положительные корни, ссылаясь на значение, которое он дал однажды символам. В силу этого Виета не только, подобно своим предшественникам, определяет отрицательные корни уравнения $x^3 = ax + b$ как положительные корни уравнения $y^3 + b = ay$, но и даваемое им обобщение кардановского соотношения между положительными и отрицательными корнями первого из этих уравнений является у него только соотношением между положительными корнями обоих уравнений. Заметим в связи с этим, что Штифель также довольствуется тем, что относит к уравнению его положительные корни. Штифель, между прочим, является первым, рассматривающим отрицательные числа как числа, меньшие нуля.

Хотя у Виета область чисел, обозначаемых буквами, ограниченнее, чем у Стевина, однако это не должно мешать нам ценить достигнутую здесь Виета логическую безупречность. Именно она сделала его символику надежным средством, которым можно было пользоваться не только для того, чтобы получать правильные результаты для данных конкретных задач, но которое могло служить также для изложения общих предложений и их полного обоснования. Для этого как раз требуется, чтобы при истолковании результатов в символы не вкладывалось никакого другого значения кроме того, которое им было дано сначала и которое приписывалось им во все время дальнейшего развития. Впоследствии, правда, обнаружилось, что алгебраическая символика имеет те выгоды, что ее обозначения могут столь же хорошо изображать и отрицательные и иррациональные и мнимые величины и даже такие понятия, к которым неприложимо понятие величин; уже и ко времени Виета не существовало сомнения относительно правильности полученных результатов, если даже



Франсуа Виета
1540—1603
Гравюра А. Горина с современного портрета

они давали для искомых величин отрицательные или иррациональные значения. Однако формальное право на непосредственное применение такого результата могло быть получено только тогда, когда впоследствии была найдена форма определения производимых над символами действий, особенно умножения, деления и извлечения корня, охватывающая также отрицательные и иррациональные величины, и когда за исходный пункт было принято как раз это расширенное определение. Что касается действий с иррациональными величинами, то, как мы увидим, таким расширением мы обязаны только Декарту.

Символика Виета приобрела легкость и наглядность благодаря сделанным Томасом Гэрриотом (Harriot) усовершенствованиям, освободившим, в частности, уравнения от вставки в них слов. Гэрриоту удалось достичь этого путем того, что он, во-первых, ставит в произведениях и степенях все неравные и равные сомножители один за другим, записывая, например, $5a^3b^2$ в виде $5aaabb$, и, во-вторых, пользуется знаком $=$, которым он обязан своему соотечественнику Рекорду (Record). Эта употребительная теперь форма знака равенства не сразу принята была всеми; так, еще Декарт обозначает „равно" символом ∞; наряду с этим встречаются и другие знаки равенства. Гэрриот употребляет также знаки $>$ и $<$ в их теперешнем значении. То, что он пользуется для изображения величин маленькими буквами, также делает его формулы более удобными.

То, чего не могла еще выразить символика, приходилось выражать при помощи слов или геометрических фигур. Мы должны, однако, упомянуть здесь еще об одном средстве, служившем для точного изображения и для действительного выполнения операций над числами и величинами, которые должны были удовлетворять известным требованиям, — мы имеем в виду изображения с помощью таблиц. Мы рассмотрим здесь применение этого средства к образованию биномиальных коэфициентов и сделаем это тем охотнее, что оно играет важную роль в исследованиях, о которых мы скоро будем говорить. Штифель находил эти коэфициенты, последовательное образование которых путем умножения и деления мы встречаем лишь позже, следующим образом: когда $(x+a)^{n+1}$ получается из $(x+a)^n$ умножением на $x+a$, то коэфициент при $x^{n-r}a^{r+1}$ в первом многочлене образуется как сумма коэфициентов при $x^{n-r}a^r$ и $x^{n-r-1}a^{r+1}$ во втором, или, в современных обозначениях:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}.$$

Основанное на этом последовательное образование биномиальных коэфициентов ясно представлено у Штифеля помощью следующей таблицы, где каждый член образуется как сумма членов, стоящих в предшествующей строке над ним и влево от него:

1			
2			
3	3		
4	6		
5	10	10	
6	15	20	
7	21	35	35
8	28	56	70
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
17	136	680	2380 . . . .

Тарталья, познакомившись с „Arithmetica integra“ Штифеля, дал в своем „General Trattato di numeri et misure“ этой таблице другую форму, ведущую к еще более непосредственному изображению арифметических рядов возрастающего порядка, т. е. таких, которые начинаются разностью 0 и в которых затем каждый член с определенным номером представляет собою разность между стоящими в следующем ряду членом с тем же номером и членом, ему предшествующим. Его таблица имеет следующий вид:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Каждое число здесь получается посредством сложения чисел, стоящих перед ним и над ним. Коэфициенты различных степеней бинома расположены по диагоналям, соединяющим числа первой колонны с имеющими тот же номер числами первого ряда. Отсеченный такою диагональю треугольник есть так называемый арифметический треугольник, который позже был образован с тою же целью Паскалем, связывавшим, однако, с ним одновременно и мультипликативное образование чисел.

Подобным же табличным изображением пользуется и Виета, чтобы представить и выполнить последовательное образование различных коэфициентов в уравнениях деления круга и угла, о которых мы будем говорить позже.

3. Общая теория алгебраических уравнений.

Большие преимущества символики, благодаря которой доказательства и выводы принимают форму выполняемых по известным правилам операций, были тотчас же в очень большом объеме использованы самим Виета. Эти преимущества ясно сказываются не только там, где Виета получает новые результаты, но и там, где он разбирает вопросы, на которые давали ответ уже его предшественники, и даже там, где он решает

задачи, которые его предшественники решали по существу таким же способом, как и он.

Виета дает столь полное изложение вопросов, связанных с уравнениями четырех низших степеней, что теперь, когда преимущества символики общеизвестны, многое в этом изложении может показаться излишним. Эта полнота изложения резко отличает Виета от его предшественников, которые обычно должны были довольствоваться словесной формулировкой правил или демонстрированием их на числовом примере, причем только из правильности формулировок можно заключить, что авторы владели и обоснованием этих правил. Так, мы видели (стр. 95), что Кардано правильно указывает на то, где надо искать обоснование его утверждения относительно суммы корней уравнения 3-й степени; но это еще не формальное доказательство.

Дать дедуктивный анализ, ведущий от данного общего уравнения к его решению, до Виета было бы невозможным. Когда при изложении данного Феррари и Бомбелли решения уравнения 4-й степени мы преобразовывали последнее в новое уравнение, содержащее неопределенную пока величину t, а затем из требования, чтобы правая часть этого уравнения была квадратом, получали для t уравнение 3-й степени, то мы дали лишь наглядное изложение хода мыслей авторов, лежащего в основе решения. Бомбелли в приведенном им (стр. 98) примере указывает нам, как образовать синтетически уравнение 3-й степени: он находит, что его корень равен 6, и преобразовывает затем только данное уравнение в такое, которое он получает, полагая $t=6$. Напротив, Виета, по существу решающий уравнения 4-й степени методом Феррари, пользуется — употребляя свою символику — той же аналитической формой изложения, какую употребили и мы: он преобразует свое уравнение с неизвестною A в новое, содержащее сверх того неизвестную пока величину E.

Решение уравнения 3-й степени до Виета также могло быть даваемо лишь в виде синтетических правил, подобных тем, которые Тарталья сообщил Кардано (стр. 89, где слова заменены современными символами). Виета первый ясно указывает, как можно притти аналитически к решению уравнения 3-й степени. Как мы увидим, он следует в этом анализе по существу тому же ходу мыслей, как и при анализе уравнения 4-й степени. Только здесь дело идет об образовании не полного квадрата, а полного куба. Если заменить обозначения Виета употребительными в наше время, то уравнение берется в таком виде:

$$x^3+3ax=2b, \qquad (1)$$

Виета полагает

$$a=t^2+xt, \qquad (2)$$

вероятно, потому, что левая часть преобразовывается таким путем в три первые члена $x^3+3x^2t+3xt^2$ полного куба. Чтобы

определить t, Виета исключает x, вставляя выражение, найденное из последнего уравнения, в первое. В результате исключения получаем:

$$(t^3)^2 + 2bt^3 = a^3. \tag{3}$$

По определении t из этого уравнения x находится с помощью вспомогательного уравнения (2). Преобразование уравнения (1) в

$$(x + t)^3 - t^3 = 2b,$$

которое, вероятно, сначала имелось в виду, становится, таким образом, совершенно ненужным. Если мы сопоставим это уравнение с уравнением (2), которое может быть написано в виде:

$$(x + t)\, t = a,$$

то становится ясно, что действительное нахождение решения совпадает с данным Тартальей и, вероятно, еще до него Ферро.

Предмет особых исследований Виета составляют трехчленные уравнения различных степеней. В связи с результатами, найденными Кардано для уравнений 3-й степени, он прежде всего исследует, сколько корней имеют такие уравнения. При этом имеются в виду положительные корни; отрицательные он определяет обычным путем как корни уравнения, в котором x заменен через $-y$. Виета исходит при этом исследовании из уравнений 2-й степени и затем образует из них трехчленные уравнения высших степеней, однако так, что число положительных корней не увеличивается, а именно, он применяет либо подстановку $x = ky^m$ либо другие приемы, примеры которых мы приведем здесь.

Из уравнения

$$x^2 + ax = b,$$

возведя его в квадрат и сведя с помощью данного уравнения члены 2-й и 3-й степени к членам 1-й степени, получаем уравнение:

$$x^4 + (a^3 + 2ab)x = b^2 + a^2b;$$

уравнение

$$ax - x^2 = ab$$

дает по умножении на $x + b$

$$(a - b)x^2 - x^3 = ab^2.$$

Новые уравнения имеют в обоих случаях те же и только те положительные корни, как и данные.

В уравнении

$$ax^m - x^{m+n} = b,$$

которое может иметь два корня, Виета определяет коэфициенты так, чтобы корни имели данные значения. Если обозначить последние через y и z, то

$$a = \frac{y^{m+n} - z^{m+n}}{y^m - z^m}, \quad b = \frac{y^{m+n}z^m - y^m z^{m+n}}{y^m - z^m}.$$

Аналогичное определение он предпринимает и для уравнений вида:

$$x^{m+n} + ax^m = b,$$

где $m+n$ — четное число, m — нечетное; только здесь положительный и отрицательный корни, как обычно у него, трактуются как положительные корни двух соответственных уравнений.

Вышенаписанные выражения для a и b находятся в связи с суммированием геометрических рядов. Это дает Виета повод к составлению различных трехчленных уравнений, у которых данные величины и действительные корни находятся в разнообразной зависимости от геометрических рядов. Если, например, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют геометрический ряд, то уравнение

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^{n-1} - x^n = a_1(a_2 + \ldots + a_n)^{n-1}$$

имеет решения:

$$x = \begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \\ a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \end{cases}$$

Составление таких уравнений свидетельствует об алгебраическом мастерстве Виета. Однако несравненно большее значение имеют уравнения, выведенные им из тригонометрических соотношений и разбираемые нами в особом отделе.

Виета содействовал развитию учения об алгебраических уравнениях не только в отношении тех или иных отдельных классов уравнений; его новые средства позволили ему найти также такие преобразования и законы, которые относятся ко *всем* алгебраическим уравнениям. Так, построение общих формул дало ему возможность применить подстановку вида $x = y + k$, употреблявшуюся Кардано для уничтожения члена 2-й степени в уравнении 3-й степени, к уничтожению члена второй по величине степени во всяком уравнении. Таким же образом он распространил подстановку $x = \frac{k}{y}$, которую Кардано применяет к уравнениям 3-й и 4-й степени, так, что он, по его собственному выражению, в совершенно общем случае „взаимно меняет первое и последнее". Указал Виета также преобразование, ведущее к тому, чтобы, не изменяя коэфициента 1 при члене высшей степени, дать коэфициенту члена второй по величине степени (a) новое значение b, именно, подстановку $x = \frac{a}{b}y$, далее, он дал правило для уничтожения дробей в коэфициентах путем подстановки $x = k \cdot y$, где k имеет надлежаще выбранное значение. Освобождения уравнений от радикалов он достигает путем изолирования и возведения в степень. То, что он уничтожает таким путем не только радикалы, под которыми стоит неизвестное, но и те, которые встречаются в коэфициентах, находится в полном согласии со сказанным нами значении, которое он придает своим символам.

Еще большее значение, чем эти преобразования, имеет общее исследование Виета относительно составления уравнений из множителей первой степени и выражения коэфициентов через корни. Укажем сначала на то, что уже было достигнуто в этой области его предшественниками и современниками. Что касается уравнения 2-й степени, то ответ на второй вопрос был уже вполне дан евклидовым его решением. В „Данных" Евклида определение двух величин по построенному на них прямоугольнику (произведению их) и сумме или разности сводится непосредственно к уравнениям 2-й степени („Древние и средние века", стр. 45).

Вопрос о составлении уравнений из множителей 1-й степени возник позднее и не сразу был поставлен в такой именно форме. Желая проследить его историю, мы должны обратиться к встречающемуся у Кардано приему решения уравнения 3-й степени. Этот прием Кардано применял тогда, когда он не знал еще метода Ферро и Тартальи. Кардано преобразует, например, уравнение

$$2x^3 + 4x^2 + 25 = 16x + 55,$$

прибавляя к обеим его частям $2x^2 + 10x + 5$, к виду:

$$(2x + 6)(x^2 + 5) = (2x + 6)(x + 10),$$

после чего сокращение на $2x + 6$ приводит к уравнению 2-й степени. Пока дело идет, как здесь, только об искусном распределении отдельных членов в обеих сторонах, с целью получить общего множителя, мы еще не имеем, собственно, настоящего метода. Чтобы можно было говорить о нем, надо было бы либо усмотреть связь между сокращаемым множителем и корнем уравнения, в данном случае отрицательным корнем $x = -3$, либо понять, что по перенесении всех членов в одну сторону полученный многочлен разлагается на множители, один из которых имеет вид $x - a$ (a — корень уравнения).

Первое из этих требований Кардано впоследствии фактически выполнил, хотя, быть может, и не вполне сознавая его значение; как мы видели (стр. 94), он находил положительные корни уравнения

$$x^3 + b = ax$$

путем такого преобразования, что становится возможным сокращение на x минус известный отрицательный корень. Этот прием Виета распространил потом на трехчленные уравнения высших степеней.

Мы видели дальше (стр. 95), что Кардано связал с этим учение о трех корнях некоторых уравнений 3-й степени и правило о том, что коэфициент при члене 2-й степени, помещенном в правой стороне, равен сумме корней. Этим был сделан, после того, что древние знали об уравнениях 2-й степени, первый шаг к выражению коэфициентов уравнения через его

корни. Виета дал такое выражение, по крайней мере для уравнений, имеющих лишь положительные корни, составляя полные уравнения с данными положительными корнями вплоть до 5-й степени. Этого достаточно, чтобы показать, как в уравнении n-й степени образуются коэфициенты при x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} и т. д., и установить, что они представляют собою взятые с чередующимися знаками единицу, сумму корней, сумму произведений корней по 2, по 3 и т. д. Знаки выбирает он так, чтобы свободный член, равный произведению корней, стоял в правой части со знаком плюс. Работа, в которой Виета дал подробный разбор этого предложения, оцениваемого им самим как наиболее крупный результат его математической деятельности, утеряна.

Излагал ли в ней Виета в общем виде образование коэфициентов и в уравнениях, в которых имеются отрицательные корни, неизвестно. Так как он признает только положительные корни, то он должен был бы в этом случае выражать коэфициенты через положительные корни данного уравнения и положительные корни соответствующего ему уравнения, получаемого заменою x на $-y$. Там, где представляется случай, он обнаруживает, что такое расширение его предложения ему во всяком случае не чуждо. В частности, это относится к несколько раз уже встречавшимся нам двум взаимно дополняющим друг друга уравнениям 3-й степени, которые мы напишем в том же виде, как на стр. 93:

$$y^3 = ay + b; \quad x^3 + b = ax.$$

Если обозначить (положительный) корень первого через y_1, а (положительные) корни второго через x_1 и x_2, то Виета показывает, что

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = a; \quad x_1x_2(x_1 + x_2) = b.$$

Первый из этих результатов был, как мы видели, известен уже Кардано.

Гэрриот, исследования которого примыкают к исследованиям Виета, также не признает отрицательных корней; однако своеобразный исходный пункт, занимаемый им, дает ему возможность выражать коэфициенты через корни уравнения даже тогда, когда последние частью положительны, частью отрицательны, как это видно из следующего примера, в котором сохранены его собственные простые обозначения. Из произведения $a - b$, $a - c$ и $a + d$ он образует, перенося, так же как Виета, член, свободный от неизвестной a, в правую часть, уравнение:

$$\begin{aligned} aaa - baa &+ bca \\ - caa &- bda \\ + daa &- cda = -bcd. \end{aligned}$$

Из способа образования этого уравнения он заключает, что уравнение удовлетворяется, когда $a = b$ или $a = c$, в то время как множитель $a + d$ не используется для подобного заключе-

ния. Таким путем образуются в совершенно общем виде все возможные алгебраические уравнения с исключительно действительными корнями. Только отрицательные корни, как в приведенном примере $a = -d$, еще не считаются корнями.

Гэрриот пользуется этим способом образования для решения уравнений, отождествляя данное уравнение с другим, образование которого предполагает корень некоторого вида. Чтобы решить таким образом уравнение 3-й степени

$$aaa - 3bba = 2ccc,$$

где $b < c$, он отождествляет это уравнение с уравнением

$$aaa - 3rqa = rrr + qqq,$$

которое по своей форме удовлетворяется значением $a = r + q$. Таким образом он приходит к решению Тартальи:

$$rq = bb, \ rrr + qqq = 2ccc.$$

В полном виде предложение о выражении коэфициентов через корни было выставлено Жираром в его „Invention nouvelle", появившейся (1629) за несколько лет до труда Гэрриота, но написанной, несомненно, значительно позже его. Жирар не только наряду с положительными корнями рассматривает отрицательные, но видит также, что предложение является общим лишь в том случае, если принимаются во внимание и мнимые корни, racines enveloppées, которые он выражает помощью квадратных корней из отрицательных чисел. Его утверждение, что алгебраическое уравнение всегда имеет столько корней этих трех видов, какова его степень, было, правда, строго доказано только к началу XIX в.; но он имел основание расширить предложение Виета на уравнения n-й степени с n такими корнями, просто оперируя с мнимыми величинами таким же образом, как это уже раньше делал Кардано (стр. 95).

В виде дополнения к упомянутому здесь предложению Жирар дал указание относительно того, как выражаются через коэфициенты суммы степеней корней уравнения. Так как он не сообщает общего метода для определения их, а только дает выражения для сумм степеней корней до 4-й степени, то он, несомненно, нашел их просто последовательным определением суммы корней, суммы квадратов, кубов и т. д.

Естественно, что Жирар не может придать мнимым корням какого-нибудь другого значения кроме того, что они, помимо возможности их получения путем обычного решения уравнений, необходимы для общности его положений. Напротив, что касается отрицательных корней, то он показывает геометрически их значение на примере, который представляет и самостоятельный интерес, а именно, Жирар определяет алгебраически „вдвижение", выполнение которого циркулем и линейкой является нелегким, но все же было известно уже в древности. Дошедшее до нас решение принадлежит известному Гераклиту, но задача

эта должна была быть рассмотрена уже в утерянном сочинении Аполлония о вдвижениях. Она состоит в том, чтобы через точку на биссектрисе прямого угла провести прямую, на которой стороны угла отсекают отрезок данной длины. Длина отрезка, который эта линия отсекает на одной из сторон, считая от некоторой определенной точки последней, может быть найдена из уравнения 4-й степени, в выражение корней которого входят только квадратные радикалы. Эта задача приведена впоследствии в „Геометрии“ Декарта как пример применения уравнений такого вида. Жирар показывает, что выбор тех или иных знаков перед радикалами соответствует отсчету частей, составляющих искомый отрезок, в том или другом направлении от начальной точки, взятой на стороне угла.

Перенесение всех членов в одну сторону уравнения — прием, имеющий большое значение для нахождения линейных множителей и сокращения на них, — не встречается ни у кого из указанных авторов. Так, еще Жирар уединяет в одной из сторон член высшей степени. Больше всех к расположению, о котором идет речь, приближается Гэрриот; у него образование уравнений основано на том, что он действительно знает, что произведение линейных множителей, представляющих разности между неизвестной и корнями, должно быть равно нулю. Когда это наблюдение было сделано и распространено Жираром на отрицательные и мнимые корни, то оно вскоре должно было получить внешнее выражение в том, что уравнения стали писать так, чтобы в правой части стоял нуль. Вначале, однако, эта форма употребляется без такой цели. Чисто случайно встречается она в одном месте у Штифеля. Бюрги по сообщению Кеплера, при определении хорды, соответствующей одной седьмой части дуги, хорда которой равна a, сперва получает уравнение:

$$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = a,$$

а затем замечает, что при $a = 0$ оно дает сторону семиугольника. После того как математики, в значительной мере случайно, отказались от представления, что обе части уравнения обязательно должны содержать абсолютные величины, они не стали упускать случая там, где это могло быть полезно, действительно переносить все члены в одну сторону. Непер в своей алгебре (напечатанной только в 1839 г.) и Декарт делают это довольно часто.

4. Тригонометрия и ее связь с алгеброй.

Рассмотренные нами успехи математики тесно связаны между собой и являются естественным продолжением того, что сделано было античной математикой. Таким образом здесь мы имеем дело с присущим науке стремлением все глубже и глубже проникать в то, что уже стало прежде предметом ее исследования. Это, конечно, не исключает того, что найденные результаты при случае получали применение на практике, и это

давало, в свою очередь, новые импульсы теоретическому углублению в математические проблемы.

Теперь мы переходим к рассмотрению тех успехов алгебры, связанных главным образом с именем Виета, которые были непосредственно вызваны потребностями практики.

Речь идет о развитии алгебры под влиянием тригонометрии, которая развивалась под прямым влиянием измерительной практики. Предварительно мы должны будем дать краткий обзор состояния тригонометрии у древних и ее быстрых успехов в новое время.

У греков тригонометрия развивалась только как спутница астрономии. Евклид, Менелай и другие, правда, производили геометрические исследования относительно фигур на шаровой поверхности; но задачи по сферической тригонометрии, решавшиеся с помощью найденных соотношений, связывались не с любыми сферическими треугольниками, а только с определенными фигурами, непосредственно имевшими значение для астрономии. При составлении таблиц также имелись в виду лишь нужды астрономии. Тригонометрия была, таким образом, лишь промежуточным звеном между математикой и астрономией, лишенным самостоятельного значения. Долгое время она находилась в таком положении и у арабов, значительно содействовавших развитию как самой астрономии, так и применяемых в ней тригонометрических средств. Только у перса Наср-Эддина (умер в 1274 г.) мы находим самостоятельную трактовку решения сферических треугольников по трем данным элементам: выполняет он его, пользуясь четырехугольником, о котором идет речь в предложении Менелая,[1] а также дополнительными треугольниками, т. е. такими, в которых вершины одного являются полюсами сторон другого; при надлежащем выборе треугольников, образованных большими кругами, стороны одного служат дополнениями углов другого.

Произведение Наср-Эддина оставалось неизвестно как западным арабам, так и европейским математикам до недавнего времени.

В Европе решением сферических треугольников вне связи с задачами астрономии впервые занимался Региомонтан, сочинение которого „De triangulis omnimodus liber quinque“ (пять книг о треугольниках всякого рода) появилось в 1533 г., спустя 57 лет после смерти автора. Основной материал Региомонтан получил от арабов и некоторых из их непосредственных европейских последователей; но систематическое изложение и разбор различных частных случаев в значительной мере принадлежит лично ему. Разбор этот является, однако, неполным, так как двузначность результата замечена им здесь лишь при решении треугольника по углу, прилежащей и противолежащей сторонам и не замечена при решении треугольника по стороне, прилежа-

[1] „Древние и средние века“, стр. 160—161.

щему и противолежащему углам. Так как Региомонтан не знает зависимости между элементами взаимно полярных треугольников, то он не может вывести последнее решение из первого. Зато он дает зависимость, выражаемую теперь формулой:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

у него она имеет несколько иной вид, так как вместо cos он употребляет sin vers (= 1 — cos) и вычисляет тригонометрические величины для радиуса, отличного от единицы.

Региомонтан в своем учении о треугольниках сводит их решение к применению таблицы синусов. Сам он, однако, составил в то же время таблицу тангенсов, более полную, чем существовавшие раньше, так как он подобно Абул Вафа видел, что пользование ею значительно облегчает вычисления. Оно избавляет от надобности делить $\sin a$ на $\sin(90° - a)$ и особенно упрощает нахождение угла, когда известен его тангенс. Однако, чтобы действительно использовать преимущества этих таблиц, надо было правила Региомонтана, имевшие в виду применение только синусов, заменить другими. Это поставило перед продолжателями его новые задачи.

Решение этих задач и вообще возможно большее усовершенствование тригонометрии диктовались, как мы уже указывали в начале книги, все возраставшими потребностями астрономии. Астрономия ставила тригонометрии новые задачи и требовала решений, которые при наименьшей затрате труда давали бы наибольшую точность. Достижению этой цели способствовали как астрономы, так и математики. Коперник в двух тригонометрических главах своего капитального труда „De revolutionibus orbium coelestium“ („Об обращениях небесных тел“, 1543; эти главы были отдельно изданы его учеником Ретиком еще в 1542 г.) вынужден был самостоятельно обосновывать некоторые основные положения сферической геометрии, так как он в то время не был еще знаком с работой Региомонтана. Коперник впервые сводит дело к трехграннику, проектирующему треугольник из центра. Чутье Коперника к усовершенствованиям в области тригонометрии сказывается и в том, что он нашел целесообразным в своем экземпляре таблицы тангенсов Региомонтана добавить к ней таблицу секансов, позволяющую заменять деление на синус или косинус умножением. Опубликована была таблица секансов только Ретиком (1551), который соединил ее с таблицей синусов и более полной таблицей тангенсов; в последней разность между последовательными углами равна одной минуте, причем радиус принимается все время равным 10^7.

Таблицы составлены в употребительной и теперь форме, так что одновременно можно найти синус и косинус данного угла и косинус и синус дополнительного; названия тригонометрических величин употреблены новые, не совпадающие притом и с нынешними. Обозначения tangens и secans введены только Томасом Финке в его „Геометрии круга“ („Geometria rotundi“, 1583); на широкую

распространенность этой книги указывает как тот факт, что упомянутые наименования вошли в общее употребление, так и то влияние, которое Финке оказал на следующих за ним авторов. Сам он близко примыкает к Региомонтану, но дает новое и очень удобное для вычислений соотношение, выражаемое теперь формулой:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Пользование этим результатом при нахождении двух углов по их сумме и отношению противолежащих сторон имеет по сравнению с приемом Птоломея то преимущество, что оно позволяет прямо применять новые таблицы тангенсов.

Как сильно вообще развилась со времени Региомонтана плоская и сферическая тригонометрия, можно судить по правилам для решения треугольников, данным в тригонометрической рукописи Тихо-Браге (1591 г.; см. стр. 30). О применяемом здесь простаферетическом методе мы будем говорить дальше. Здесь отметим только, что Тихо-Браге до некоторой степени знаком с применением полярных треугольников, так как он при нахождении угла в сферическом треугольнике, в котором даны противолежащая сторона и два других угла, пользуется тем же правилом, что и при нахождении стороны по противолежащему углу и двум другим сторонам. На первый взгляд может показаться, что это должно было приводить к ошибочным результатам, ибо в первом случае имеет место формула:

$$\cos a=\cos b\,\cos c+\sin b\,\sin c\,\cos A,$$

во втором же случае формула:

$$\cos A=-\cos B\,\cos C+\sin B\,\sin C\,\cos a.$$

Нужно, однако, иметь в виду следующее: у Браге, как и у его современников, косинуса как такового нет; рассматривается вместо этого „синус дополнения“ (sinus complementi — отсюда и термин co-sinus). Под „дополнением“ разумеется угол, дополняющий данный до 90°. Но если угол v больше прямого, то, как ясно из другого места той же рукописи, дополнением его Браге называет угол $v-90°$, так что „синус дополнения“ равен не $\cos v$, а $-\cos v$. При таком определении указания Тихо-Браге являются правильными, если или один из углов B и C или обе величины a и A больше 90°. Так как в то время тригонометрические величины не имели знака то полная формулировка тех или иных соотношений требовала пространного рассмотрения отдельных случаев. Тихо-Браге пытается сделать это в некоторых местах, но не достигает нужной общности. Так, правило его, которое можно было бы выразить формулой:

$$\operatorname{tg} A=\frac{a\sin B}{a\cos B-c},$$

предполагает, что $A > 90°$ и что под $\operatorname{tg} A$ разумеется то, что мы теперь обозначаем как $\operatorname{tg}(180° - A)$. Однако несомненно, что, несмотря на встречающиеся ошибки в записи и неточные сокращения, Тихо-Браге и его помощники умели правильно пользоваться содержащимися в этой рукописи правилами; применять их приходилось главным образом в случаях, встречавшихся на практике, а там, где давалось какое-либо отдельное правило, для которого не представлялось таких случаев, оно, конечно, тоже проверялось на числовых примерах. На это определенно указывается в одном из правил, хотя рукопись в дошедшем до нас виде, не предназначенном к опубликованию, не содержит таких примеров.

Таким образом приведенные выше и некоторые другие правила Тихо-Браге являются неполными в том смысле, что они неявно содержат дополнительное требование, чтобы тот или иной угол был острым или тупым. При применении, однако, эта неполнота не могла создавать особых затруднений, так как для каждого отдельного случая делался чертеж и из него видно было, надо ли прибавлять или отнимать те или иные величины; это было вполне естественно в то время, когда чертежи еще заменяли в некоторых отношениях наши формулы. Вообще говоря, та полнота, которую дают наши формулы, была в то время несовместима с похвальной краткостью рукописи Тихо-Браге. Мы видим это по громадным размерам произведения, начатого Ретиком и законченного Ото: „Opus Palatinum de triangulis“ [1] (1596), в котором действительно исчерпаны все возможные случаи и все возможные решения.

Правила Тихо-Браге были в общем настолько удачны и целесообразны, насколько только можно было в то время ждать от человека, который ничего еще не знал о появившихся в 1579 г. „Математических таблицах“ („Canon mathematicus“) Виета. Предшественниками Виета в его тригонометрической работе были Региомонтан и Ретик; „Таблицы“ последнего (1551) были взяты им за образец в отношении способа введения тригонометрических величин. Поставленную работами Региомонтана и Ретика задачу по трем данным элементам плоского или сферического треугольника наиболее целесообразным образом определить остальные, пользуясь при этом всеми тригонометрическими величинами, Виета полностью разрешил в своем упомянутом выше труде и в сочинении, изданном в 1592 г. Различные правила, относящиеся сюда, Виета — творец математической формулы — представляет в ясной и наглядной форме, не прибегая, впрочем, к особой сим-

---

[1] Обычно цитируется как „Opus Palatinum“. Точный перевод: „Пфальцский труд о треугольниках“. Такие названия были в то время употребительны, — авторы в самом названии хотели отметить этим покровительство и материальную поддержку той или иной владетельной особы — в данном случае курфюрста пфальцского. Помимо этого в пространных посвящениях авторы не жалели высокопарных слов для излияния своих „верноподданнических“ чувств и превозношения талантов и мудрости своего покровителя. *Прим. ред.*

волике, но пользуясь табличным сопоставлением членов пропорций, которыми он пользуется.

Доказательств он, однако, дает немного, да и те, которые есть, не отличаются особенной ясностью. Из вспомогательных средств, которые он применяет, надо в особенности отметить употребление треугольников, образованных большими кругами с полюсами в вершинах сферического треугольника; среди них он, однако, не выделяет определенно, как это сделал Наср-Эддин, собственно полярного треугольника, стороны и углы которого служат дополнениями до 180° к элементам данного. Это было сделано в Европе лишь позже Снеллием (Snellius).

Как установление правил для решения треугольников, так и числовые выкладки и табличные работы, о которых мы будем говорить ниже, требовали значительного развития гониометрии. Крупные успехи гониометрии в рассматриваемый период также связаны с именем Виета. Его глубокое знание алгебры давало ему в такого рода исследованиях большое преимущество перед другими. Более того, несомненно, что самый интерес его к алгебре первоначально был вызван возможностью приложений к тригонометрии и астрономии. И тригонометрия в работах Виета щедро отблагодарила алгебру за оказанную ею помощь. Здесь не только, как это всегда бывает в подобных случаях, каждое новое применение давало импульс к новым исследованиям, но полученные гониометрические результаты сами непосредственно являлись источником важных успехов алгебры. Они привели к решению уравнений 3-й степени в неприводимом случае и к образованию важного класса разрешимых алгебраически уравнений высших степеней. Сверх того они дали значительный материал для получившего впоследствии развитие учения о функциях.

Главными гониометрическими результатами, о которых здесь идет речь, являются выражения для синусов (или хорд) и косинусов кратных дуг. В своих примечаниях к „Logistica speciosa" Виета выводит для них, исходя из обычных выражений для $\cos(x+y)$ и $\sin(x+y)$, следующие формулы:

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2} x \sin^2 x + \ldots,$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \ldots$$

Виета представляет тригонометрические функции не с помощью теперешних их обозначений, а в виде отношений сторон прямоугольных треугольников и, как было уже упомянуто, оказывается не в состоянии выразить общие результаты в символической форме; но он дает имеющие совершенно общий характер указания на то, как известные выражения образуются из биномиальных коэфициентов.

Кроме этого Виета принадлежат выражения $\cos mx$ через $\cos x$ и (смотря по тому, четно или нечетно m) $\cos mx$ и $\sin mx$

через $\sin x$. Относящиеся сюда правила, опубликованные после смерти Виета его учеником Андерсоном, выведены путем последовательного образования $\sin mx$ и $\cos mx$ с помощью соотношений, выражаемых теперь формулами:

$$\cos mx = 2\cos x\cos(m-1)x - \cos(m-2)x,$$
$$\sin mx = 2\cos x\ \sin(m-1)x - \sin(m-2)x,$$
$$\sin mx = 2\sin x\cos(m-1)x + \sin(m-2)x,$$
$$\cos mx = -2\sin x\sin(m-1)x + \cos(m-2)x.$$

Пользуясь этими соотношениями, Виета получает вышеуказанные выражения для небольших значений m и составляет таблицы коэфициентов, в которых, как и в биномиальной таблице Штифеля (стр. 106), ясно выступает закон последовательного образования коэфициентов. Таблицы, первая из которых дана до $m=21$, можно продолжать сколь угодно далеко совершенно механически. Надо, однако, заметить, что Виета выражает не непосредственно $\cos mx$ и $\sin mx$ через $\cos x$ и $\sin x$, как это делаем мы, а $2\cos mx$ и $2\sin mx$ через $2\cos x$ и $2\sin x$, оперируя, таким образом, с хордами дуг $2mx$ и $2x$ и дополнительных им.

Если в образованных таким образом уравнениях рассматривать $2\cos mx$ или $2\sin mx$ как данные, то они являются уравнениями m-й степени относительно неизвестной $2\cos x$ или $2\sin x$. Ближайшей целью, с которой Виета выводит эти соотношения, является вычисление синусов дуг через синусы малых дуг, т. е. составление таблицы синусов (хорд). Разбираемые ниже применения показывают, однако, что для Виета вполне было ясно и большое значение этих уравнений для алгебры.

Об одном из этих применений — о решении уравнения 3-й степени в неприводимом случае — мы уже упоминали (стр. 96). Оно является непосредственным следствием соотношения:

$$2\cos 3x = (2\cos x)^3 - 3(2\cos x).$$

Путем простого преобразования всякое неприводимое уравнение 3-й степени может быть приведено к виду:

$$q = z^3 - 3z,$$

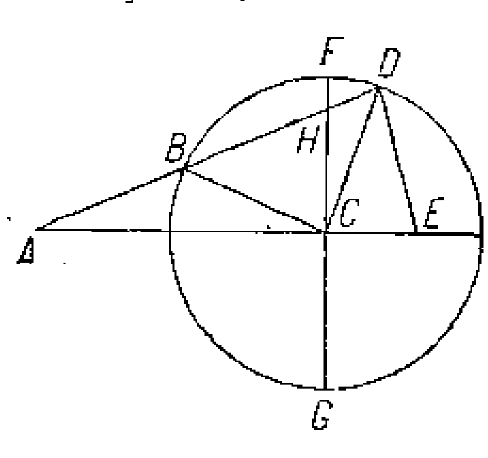
и тогда сопоставление с соотношением

$$2\cos 3x = (2\cos x)^3 - 3\,(2\cos x)$$

показывает, что решение кубического уравнения сводится к нахождению $2\cos x$ по данной величине $2\cos 3x$.

Таким образом в неприводимом случае, когда задача не может быть решена построением стороны куба, она сводится к задаче о трисекции угла. Виета, однако, не ограничивается этим сведением к двум знаменитым задачам древности. Подобно тому как в другом месте он указывает те построения, помощью которых корни уравнений второй степени изображаются графически посредством линейки и циркуля, он дает античное завершение

и своему решению обоих классов уравнений 3-й степени, приводя геометрическое построение для обеих задач, к которым они сводятся. Виета решает их, пользуясь античным средством „вдвижения", т. е. построением такой прямой, которая проходит через данную точку и на которой две данные кривые отсекают отрезок данной длины („Древние и средние века", стр. 64—66). Для решения задачи об умножении куба [т. е. задачи: по стороне данного куба построить сторону большего куба, объем которого находится к объему первого куба в данном (рациональном) отношении], или, что то же, задачи построения двух средних геометрических, он имел образцы в известной тогда греческой литературе. Что же касается трисекции угла, то указанный им способ по существу совпадает с тем, который был известен арабам, приписывавшим его Архимеду. Видоизменение этого построения, еще более близкое к данному Виета, встречается также в сочинении о треугольниках Иордана Неморария, а затем у Кампана (XIII в.).



Черт. 1.

Не столь существенно, взял ли Виета свою трисекцию угла у одного из этих писателей или сам нашел ее снова; интересно, как он применяет ее в „Дополнении к геометрии" („Supplementum geometriae") к доказательству своего решения уравнения 3-й степени в неприводимом случае. Это построение играет в истории математики любопытную роль. У древних и у математиков XIII в. оно служило непосредственно для трисекции угла; вероятно, уже в древности и, во всяком случае, у арабов оно являлось переходным звеном к решению той же задачи помощью конических сечений; Виета применяет его к непосредственному доказательству своего решения уравнений 3-й степени в том случае, который представлял неодолимые трудности еще для ближайших его предшественников.

Доказательство Виета заслуживает уже по одному этому внимательного рассмотрения. Пусть требуется разделить на три равные части угол ECD (черт. 1), который мы обозначим через v. Опишем около его вершины C как центра окружность, которая пересечет сторону CD в точке D; из D проведем прямую DBA, пересекающую окружность в B, а продолжение стороны CE в A, так, чтобы AB равнялось радиусу, который мы обозначим через r. Тогда $\angle CAB = \frac{1}{3} v$. Это — решение Архимеда. Виета пользуется сверх того диаметром FG, перпендикулярным к CE и пересекающим DB в H. Очевидно, что $BH = r$; следовательно, задача могла бы быть решена также посредством отрезка длины r, помещенного между окружностью и CF так, чтобы продолжение его проходило через D. Это — решение Иордана. Проводя

прямые BC и $DE = DC$, видим, что $CE = 2r\cos v$, $AC = 2r\cos\frac{v}{3}$, Положим, в согласии со стр. 96, $CE = a$, $AC = x$. Чертеж дает нам

$$\begin{aligned} r^2 &= CH^2 + FH\cdot HG \\ &= CH^2 + BH\cdot HD \\ &= 4r^2 - x^2 + \frac{ar^2}{x} \end{aligned}$$

(преобразование последнего члена основано на том, что $\frac{BH}{HD} = \frac{x}{a}$, и $BH = AB = r$). Отсюда

$$x^3 = 3r^2x + ar^2,$$

т. е. мы получаем то самое уравнение, решение которого было дано указанными выше значениями a и x. Подобным же геометрическим путем доказывает Виета и правильность решения уравнения, получаемого из предыдущего заменою x через $-x$.

Трисекцию угла Виета связал и с образованием уравнения

$$3x - x^3 = a,$$

в котором мы положили $r = 1$ и которое в таком случае удовлетворяется значениями $a = 2\sin v$, $x = 2\sin\frac{1}{3}v$. Два положительных корня он истолковывает как хорды, соответствующие дугам $\frac{2v}{3}$ и $\frac{360^\circ - 2v}{3}$, отрицательный же корень, который мог бы быть представлен в виде двойного синуса дуги, большей 180°, он по своему обыкновению вообще не принимает во внимание. Подобным же образом трактует он аналогичные задачи деления угла на 5 и 7 равных частей. Ясно, таким образом, в какой мере Виета был вооружен, чтобы мгновенно решить задачу, которую вскоре после этого Адриан ван-Роумен предложил как вызов математикам всего мира. Задача заключалась в решении уравнения 45-й степени с данными числовыми коэфициентами, именно:

$$\begin{aligned} &45x - 3\,795x^3 + 95\,634x^5 - 1\,138\,500x^7 + \\ &+ 7\,811\,375x^9 - 34\,512\,075x^{13} + 105\,306\,075x^{15} - \\ &- 232\,676\,280x^{15} + 384\,942\,375x^{17} - 488\,494\,125x^{19} + \\ &+ 483\,841\,800x^{21} - 378\,658\,800x^{23} + 236\,030\,652x^{25} - \\ &- 117\,679\,100x^{27} + 46\,955\,700x^{29} - 14\,945\,040x^{31} + \\ &+ 3\,764\,565x^{33} - 740\,259x^{35} + 111\,150x^{37} - \\ &- 12\,300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a, \end{aligned}$$

в частности, при

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}.$$

Задача была предложена в обозначениях Стевина, которыми в случае уравнения столь высокой степени должен был поль-

зоваться и Виета. Роумен сообщил для облегчения результаты, получаемые при некоторых других значениях a; он указывает, например, что значению

$$a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

соответствует решение:

$$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}}.$$

Рассказывают, что в октябре 1594 г. Виета находился с Генрихом IV, на службе у которого он состоял тогда, в Фонтенбло. Во время разговора между королем и нидерландским посланником о наиболее замечательных людях государства посланник заметил, что Франция, видимо, не имеет математиков, так как ван-Роумен среди тех, кому он в своем письме в особенности адресовал свой научный вызов, не упомянул ни одного француза. „И все же, — отвечал король, — у меня есть математик, и весьма выдающийся. Позовите Виета". Когда Виета появился, посланник достал письмо Роумена. Виета прочел его, тотчас же написал решение и на следующий день прислал еще 22 других.

Нисколько не удивительно, что Виета, знавший правила для определения синусов или хорд кратных дуг, смог тотчас же угадать решение, легко проверить его и даже исправить ошибку в записи задачи. Он тотчас же увидел, что предложенное значение a представляет собою сторону правильного пятнадцатиугольника, вписанного в круг радиуса 1, или хорду, соответствующую дуге в $24°$, а коэфициенты при первом и предпоследнем члене должны были сейчас же сказать ему, что x, если только вообще могла быть речь об его определении, должен был быть хордою $\frac{1}{45}$ этой дуги, т. е. дуги в $\frac{8°}{15}$. Тем самым задача была решена, так как требовалось только геометрическое определение корня.

Такой глубокий алгебраист, каким был Виета, не ограничился этим. 22 других решения, сообщенные им на следующий день, были: $2\sin\frac{p\,360°+12°}{45}$ для $p=1, 2, \ldots, 22$. Таким образом ему удалось найти все положительные корни.

Виета сумел извлечь из предложенной задачи еще один важный алгебраический результат. Тригонометрическое происхождение задачи указывает на то, что ее можно решить также путем последовательного решения двух уравнений 3-й степени, соответствующих каждое трисекции, и уравнения 5-й степени, соответствующего делению дуги на пять равных частей, т. е. если обозначить данную хорду через a, путем решения системы:

$$3z-z^3=a,$$
$$3y-y^3=z,$$
$$5x-5x^3+x^5=y.$$

Добавим, что за столь удачным для Виета исходом этого состязания последовало другое, принесшее ему такую же славу в совершенно другой области. Он предложил со своей стороны задачу — снова найти построение окружности, касающейся трех данных окружностей, построение, уже выполненное когда-то Аполлонием в его утерянном труде „О касаниях", о содержании которого сообщает Папп. Роумен смог решить эту задачу только с помощью конических сечений, из которых каждое представляет собою геометрическое место центров всех окружностей, касающихся двух данных; Виета же вскоре после этого указал в сочинении, в котором он называет себя горделивым именем Apollonius Gallus — галльский (т. е. французский) Аполлоний — изящное геометрическое построение, выполнимое при помощи только линейки и циркуля. В результате этого поражения Роумен стал ревностным почитателем Виета; вскоре после этого он даже ездил к нему.

В связи с найденною Виета зависимостью между хордами дуг, находящихся друг с другом в простых отношениях, укажем здесь его вывод выражения для π, хотя это и не касается теории уравнений. Если мы обозначим через r и ρ_n соответственно радиус круга, описанного около правильного n-угольника с площадью f_n, и радиус круга, вписанного в него, то, как легко видеть,

$$f_n : f_{2n} = \rho_n : r = \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Для $n=4$ мы имеем $f_4 = 2r^2$. Полагая последовательно $n = 4, 8, 16, \ldots$ и замечая, что f_{2^ν} имеет пределом площадь πr^2 круга, путем перемножения полученных таким образом равенств находим:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{4}\cdot\cos\frac{90^\circ}{8}\ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots$$

Указанное определение π замечательно тем, что площадь круга вводится как предел и что здесь мы имеем первое применение бесконечного произведения. Сходимость этого произведения следует как раз из доказанного предложения, если только предположить или доказать другим способом (как это делает, например, Евклид), что площадь круга является пределом площади правильного вписанного многоугольника при неограниченном увеличении числа сторон последнего. Прямое доказательство сходимости было бы нужно только в том случае, если бы мы, наоборот, хотели именно этим путем получить уверенность, что площадь круга имеет конечное и определенное значение. Ясно, что Виета об этом не думал, и отсутствие доказательства сходимости в силу этого здесь вполне естественно.

Хотя мы и говорили о Виета как об исследователе, в руках которого уравнения деления угла оказали алгебре особенно большую услугу, однако задача Роумена, которую он предложил, не будучи знаком с работами Виета, свидетельствует о том, что Виета не был единственным математиком, установившим связь между геометрической проблемой деления угла и алгебраической проблемой решения соответствующего уравнения. В этом отношении заслуживают внимания и другие авторы. Особенно надо отметить Бюрги, исследования которого носят следы влияния нидерландских математиков, и исследования Кеплера, из сообщений которого мы знаем об этих работах Бюрги. Оба эти ученых, подобно Виета, обратили внимание как на разложение уравнений на уравнения низшей степени, так и на значение различных корней для задачи деления круга. Так, по поводу приведенного на стр. 113 уравнения, служащего, в случае, если правая часть его равна нулю, для определения стороны правильного семиугольника, Кеплер, очевидно, в согласии с Бюрги, указывает, что остальные корни его представляют собою диагонали семиугольника, т. е. стороны звездчатых семиугольников. Быть может, в связи с этим наблюдением стоит то, что Кеплер в добавление к известным с древних времен выпуклым правильным многогранникам нашел два таких, грани которых пересекаются друг с другом подобно сторонам звездчатого многоугольника. Пуансо (Poinsot) в XIX в. доказал, что таких многогранников существует даже три. Они отличны от полуправильных многогранников Архимеда.

Бюрги дал таблицу, в которой сопоставлялись уравнения деления угла на n равных частей до $n = 20$. О применении ее, которое он имел в виду прежде всего, мы будем говорить в следующем отделе.

5. Техника вычислений до изобретения логарифмов.

Хотя алгебраические уравнения в общем изложении Виета представляли известный самостоятельный интерес, однако он сам нисколько не забывал, что конечной целью его исследований должно быть числовое определение корней уравнений с данными числовыми коэфициентами. Преобразования должны были служить лишь средством для приведения уравнения к такому виду, чтобы вычисление корней существенно облегчалось или сводилось к применению раз навсегда установленных правил. Так, корни уравнений можно было найти, если удавалось выразить их через корни двучленных уравнений; если это не удавалось, то стремились по крайней мере сводить уравнения к трехчленным.

При составлении уравнений деления круга и угла также имели в виду главным образом вполне определенные и практически важные вычисления, в первую очередь составление тригонометрических таблиц и определение значения π. Особенно это относится к применению, которое дал этим уравнениям Бюрги,

Раньше чем перейти к рассмотрению достигнутых им результатов, сделаем обзор того, какими средствами для вычислений располагали вообще в то время. Уже у Региомонтана десятичная система сменила принятое раньше в астрономических и тригонометрических вычислениях деление на 60 частей, заставлявшее еще ближайших предшественников Региомонтана принимать радиус равным 600 000. Региомонтан, полагая радиус равным не 1, а 10^7, получал в большинстве случаев те же преимущества, как при употреблении десятичных дробей, которые таким путем переходят просто в целые числа. Отсюда было естественно пойти еще дальше, принимая в тех или иных случаях за единицу еще более высокую степень десяти. Цифры целого и десятичные знаки должны были тогда различаться с помощью каких-нибудь обозначений. Предложения такого рода делались уже в начале XVI в. немецкими коссистами (алгебраистами) и автором книги по арифметике Рудольфом, и Виета действительно ввел десятичные знаки в свои вычисления. Так, он дает значение π, указывая, что половина окружности радиуса 100 000 равна $314\,159\underline{^{265\,56}}$, и определенно отмечает преимущества этой записи, при которой, обращаясь в ту или другую сторону, находим десятые, сотые и тысячные, или десятки, сотни и тысячи. В других местах Виета пользуется для отделения цифр целого от десятичных знаков вертикальною чертою или ограничивается тем, что пишет десятичные знаки более мелкими цифрами.

Среди различных математиков, которые, повидимому, самостоятельно пришли к тем же мыслям, надо прежде всех назвать Стевина, не только видевшего в десятичных дробях полезное орудие ученого-вычислителя, но усердно ратовавшего в своей уже упоминавшейся книжечке „La Disme“ за введение десятичных подразделений в систему мер длины, веса и монетных единиц, что равносильно введению десятичных дробей в простейшие практические расчеты. При вычислениях с десятичными дробями он обозначает, в связи со своим способом обозначения степеней (стр 99), единицы, десятые, сотые и т. д. помощью символов ⓪, ①, ②, ..., которые при выполнении действий ставятся над соответствующими числовыми колоннами. Он указывает, как надо производить сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Иобст Бюрги ограничивается тем, что обозначает единицы поставленным внизу нулем или отделяет единицы от десятых посредством тире. Если не считать предложения, имеющегося уже у великого арабского тригонометра Абул Вафа, то Бюрги является первым, понявшим выгоды. которые получаются, если в тригонометрических таблицах положить радиус равным не степени десяти, но просто единице. Все правила при этом действительно упрощаются; проистекающие же отсюда затруднения устраняются применением десятичных дробей. Выкладки с ними приводят к сокращенному умножению; Бюрги показывает на примере, как производить его.

Что касается числового определения корней уравнения, то для уравнений, которые решались алгебраически, оно было связано прежде всего с выполнением операции извлечения корня. Извлечение квадратных и кубичных корней было известно раньше; чтобы извлекать по существу тем же способом корни высших степеней, надо было только знать биномиальные коэфициенты. Общие правила для образования последних дал уже Штифель (стр. 106), вполне понимавший значение этих коэфициентов при извлечении корней. Особые правила для самого выполнения действия были установлены, помимо Штифеля, еще Тартальей, Кардано, Виета и др.

Мы не будем на этом останавливаться, так как извлечение корней представляет лишь частный случай по отношению к числовому решению уравнения, имеющего больше двух членов. Образцы такого решения были даны уже в средние века Леонардо из Пизы и позже арабами в Персии (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 208 и 216). Оно может быть выполнено с помощью „правила двух ложных положений" (regula duorum falsorum), т. е. простой интерполяцией более точных приближенных значений между уже найденными (стр. 186 упомянутой книги) или же в связи с обычным приемом извлечения корней; первый способ находим мы в Regula aurea, правиле, устанавливаемом Кардано в „Ars magna". Метод Стевина дает последовательно значащие цифры и десятичные знаки искомого числа путем простого подбора, причем не дается какого-либо правила для уменьшения числа этих проб. Прием Виета, стоящий ближе всего к обычному извлечению корня, получил наибольшее развитие; поэтому мы вкратце разберем его.

Прежде всего Виета, насколько возможно, заботится о том, чтобы отделить отыскиваемый корень от других. Он не обладает какими-либо общими правилами для разделения корней, но умеет выполнять его по крайней мере для трехчленных уравнений, к которым он охотно сводит и другие в тех случаях, когда может это сделать. Мы видели на стр. 108, что Виета умел определять число корней такого уравнения. Чаще всего рассматривает он такие уравнения, которые имеют только один (положительный) корень. Если таких корней имеется два, как в уравнении

$$ax - x^3 = b,$$

то Виета разделяет их с помощью значения $\frac{3b}{2a}$, которое они имели бы, если бы были равны, и которое, как он показывает, должно лежать между обоими корнями. Мы предпочитаем, однако, показать его прием на уравнении, имеющем только один корень, именно на уравнении:

$$x^3 + px = q,$$

в котором p и q — целые (и положительные) числа, и притом q — число многозначное, значительно большее, чем p. Так как

$x < \sqrt[3]{q}$, то можно сперва попробовать, не будет ли первой цифрой x первая цифра $\sqrt[3]{q}$; если нет, то пробуем последовательно убывающие цифры. Если таким образом вычислено приближенное значение $x = a_1$, то положим $x = a_1 + x_2$ и найдем остаток:

$$R_1 = q - (a_1^3 + pa_1) = (3a_1^2 + 3a_1 x_2 + p) x_2 + x_2^3.$$

Отбрасывая x_2^3 и заменяя в скобках x_2 через 1, мы получаем, если $x_2 > 1$:

$$x_2 < \frac{q - (a_1^3 + pa_1)}{3a_1^2 + 3a_1 + p}.$$

Пробуем далее, не будет ли первая цифра результата, получающегося в правой части неравенства, первой цифрой x_2; если нет, то пробуем последовательно убывающие цифры. Обозначая найденную таким образом цифру с соответствующим числом нулей через a_2, мы получаем новое приближенное значение $x = a_1 + a_2$, в котором вычислены уже две цифры. С этим значением и остатком

$$R_2 = R_1 - (3a_1^2 + 3a_1 a_2 + p) a_2 - a_2^3$$

поступаем далее аналогичным образом. Виета не поясняет своего приема, как это сделали мы, формулами, а устанавливает для отдельных действий вполне определенный порядок, соответствующий употребительному еще и теперь при извлечении кубичных корней; рассмотренная нами операция и является расширением такого извлечения.

Прием Бюрги не столь систематичен. По существу Бюрги находит приближения способом „двух ложных положений". Он применяет свой метод к очень точным вычислениям, служащим для составления тригонометрических таблиц. Так, он находит путем проб, что сторона правильного девятиугольника, определяемая уравнением:

$$9 - 30x^2 + 27x^4 - 9x^6 + x^8 = 0,$$

лежит между 0,68 и 0,69. Первая интерполяция дает тогда две следующие цифры 40, а вторая интерполяция четыре дальнейшие цифры 4029. Так Бюрги получает $x = 0{,}68404029$.

Вообще в рассматриваемое нами время составление тригонометрических таблиц и тесно связанное с ним вычисление π играют большую роль. Кроме таблиц Региомонтана мы упоминали уже (стр. 115) о маленьком „Уставе" Ретика (1551), которым он, однако, не ограничился. В его большом труде „Opus Palatinum", изданном после его смерти его сотрудником Ото, вычислены шесть геометрических величин: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс (правда, иначе названные) для радиуса 10^{10} и дуг, последовательно увеличивающихся на 10 сек. Питиск при-

пересмотре этого труда, в котором погрешности были неизбежны, пошел в некоторых пунктах дальше. Самостоятельным составлением таких таблиц занимались и другие; такие таблицы есть в „Математическом уставе" („Canon mathematicus") Виета, знавшего, впрочем, „Устав" Ретика; Бюрги начал составление оставшейся неизданной большой таблицы синусов для дуг, последовательно увеличивавшихся на 2 сек. Значение π было определено с 35 десятичными знаками Лудольфом Цейленом (Ludolph van Ceulen); результат этот получил название лудольфова числа. Хорошее при всей своей простоте приближение $\frac{355}{113}$ было найдено Адрианом Антоничем (Adriaen Anthonisz).

Что касается способа вычислений, то важно было прежде всего с особой точностью найти синус или хорду очень малой дуги. Для этого пользовались уже рассмотренными нами уравнениями деления угла. Другие просто применяли архимедов прием деления пополам. Так, Виета нашел $\sin 1'$, отыскивая сторону вписанного многоугольника с $3 \cdot 2^{11}$ сторонами и описанного многоугольника с $3 \cdot 2^{12}$ сторонами.

Для облегчения дальнейшего составления таблиц употреблялись разнообразные приемы. Так, Виета, найдя синусы углов до 60°, получал дальнейшие путем простого сложения, пользуясь соотношением:

$$\sin(60^\circ + A) = \sin A + \sin(60^\circ - A).$$

Для постепенного вычисления $\sin mx$ и $\cos mx$ при последовательно увеличивающихся значениях m Виета обладал средством, которое, как мы видели, он применял уже к образованию алгебраических выражений этих величин (стр. 119). Тем же последовательным вычислением пользуется при составлении таблиц и Ретик. Снеллий добавил к этому применение различных других соотношений между синусами углов, связанных простой алгебраической зависимостью, и получил таким образом способ определять для ряда синусов, уже вычисленных с некоторою точностью, постепенно все большее и большее количество десятичных знаков. Посредством формул:

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = 1 + 2\sin a + 2\sin 2a + \ldots + 2\sin na$$

при $(n+1)a = 90^\circ$ и

$$\operatorname{cosec}\frac{a}{2} = 2\left(\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{3a}{2} + \ldots + \sin\frac{2n-1}{2}a\right)$$

при $na = 90^\circ$ он сводит определение тангенса и секанса к простому сложению. При определении секансов уже раньше применялась еще более простая формула:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \sec a,$$

принадлежащая мало известному математику Шулеру (Schuler).

Другим вспомогательным средством, которым начали пользоваться при составлении таблиц, были разности различных порядков; особое значение это средство получило, однако, несколько позже, при вычислении таблиц логарифмов, в связи с которыми мы и рассмотрим его в следующем отделе.

Снеллию принадлежат неравенства, служащие для вычисления π:

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} < x < \operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3};$$

первое из них было знакомо уже в средние века Николаю Кузанскому (Nicolaus Cusanus, 1401—1464).

Новые средства для всех этих вычислений появились, как мы увидим, в связи с зарождением исчисления бесконечно-малых.

Что касается самих тригонометрических выкладок, производившихся при помощи таблиц, то при выполнении их до изобретения логарифмов естественно было стараться избегать умножений и делений и отдавать предпочтение правилам, требующим только сложений и вычитаний. Соотношения

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$
$$2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

позволяли преобразовывать в сумму или разность также и произведение $\sin x\cos y$ (в то время косинус рассматривался только как синус дополнительного угла). Так как расчеты велись только с положительными величинами, то нужны были оба указанные правила; выбор между ними делался в зависимости от величины углов.

Последняя из этих формул была доказана уже значительно раньше жившим в Египте арабским астрономом Ибн Юнусом, умершим в 1008 г. Он составил так называемые хакимовы таблицы (Хаким — правитель Египта, 996—1021). Как Ибн Юнус, так и употреблявшие тот же метод совершенно независимо от него позднейшие европейские математики не пользуются при выводе формулою для $\sin(x+y)$, но применяют, как Птоломей в „Аналеммах", повторное проектирование, которым пользуются и теперь при доказательстве последней формулы. Мы приведем особенно простое доказательство первой из формул, принадлежащее Виета, у которого она впервые принимает следующий вид:

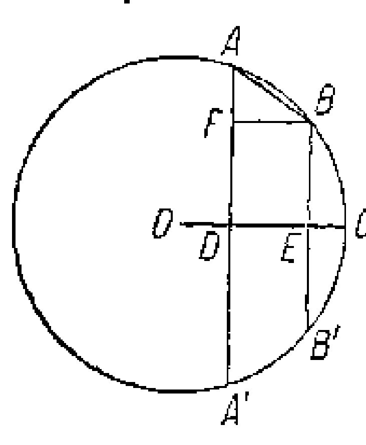
$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Пусть будет (черт. 2) $CA=\alpha$, $CB=\beta$. Если мы проведем AD и BE перпендикулярно к радиусу OC, и BF параллельно OC, то, принимая для удобства радиус равным 1, будем иметь:

$$\cos\beta - \cos\alpha = DE = AB\sin FAB = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = FA = AB\cos FAB = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Мы уже видели, как эти формулы применялись Виета для нахождения синусов и косинусов кратных дуг (стр. 119). Рассмотрим теперь их использование для вычислительных целей, получившее название простаферетического метода. Название это происходит от греческих слов „простезис" и „афайрезис" — прибавление и отнятие; оно указывает на основную идею метода, состоящую в том, чтобы умножение и деление свести к сложениям и вычитаниям; та же идея позднее легла в основу логарифмических вычислений.

Первоначально простаферетический метод употреблялся только в таких случаях, когда величины, которые должны были быть перемножены в данной задаче, были сами синусами (косинусами). Арабы применяли этот прием только в некоторых, вполне определенных случаях; это видно из того, что в доказательстве Ибн Юнуса принимается, что x есть высота полюса, а y — склонение звезды. В новое время им пользовался при выполнении одного астрономического расчета Вернер из Нюрнберга, не содействовавший, однако, дальнейшему его распространению. Общее применение метод получил лишь позже, когда он был снова открыт Тихо-Браге с его помощником Паулем Виттихом из Бреславля. Насколько широко практиковался он ими, видно из того, что в упомянутой ранее тригонометрической рукописи Тихо-Браге бóльшая часть правил для решения треугольников дана в такой простаферетической форме. Так, например, правило для вычисления стороны a сферического треугольника по двум сторонам b и c и углу A имеет там следующий вид (мы употребляем современные обозначения):



Черт. 2.

$$\cos a = \frac{1}{2}[\cos(b-c) + \cos(b+c) + (\cos(b-c) - \cos(b+c))\cos A].$$

Ученики и друзья Тихо-Браге содействовали распространению этого метода. В частности, Виттих ввел его в 1584 г. в обсерватории ландграфа Вильгельма в Касселе, где особенно большой интерес проявил к нему Бюрги. Из Касселя простаферетический метод с данным ему Бюрги обоснованием стал распространяться дальше, чему немало содействовало сочинение противника Тихо-Браге, Раймара Урса (Raimarus Ursus).

Этот метод может быть применен, однако, не только к перемножению двух синусов, но, подобно логарифмам, и к перемножению двух произвольных сомножителей a и b. Достаточно только положить $a = \sin x$, $b = \sin y$. Для этого, правда, надо, чтобы было $a < r$, $b < r$, где r — радиус, для которого вычислена таблица синусов; но этому требованию можно удовлетворить, разбивая сомножителей на слагаемые, представляющие собою произведения степеней числа 10 на числа, меньшие r.

Если пользоваться при этом таблицей секансов, то можно делителя заменить множителем. Так, при вычислении $10^n \cdot \frac{a}{b}$, где $a < r$, $b > r$, сперва из равенств $a = \sin x$, $b = \operatorname{cosec} y$ находят x и y и затем применяют метод.

У нас нет более точных сведений о том, пользовался ли Тихо-Браге методом в таком расширенном виде. Почва для такого расширения была, во всяком случае, вполне подготовлена, и, когда вычислительные приемы Тихо-Браге получили известность, к нему пришли одновременно и совершенно самостоятельно в различных местах. Так, применение метода к перемножению любых величин было предложено в письме к Тихо его другом Курцие (Curtius, непосредственно после того, как тот познакомился с методом по сочинению Урса. Такое же расширенное применение практиковалось и Бюрги; известно, например, что, вычисляя по приведенному выше правилу $\cos a$, он пользовался этим приемом для выполнения остающегося еще там умножения $\cos(b-c) - \cos(b+c)$ на $\cos A$. Целью его при составлении очень подробных таблиц синусов (стр. 128) было как раз приспособление их к таким простаферетическим вычислениям. Однако работы самого Бюрги содействовали тому, чтобы сделать ненужным простаферетический метод, поскольку Бюрги был одним из авторов вскоре изобретенного логарифмического метода вычислений. Многие астрономы, как, например, Лонгомонтан, предпочтительно пользовались простаферетическим методом даже тогда, когда стали известны логарифмы и появились логарифмические таблицы. Полное изложение простаферетического метода было дано Клавием в его „Астролябии".

6. Изобретение и вычисление логарифмов.

Как велика была потребность в средстве для упрощения вычислений, подобном тому, какое дают нам теперь логарифмы, видно из большого успеха, выпавшего на долю простаферетического метода. Теоретическая подготовка учения о логарифмах уходит корнями в далекое прошлое. Она связана с развитием понятия степени и с употреблением тех чисел, которые мы называем показателями. Правила для действий над этими числами при операциях над степенями одного и того же основания можно найти в зачаточной форме уже у Диофанта. Им или его предшественниками были введены особые обозначения для некоторых положительных и отрицательных степеней неизвестной (с показателями от -6 до $+6$; в связи с усовершенствованиями символики правила эти получали дальнейшее развитие. Степени здесь представляли собою произведения нескольких равных, обычно неизвестных, чисел или дроби с числителем 1 и таким произведением в знаменателе, причем показатель был, естественно, целым числом. Более общее понимание степени появилось

в связи с учением о пропорциях и прогрессиях. Со времени Евдокса отношение служило общим выражением величины, и n-я степень отношения $\frac{b}{a}$ у Евклида представляется как отношение между $(n+1)$-м и 1-м членом непрерывного ряда пропорций, в котором a — первый член, b — второй (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 105). Такое понимание, обычно характеризуемое как геометрическое (в связи с чем получила свое название и *геометрическая прогрессия*), мы снова находим впоследствии у арабов. Мы видели, далее (стр. 103), что его в полной чистоте сохранял еще Виета. Правда, у Виета при этом получалось некоторое противоречие с его символикой, в которой степени рассматриваются как произведения равных сомножителей, так что эти последние, для того чтобы было возможно перемножение их, должны были бы, собственно, быть рациональными. Показатели, с помощью которых характеризуются члены геометрического ряда, представляют собою *натуральные числа* и образуют *арифметическую прогрессию*. Последнее название применялось ко всем разностным рядам, так как вставляемые между двумя числовыми величинами (т. е. рациональными числами) промежуточные члены (средние арифметические) снова представляют собою рациональные числа и, следовательно, могут быть выражены арифметически.

Таким образом сопоставление различных степеней одного и того же основания и их показателей, или чисел и их логарифмов, равнозначаще с почленным сопоставлением геометрической и арифметической прогрессий. Это обстоятельство Непер, главный основоположник учения о логарифмах, отметил уже самим словом „логарифмы" (если толковать его, подобно Кеплеру, как ἀριθμοί τοῦ λόγου — числа отношения). На пути такого сопоставления геометрической и арифметической прогрессий и была подготовлена теоретическая база для логарифмов. Уже Орезм из возможности вставлять в арифметическом ряду между натуральными числами дробные вывел правильное заключение относительно того, как надо выражать соответствующие величины геометрического ряда, и пришел, таким образом, к степеням с дробными показателями. Шюке дал подобным же соображениям практическое применение (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 220).

В новое время почву для логарифмов подготовляли Штифель и Стевин, оба, однако, совсем по-разному. Штифель особое внимание обращает на связь между операциями, производимыми, с одной стороны, над членами геометрического ряда, с другой — над членами сопоставленного с ним арифметического. Он устанавливает, что умножению, делению, возведению в степень и извлечению корня в первом соответствуют сложение, вычитание, умножение и деление во втором. В частности, он сопоставляет ряд натуральных чисел, начинающийся нулем, с рядом степеней одного и того же основания, начинающимся единицей. Числам

первого ряда Штифель дал употребительное и поныне название „показателей" (Exponenten); он определенно отмечает, что соответствующий единице показатель есть нуль, т. е. что $a^0 = 1$. Подобно Шюке, он занимается также рассмотрением показательных уравнений и приходит таким путем, как Орезм и Шюке, к мысли о дробных показателях. Так, например (мы передаем ход его мыслей сокращенно, пользуясь современными обозначениями), из уравнения

$$\frac{2187}{128} = \left(\frac{27}{8}\right)^x$$

он прежде всего находит, троекратно умножая его на $\frac{8}{27}$, что целая часть x равна 2, так как

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2187}{128} \cdot \frac{8}{27} = \frac{81}{16}; \quad \frac{81}{16} \cdot \frac{8}{27} = \frac{3}{2} > 1; \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4}{9} < 1.$$

Так как, далее,

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

то

$$x - 2 = \frac{1}{2}(3 - x),$$

откуда

$$x = 2\frac{1}{3}.$$

Речь здесь идет все время только о том, чтобы обобщить операции над степенями одного и того же основания, но отнюдь еще не о том, чтобы воспользоваться ими для сведения более сложных действий к более простым (умножения к сложению и т. д.). Для этого нужны были прежде всего таблицы. Такие таблицы по существу были составлены уже Стевином. Однако сам Стевин не видел того, что ими можно пользоваться как таблицами для упрощения соответствующих вычислений. Его таблицы имеют совсем другое назначение. Это — таблицы процентов, соответствующие ряду различных значений процентной таксы r. В них даются как значения $\frac{1}{(1+r)^n}$, так и значения $\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{(1+r)^n}$. Первые таблицы представляют собой настоящие антилогарифмические таблицы; для наименьшего из данных значений r (0,01) основание столь близко к единице, что соответствующая таблица, хотя она и составлена только для целых значений n, могла бы быть с успехом применена к логарифмическим вычислениям, в которых не требуется особой точности. Об этом, однако, как было уже упомянуто, у Стевина нет и речи.

Таким образом ни у Штифеля, ни у Стевина мы не имеем еще логарифмов в полном смысле этого слова. Из нашего обзора

мы видим, что изобретение логарифмов принесло нечто совершенно новое, а не только сделало доступными широким кругам те средства, которые отдельными исследователями применялись и ранее.

Изобретены были логарифмы независимо друг от друга двумя учеными — Непером и Бюрги.

На первом месте с полным правом должен быть поставлен Непер, сразу представивший свои логарифмы в чрезвычайно развитой с теоретической стороны форме, указавший способы очень легкого их вычисления и непосредственно принимавший участие в тех целесообразных изменениях, с помощью которых Бригг сделал логарифмы более удобными для практических применений и придал им теперешний их вид. Непер первый и опубликовал свои логарифмы, хотя подготовительные работы обоих этих авторов, Бюрги и Непера, насколько известно, протекали одновременно. Но Бюрги так долго держал втайне свои методы, что Кеплер с полным основанием мог упрекать его за эту скрытность, лишившую его чести столь важного изобретения. После того как логарифмы Непера стали общим достоянием, логарифмы Бюрги не могли уже получить распространения.

Введение логарифмов само по себе представляет столь значительный успех, что интересно познакомиться с теми различными формами, какие им были даны обоими авторами. Начнем с логарифмов Бюрги, как наименее совершенных. Они появились в свет в напечатанном в 1620 г. сочинении: „Арифметические и геометрические таблицы прогрессий" („Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen") и представляют собою сопоставление членов 0, 10, 20,... арифметической прогрессии с членами 100 000 000, 100 010 000, 100 020 001,... геометрической. Первые напечатаны красной краской и носят название „красных чисел", вторые — черной и называются „черными числами". Применение, которое можно дать этой таблице, основано на отмеченной Штифелем связи между действиями над членами обоих рядов; лучше всего позволит нам уяснить дело замечание, что красные числа представляют собою логарифмы черных, разделенных на 10^8, при основании $\sqrt[10]{1{,}0001}$. Введенный в черных числах множитель 10^8, красное число которого есть 0, служит для того, чтобы по возможности долго избегать дробей; по существу этим осуществляется превращение таких дробей в десятичные. Так как ряды расположены по членам арифметической прогрессии красных чисел, то таблица является в первую очередь антилогарифмической. Для Бюрги, хорошо знакомого, как мы видели в предыдущем отделе, с интерполяцией, это обстоятельство не могло служить помехой при пользовании таблицами. В частности, он находит помощью интерполяции, что черному числу 10^9 соответствует красное 230 270,022. Так как 10^8 имеет своим красным числом (или логарифмом) 0 и является, таким образом, как бы единицей, то найденное число играет почти ту же роль, как



Jhone neper of merchistoun

Непер

1550 — 1617

Гравюра с современного портрета

log 10. Так его использует и Бюрги, вычисляющий вместо $\frac{a}{b}$, при $a < b$, $\frac{a \cdot 10^9}{b}$. Для этого он складывает красные числа, соответствующие a и 10^9, вычитает из суммы красное число, соответствующее b, и отыскивает соответствующее результату черное число. Дробь $\frac{a}{b}$ вычисляется при этом фактически с 9 десятичными знаками. Если, напротив, $a > b$, то, вычитая из красного числа, соответствующего a, красное число, соответствующее b, мы получаем красное число, соответствующее $\frac{a \cdot 10^8}{b}$, и таким образом дробь вычисляется с 8 десятичными знаками.

Таблица логарифмов Непера с пояснениями относительно пользования ею была опубликована уже в 1614 г. в „Описании удивительной таблицы[1] логарифмов" („Canonis mirifici logarithmorum descriptio"). Непрерывность связи между числами и логарифмами, к которой Бюрги приближается путем применения основания, весьма мало разнящегося от единицы, в неперовом определении логарифма выступает вполне ясно. Непер предполагает, что две точки, которые мы обозначим через X и Y, одновременно движутся по двум прямым из положений O и A, X — с постоянною скоростью, а Y — со скоростью, относящейся к скорости точки X, как расстояние YB от Y до другого конца отрезка AB относится ко всему отрезку AB. Тогда число, изображаемое отрезком OX, есть логарифм числа, соответствующего YB. Если мы положим $OX = x$, $YB = y$ и $AB = r$, то это определение, в переводе на современный язык, говорит нам, что

A Y B

O X

Черт. 3.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{r}.$$

Так как при $x = 0$ мы имеем $y = r$, то интегрирование написанного уравнения дает нам:

$$\frac{x}{r} = -\ln\frac{y}{r},$$

где символом ln обозначен натуральный логарифм. Таким образом, если отвлечься от знака, то неперов логарифм, разделенный на постоянную r, есть не что иное, как натуральный логарифм числа y, разделенного на r. Характерные для логарифмов свойства, вкратце сводящиеся к тому, что когда величины x образуют арифметический ряд, начинающийся с нуля, величины y представляют собою геометрический ряд с первым членом r, вытекают из определения Непера сами собой.

Отличие неперовых логарифмов от натуральных, к которым, казалось бы, естественно было притти в первую очередь и при

[1] Дословно: „свода".

его способе рассуждения, объясняется тем применением логарифмов, которое он имел в виду прежде всего. Ближайшей его целью было получение логарифмов не натуральных чисел, а тригонометрических функций. Величина r, которую он полагает равной 10^7, является тогда радиусом круга. Если y представляет соответствующую этому радиусу линию синуса или косинуса, то $\frac{y}{r}$ есть как раз величина, которую мы теперь называем синусом или косинусом; она меньше единицы, и неперовы логарифмы, дающие нам значение $-r\ln\frac{y}{r}$, представляют собою, таким образом, положительные числа. Непер вполне ясно сознает, что согласно его определению логарифмы чисел, больших r, отрицательны, и определенно указывает, что в его таблицах логарифмы синуса и косинуса, взятые с обратными знаками, служат логарифмами косеканса и секанса. Одна из колонн его таблиц содержит, далее, разности между его логарифмами синусов и косинусов и дает, таким образом, при том или ином выборе знака, логарифмы тангенсов и котангенсов. На чертеже отрицательные логарифмы соответствуют точкам X и Y, которые не достигли еще положений O и A. Как мы увидим сейчас, такие точки рассматриваются даже при вычислении логарифмов.

Указания относительно способа этого вычисления Непер дал в „Устройстве удивительной таблицы логарифмов" („Canonis mirifici logarithmorum constructio"), сочинении, вышедшем только в 1619 г., но написанном раньше, чем „Описание". Слово „логарифм" здесь еще не встречается, — вместо него употребляется термин „numerus artificialis" (искусственное число). В основе вычисления таблиц лежит нахождение логарифма числа $y = r-1$, которое изображается точкою Y, прошедшей, выйдя из A, расстояние 1. Непер пользуется для этого тем обстоятельством, что, по определению, скорость Y уменьшается. Так как скорость, с которою точка Y проходит через A, равна той, с которою точка X проходит через O, то отрезок $r-y$, отложенный вправо от A, меньше, чем соответствующий отрезок x. По той же причине в то время, когда точка X находилась на таком же расстоянии x влево от O, точка Y была влево от A на большем расстоянии. Расстояние это равно $\frac{r}{y}(r-y)$; его легко найти, приняв во внимание, что когда значения x образуют арифметическую прогрессию, то значения y составляют прогрессию геометрическую. Таким образом мы имеем общее соотношение:

$$r-y < x < \frac{r}{y}(r-y);$$

полагая $y = r-1 = r\left(1-\frac{1}{r}\right)$, $x = x_1$, получаем:

$$1 < x_1 < \frac{r}{r-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}}.$$

9 min	Sinus	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057338	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30
						min
						Gr. 80

Страница из логарифмических таблиц Непера

Значение $r = 10^7$ дает нам:

$$1 < x_1 < 1{,}000\,000\,1\,000\,000\,1\ldots$$

Непер выбирает приближенное среднее значение и принимает $x_1 = 1{,}000\,000\,05$. Этот результат совпадает с тем, который мы получили бы, ограничившись в известном нам теперь разложении

$$x_1 = -r\ln\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 1 + \frac{1}{2r} + \frac{1}{3r^2} + \ldots$$

двумя первыми членами; точные цифры имеем мы здесь до 14-го знака.

Такая точность является достаточной, чтобы в составленных при помощи этого результата таблицах иметь семь правильных цифр. Непер и ограничивается этим числом цифр, и если его таблицы в конце не совсем согласны с истиной, то это является следствием не теоретической ошибки, а ошибки в вычислении, о которой мы упомянем далее.

После того как найдено значение x_1, оно применяется прежде всего к составлению таблицы антилогарифмов, содержащей значения y, соответствующие значениям x; Непер называет эту таблицу таблицей радикалов. Значению $x_n = nx_1$ соответствует $y_n = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n$, и последовательное вычисление y_n облегчается тем, что

$$y_n = y_{n-1}\left(1 - \frac{1}{r}\right) = y_{n-1} - 0{,}0000\,00\,1\,y_{n-1},$$

т. е. что y_n может быть образовано вычитанием из y_{n-1} числа с теми же цифрами, перенесенными на семь знаков вправо. Это чрезвычайно простое вычисление имеет только те неудобства, что раз сделанная ошибка повторяется все время и в дальнейшем и что вследствие малости величины $\frac{1}{10^7}$ вычисляется больше чисел y, чем это необходимо для того, чтобы сообщить желательную точность окончательным таблицам. Последний недостаток Непер устраняет тем, что пользуется также знаменателями

$$1 - \frac{1}{10^5},\quad 1 - \frac{1}{2\cdot 10^3},\quad 1 - \frac{1}{10^2},$$

допускающими подобное же простое вычисление; соответствующие им разности в ряду величин x находятся из уже составленной части таблицы.

Упомянутая выше ошибка возникла уже при вычислениях со вторым знаменателем $1 - \frac{1}{10^5}$. Для y_{50}' или $10^7\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)^{50}$ Непер получает $9\,995\,001{,}222927$, в то время как правильное значение равно $9\,995\,001{,}224804$. Если бы он продолжал вычисления с тем же знаменателем $\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)$, то во всем дальнейшем, т. е. в большей части таблицы, все числа y оказались бы умножен-

ными на $\frac{z}{y_{50}}$, где через z обозначено вышенаписанное неправильное значение. Другими словами, соответствующие этим числам логарифмы оказались бы уменьшенными на одну и ту же величину, т. е. было бы сдвинуто начало логарифмической шкалы.

Но Непер поступает иначе. Он округляет число до 9 995 000, внося соответствующую поправку в его логарифм, и в основу дальнейших вычислений кладет прогрессию чисел с знаменателем 0,9995. Как легко видеть, ошибка, сделанная Непером, приводит теперь к тому, что для большей части таблицы логарифмы уменьшаются в постоянном отношении к их истинным значениям; это уменьшение, правда, незначительно и составляет около $\frac{3}{8}10^{-6}$ истинного значения.

Эти логарифмы соответствуют поэтому не основанию e, а основанию η, определяемому из уравнения [1]:

$$\eta^{1-\frac{3}{8}10^{-6}} = e.$$

Основываясь на своей таблице радикалов, Непер составляет при помощи интерполяции таблицу, ближайшее назначение которой, как было уже упомянуто, заключается в том, чтобы давать логарифмы не чисел натурального ряда, а тригонометрических величин, соответствующих данным углам.

Отличие неперовых логарифмов от натуральных объяснялось, как мы видели, особым характером поставленных им целей. Когда же начали давать логарифмам и другие применения, то досадные последствия этого отличия не замедлили сказаться. Действительно, соответствие между сложением логарифмов и умножением чисел является полным только тогда, когда нуль,

---

[1] Для пояснения этого места необходимо предпослать следующее замечание. Как видно из вышеизложенного, „основанием" логарифмов у Непера служит по существу не e, а обратная величина $\frac{1}{e}$, ибо уравнение $\frac{x}{r} = -\ln\frac{y}{r}$ может быть переписано в виде $\frac{x}{r} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{r}\right)$. Но ни у Бюрги, ни у Непера нет речи о каком-нибудь „основании" логарифмов. Связать процесс получения таблицы с процессом возведения в степень не приходило в голову Бюрги. У Непера эта идея появилась позднее (см. ниже). Это и понятно, поскольку у обоих авторов речь идет только о сравнении двух прогрессий, геометрической и арифметической. Только после деления членов обеих прогрессий неперовых таблиц на 10^7 мы должны получить наши „числа" и их „логарифмы" (по основанию, близкому к $\frac{1}{e}$).

Сообразно с этим ошибку, сделанную Непером в вычислении, можно оценить, не модернизируя понятий, которыми пользуется Непер, так: „логарифму" 10^7 соответствует некоторый „радикал". При правильном расчете Непер получил бы для него значение, с точностью до седьмого знака, равное $10^7 \cdot \frac{1}{e}$. Но при допущенной им ошибке число это уменьшается (на единицу седьмого знака).

или слагаемое, не изменяющее суммы, соответствует единице, или множителю, не изменяющему произведения. Естественно было сверх того, имея в виду применение логарифмов к обыкновенным числовым выкладкам, связать их с десятичной системой.

Подобные соображения побудили уже Непера, заметившего еще раньше, что число, логарифм которого равен нулю, можно выбирать по произволу, предложить систему логарифмов, в которой $\log 1 = 0$ и $\log 10 = 10\,000\,000\,000$. Последний выбор, не отличающийся по существу от выбора $\log 10 = 1$, является лишь заменой вычисления логарифмов с 10 десятичными знаками. Непер, предложение которого было результатом совместного обсуждения с его другом Бриггом, сам указывает, что в этой системе $\log 2$ можно найти как число, на единицу меньшее, чем число цифр в $2^{10^{10}}$. Начало этого вычисления облегчается тем, что $2^{10} = 1024$, откуда тотчас же можно заключить, что $\log 2$ сравнительно немного отличается от $0{,}3 \cdot 10^{10}$.

Логарифмы с основанием 10 были вычислены впервые Бриггом, имя которого они носят и теперь. Логарифмы чисел первой тысячи он издал уже в 1617 г., в год смерти Непера. 14-значные таблицы логарифмов чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000 с пояснениями относительно их составления были опубликованы Бриггом в его труде „Логарифмическая арифметика" („Arithmetica logarithmica"). В этом труде Бригг обнаруживает свои вычислительные дарования. Он не только проявляет уверенность при выполнении сложных выкладок, но, что особенно важно, правильно оценивает степень их точности и устанавливает зависимость между последовательно найденными числами, на которой он основывает затем особого рода расширенную интерполяцию.

Если это ошибочное значение числа написать в виде $10^7 \cdot \frac{1}{\eta}$, то содержащееся в тексте выражение η через e можно получить так: число $\frac{1}{e}$, очевидно, должно получиться от возведения 0,9995 в степень $\frac{10^7}{m}$, где m — истинное значение логарифма числа $1 \cdot 9995000$:

$$\frac{1}{e} = (0{,}9995)^{\frac{10^7}{m}}.$$

Точно так же

$$\frac{1}{\eta} = (0{,}9995)^{\frac{10^7}{m'}},$$

где m' — ошибочное значение логарифма 9995000.

Отсюда получаем:

$$\eta = e^{\frac{m}{m'}} = e^{\frac{1}{1-\frac{3}{8}\cdot 10^{-6}}}$$

Прим. ред.

Кроме приема, примененного уже Непером для вычисления $\log 2$, Бригг пользуется следующим рассуждением. Повторным извлечением квадратного корня можно получить число $\sqrt[2^n]{10}$, логарифм которого равен $\frac{1}{2^n}$. Если положить, далее,

$$\sqrt[2^{n+1}]{10} = 1 + \alpha,$$

то

$$\left(\sqrt[2^{n+1}]{10}\right)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 = \sqrt[2^n]{10}.$$

Если вычисление продвинуто настолько далеко, что α^2 не влияет на сохраняемые десятичные знаки, то сравнение этих формул дает:

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right) = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10} - 1\right).$$

Записав это иначе, получим:

$$\frac{10^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \frac{10^{\frac{1}{2^{n+1}}} - 1}{\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

Мы видим, что для значений $z = \sqrt[2^n]{10}$ и $z = \sqrt[2^{n+1}]{10}$ величина $\frac{z-1}{\log z}$ имеет (с необходимой степенью точности) одно и то же значение. Отсюда заключаем, что и для промежуточных значений z, лежащих между $\sqrt[2^n]{10}$ и $\sqrt[2^{n+1}]{10}$, можно положить с той же степенью точности:

$$\frac{z-1}{\log z} = \text{constans} = 2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right).$$

Если извлечение $\sqrt[2^n]{10}$ выполнено до больших значений n, то мы получаем легкий способ вычисления логарифмов чисел, близких к единице. К таким числам можно притти путем повторного извлечения квадратного корня, исходя от любого числа, логарифм которого отыскивается. Если $z = \sqrt[2^m]{y}$, то, как легко видеть из предыдущей формулы, логарифм числа y получается из выражения:

$$\log y = \frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{y} - 1\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right)}.$$

Чем ближе само y к единице, тем меньше число m нужных здесь извлечений квадратного корня. Поэтому Бригг применяет также другие приемы, чтобы приблизить свои числа к единице. Чтобы найти $\log 2$, он вычисляет $\log \frac{2^{10}}{10^3}$, или $\log 1{,}024$; чтобы найти log сравнительно большого первоначального числа x, он пользуется следующим равенством:

$$\log x = \frac{1}{2}\left[\log \frac{x^2}{x^2-1} + \log(x+1) + \log(x-1)\right].$$

Здесь $\frac{x^2}{x^2-1}$ мало разнится от единицы, а $x+1$ и $x-1$ разлагаются на множители, логарифмы которых вычислены уже ранее.

При требующемся здесь повторном извлечении квадратного корня Бригг применяет своеобразный вид интерполяции. Раньше чем обратиться к его рассмотрению, заметим, что и обычной интерполяцией Бригг пользуется с большей полнотой, чем его предшественники. Как мы упоминали (стр. 126), простая интерполяция, при которой предполагается, что приращения двух связанных взаимной зависимостью переменных величин пропорциональны, так что первая разность, соответствующая равноотстоящим значениям таблицы аргументов, постоянна, представляет собою только применение старинного правила „двух ложных положений". При утомительных вычислениях таблиц скоро научились пользоваться постоянными (в границах некоторой степени точности) первыми разностями, с одной стороны, для контроля, с другой — в качестве средства для вычислений. Там, где первая разность не постоянна, постоянной может стать вторая, третья или одна из дальнейших разностей. При случае те или другие разности могут быть использованы, чтобы вычислить разности низшего порядка и в конце концов сам искомый ряд чисел. Особенно владел этим приемом, повидимому, Бюрги; так называемый „искусственный путь", который он избрал наряду с другими средствами для вычисления своей большой таблицы синусов, по некоторым дошедшим до нас сообщениям состоял как раз в употреблении разностей различных порядков. Ретик в части своих вычислений применял разности первых трех порядков. Они имеются в изданном Питиском сочинении „Математическая сокровищница" („Thesaurus mathematicus"), и Питиск определенно подчеркивает, что их однородность служит ручательством за правильность таблиц. Интерполяционное исчисление в собственном смысле слова возникает, однако, только тогда, когда разностями, соответствующими некоторому интервалу аргумента, пользуются для вычисления разностей, соответствующих меньшему интервалу. Бригг делает это в своем правиле, носящем название „Деление на пять частей" („Quinquisectio") и служащем для вычисления разностей всех порядков для пятой части интервала значений аргумента, для которого постоянна только высшая раз-

ность. Порядок этой высшей разности в формулах Бригга доходит до 20-го; в практических же приложениях он не так велик [1].

Своеобразный вид интерполяции, применяемый Бриггом при его извлечениях квадратных корней, является, как мы увидим, предвестником других новых методов. Бригг обращается к нему лишь тогда, когда доходит в своих извлечениях до чисел, весьма мало $\left(\text{меньше чем на } \frac{1}{1000}\right)$ отличающихся от единицы. Последовательные разности, которыми он пользуется, определяются следующим образом:

$$A = 1 + x - 1,$$

$$A_1 = \sqrt{1+x} - 1, \quad B_1 = \frac{A}{2} - A_1,$$

$$A_2 = \sqrt[4]{1+x} - 1, \quad B_2 = \frac{A_1}{2} - A_2, \quad C_2 = \frac{B_1}{4} - B_2,$$

. . . .

$$A_n = \sqrt[2^n]{1+x} - 1, \ B_n = \frac{A_{n-1}}{2} - A_n, \ C_n = \frac{B_{n-1}}{4} - B_n, \ D_n = \frac{C_{n-1}}{8} - C_n, \ldots$$

Сам Бригг пользуется обозначениями A, B, C без индексов роль последних выполняет расположение разностей. Разности A, B. C,... первоначально образуются путем указанных здесь вычитаний чисел, найденных непосредственным извлечением квадратного корня; дойдя до разности, которая настолько мала, что ее можно принять равной нулю, образуют, далее, из разностей высших порядков разности низших. Если, например, можно принять равной нулю F_n, а следовательно, с еще большим правом и F_{n+1}, то получается:

$$E_{n+1} = \frac{1}{32} E_n,$$

$$D_{n+1} = \frac{1}{16} D_n - E_{n+1},$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{8} C_n - D_{n+1},$$

$$B_{n+1} = \frac{1}{4} B_n - C_{n+1},$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} A_n - B_{n+1},$$

$$\sqrt[2^{n+1}]{1+x} = 1 + A_{n+1}.$$

Этот метод применяется затем при вычислении следующих корней, и так как разности уменьшаются, то чем дальше, тем

---

[1] Изложение правил, содержащихся в „Quinquisectio", завело бы нас слишком далеко. Ограничимся указанием на статью Gram в „Tidsskrift for Mathematik", 1876, стр. 12 и сл., или на статью Коппе в программе Андреевского реального училища в Берлине, 1893, стр. 30 и сл.

меньшее количество разностей приходится принимать во внимание; в конце концов для получения каждого A становится достаточно делить пополам предыдущее.

Можно чисто эмпирически убедиться в том, что указанный способ образования разностей быстро приводит к таким, которыми можно пренебречь, после чего можно пользоваться описанным выше приемом. Бригг, однако, не останавливается на этом, а образует выражения высших разностей через первую разность A (с тем же индексом). Если пренебречь степенями A выше десятой, то

$$B = \frac{1}{2} A^2,$$

$$C = \frac{1}{2} A^3 + \frac{1}{8} A^4,$$

$$D = \frac{7}{8} A^4 + \frac{7}{8} A^5 + \frac{7}{16} A^6 + \frac{1}{8} A^7 + \frac{1}{64} A^8,$$

. . . .

10-я разность $= 2\,805\,527\, A^{10}$.

Эти выражения можно получить, находя из

$$\sqrt[2^n]{1+x} = 1 + A,$$

путем последовательного возведения в квадрат:

$$\sqrt[2^{n-1}]{1+x} = 1 + 2A + A^2,$$

$$\sqrt[2^{n-2}]{1+x} = 1 + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4,$$

и т. д. Особый интерес этим выражениям сообщает то обстоятельство, что, будучи подставлены в написанные выше равенства, определяющее значение разностей, они дают для $1 + A_{n+1}$ или $\sqrt{1 + A_n}$ тот же результат, как и обобщенная формула бинома Ньютона.

Как мы видели, Непер вводит логарифмы при помощи процесса непрерывного движения. При передаче трактовки Непера мы поэтому сочли наиболее естественным воспользоваться диференциальным уравнением (стр. 135). Эта форма представления вполне соответствует тем формам, которые вскоре после этого получили распространение в исчислении бесконечно-малых. Таким образом работу Непера нужно рассматривать как подготовку одного из важнейших вопросов исчисления бесконечно-малых — теории диференциальных уравнений.

Дальнейшее развитие логарифмов еще теснее связано с зарождавшимся исчислением бесконечно-малых, в частности бесконеч-

ный ряд впервые появляется в связи с задачей вычисления логарифмов. Об этом мы будем говорить в последней части книги.

Уже из того, что было сказано выше о вычислении логарифмов, можно видеть, что развитие вычислительной техники подготовило почву для образования самого понятия бесконечно малой величины. Мы видели, как Бригг оперирует с величинами настолько малыми, что степени их с достаточно высоким показателем не оказывают влияния на те десятичные знаки, которые должны быть сохранены; это дает ему возможность без какой-либо ошибки в этих знаках принимать такие степени равными нулю. Отсюда не столь уже далек был и переход к представлению о таких величинах, высшие степени которых можно отбрасывать и в совершенно точных исследованиях. Не случайно поэтому, что первым, кто отважился дать таким „бесконечно малым" величинам их название и кто начал производить операции с ними, был Кеплер, нашедший помощью своих неутомимых вычислений эмпирическим путем законы движения планет; как раз при относящихся сюда исследованиях он тесно связал со своими выкладками соображения о бесконечной малости. Понятным становится также и то, что Бригг был одним из первых, кто примкнул к воззрениям Кеплера, считавшимся большинством противоречащими традиционной точной математике. Кеплер со своей стороны был одним из первых, кто понял большое значение логарифмов для практических вычислений; сам он широко пользовался этим новым средством. Некоторые математики, как, например, ученик Тихо-Браге, Лонгомонтан, считали „негеометрическим" это средство, заставлявшее ограничиваться лишь приближенными значениями. Однако такими приближенными значениями приходилось довольствоваться и в тригонометрических таблицах и при вычислении π; Лонгомонтан, впрочем, считал, что квадратуру круга можно действительно осуществить геометрически.

Появление логарифмов способствовало развитию преобразований, приводивших тригонометрические формулы к виду, удобному для логарифмирования. Особенно полезной оказывалась при этом формула Финке (стр. 116); действительное применение получала теперь и формула

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

геометрический вывод которой имеется в основных чертах у Ретика. Что касается сферической тригонометрии, то простаферетические преобразования получали теперь обратное применение: те же формулы, которыми раньше пользовались для того, чтобы представлять произведение в виде суммы или разности, стали применяться теперь для представления суммы или разности в виде произведения. Мы видим это уже у Непера. В своем „Описании" он выводит посредством таких преобразований из принадлежа-

щего Региомонтану выражения угла сферического треугольника через его стороны следующие соотношения:

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\,\sin b}},$$

$$\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\,\sin\frac{1}{2}(c-a+b)}{\sin a\,\sin b}}.$$

В добавлении к „Построению" он дает формулы, получившие по его имени название неперовых аналогий (т. е. пропорций):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{1}{2}C\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\cot\frac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

а также формулы, которые можно вывести из них, пользуясь полярными треугольниками. В „Описании" имеется, кроме того, логарифмическое вычисление угла по сторонам, которому Непер дает изящное доказательство, пользуясь стереографической проекцией.

7. Теория чисел, неопределенные уравнения и непрерывные дроби до Ферма.

Во все эпохи развития математики рассмотрение различных свойств целых чисел было предметом внимания не только математиков, но и людей довольно далеко стоящих от математических наук. В древности, например, рассматривались свойства совершенных и дружественных чисел, занимались также решением неопределенных уравнений в целых или в рациональных числах. Важные результаты в этих областях получили греки, индусы и арабы; в некоторых вопросах (решение неопределенных уравнений 1-й степени, построение магических квадратов) первенство уже в древнейшие времена принадлежало китайцам.

Результаты такого рода принадлежат к тем, которые легко передаются от поколения к поколению и от одного народа к другому. Например, свойства раз составленного магического квадрата настолько бросаются в глаза, что привлекают внимание даже тех, кто совсем не умеет составлять его, и получают, таким образом, все более широкое распространение. Другие свойства целых чисел тоже легко облечь в привлекательную форму загадки или связать с занимательным повествованием, благодаря чему они остаются в памяти даже тогда, когда со временем утрачивается то глубо-

кое понимание предмета, которого требовало составление задачи. При серьезном подходе к ним такие задачи являются ценными, так как они дают толчок к отысканию лежащей в основе их связи и побуждают к подражаниям. Возможно, что и алгебра распространялась подобным же путем, так как многие алгебраические задачи также связывались с той или иной фабулой, что было особенно в ходу у индусов.

Такая форма собирания и сохранения математических наблюдений зародилась весьма рано. Некоторые из задач, продолжавших потом свои странствия в различных одеяниях, применительно к условиям различных времен и стран, находятся уже в древнеегипетской арифметике Ахмеса. Такова встречающаяся потом у Леонардо из Пизы задача, в которой говорится о 7 старухах, шедших в Рим, каждая с 7 мулами, несшими каждый по 7 мешков, содержавших каждый по 7 хлебов, для каждого из которых имелось по 7 ножей, вложенных каждый в 7 ножен, причем требуется высчитать, сколько это всего составляет предметов. Условия эти представляют собою, как мы видим, одну из форм, которые принимала задача о нахождении суммы геометрической прогрессии $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$. Леонардо сообщает традиционное решение, состоящее в постепенном вычислении выражений $7\,(1 + 7)$, $7\,[1 + 7\,(1 + 7)]$ и т. д. Традиция эта идет от решения аналогичной задачи у Ахмеса, у которого ряд состоит также из степеней семерки, но число членов на единицу меньше.

В то время как индусов интересовало непосредственное увеличение количества таких занимательных задач по теории чисел, греческие математики, в своем стремлении рассматривать вещи с абстрактной и теоретической точки зрения, искали и находили, в связи со своими успехами в арифметике, общие принципы, составлявшие основу таких задач. В более позднюю пору древности задачам такого рода давали также форму эпиграмм, некоторые из которых с большим или меньшим правом приписываются Евклиду и Архимеду. Последнему приписывают задачу о быках Гелиоса, в которой требуется найти 4 целых числа, удовлетворяющих 3 данным уравнениям. Одаренные фантазией арабы облекли в подобные же формы многие задачи, перешедшие к ним от греков или же самостоятельно составленные ими.

Традиционные задачи и традиционную трактовку их находим мы, далее, в позднейшую пору средневековья в сборниках, которые в настоящее время снова становятся предметом изучения.

В XVI в. мы находим у ряда авторов более глубокое понимание дела и стремление поднять на бо́льшую теоретическую высоту решение задач, которыми прежде интересовались лишь благодаря их внешней занимательности. К таким авторам принадлежат Шюке, Тарталья, Кардано, затем составители сборников, появившихся в XVII в., — Баше, Швентер и позднее Озанам. Среди всех их особенно надо выделить Баше. В его „Приятных и занимательных задачах" („Problèmes plaisants et délectables") задачи рассматриваются не только со свойственным и прежним авторам полным

пониманием сути вопроса, но сверх того в такой общей форме и с таким проникновением в их взаимную связь, что его исследования получают в силу этого действительно научное значение. Именно ему мы обязаны настоящей теорией решения неопределенных уравнений 1-й степени.

Прежде чем заняться ее разбором, приведем несколько образцов задач, имеющихся у Баше. Они представляют собою хороший выбор из более древних источников, на которые Баше делает ссылки; на оригинальность он претендует только в отношении своих способов решения. Часть этих задач имеется также у Шюке; одна (№ 6, см. ниже) дошла до нас из древней Греции благодаря константинопольскому собирателю Максиму Плануду.

Задачи Баше, кроме составления магических квадратов, касаются часто отгадывания чисел, относительно которых можно требовать некоторых данных, представляющих потом материал для уравнений; есть задачи, требующие нахождения чисел, в которых даны все цифры, кроме одной, и относительно которых сообщены сверх того такие данные, что становятся известны остатки от деления их на 9. Часто Баше сначала ставит свои задачи в общем виде, а затем берет частные случаи в соответствии с традиционными фабулами. Приводим следующие образцы из его книги.

1. 15 христиан и 15 турок находятся в море на корабле. Поднимается страшная буря, и шкипер объявляет, что необходимо 15 человек выбросить за борт, чтобы спасти 15 остальных. По уговору, все пассажиры должны встать в круг, и затем каждого девятого, считая по порядку, должны бросать за борт, пока не останется 15 человек. Как надо расставить христиан и турок, чтобы все христиане оказались спасенными?

Особенно математической эту задачу, конечно, нельзя назвать. Баше непосредственно находит, на какие из 30 мест ряда упадет жребий, а затем дает мнемоническое средство, чтобы позже при самой расстановке людей ясно было, как ее произвести. Именно, он приводит изречение, гласные которого указывают числа следующих друг за другом турок и христиан. Баше замечает, что в других аналогичных случаях можно пользоваться другими средствами подобного рода; в доказательство выгоды, которую представляет уменье решать подобные задачи, он рассказывает, что Иосиф спас таким образом свою жизнь, когда после разрушения Иерусалима он скрывался с несколькими людьми в пещере и когда запасы иссякли.

2. Бедную женщину, несшую корзину яиц, которые она хотела продать на базаре, кто-то толкнул, так что корзина упала на землю, и яйца разбились. Виновник хочет возместить пострадавшей убытки и спрашивает, сколько было яиц. Она не может вспомнить, но говорит, что когда она раскладывала их по 2 или по 3, или по 4, или по 5, или по 6, то всегда оставалось одно яйцо, а по 7 они раскладывались без остатка. Баше дает решение в таком виде, что его можно применить и при других дан-

ных остатках; он определенно отмечает, что в этом случае числа, соответствующие 2, 3, 4, 5, 6, должны быть взаимно простыми с числом, соответствующим 7, и что тогда задача имеет бесчисленное количество решений.

3. Два приятеля имеют 8 литров вина в боченке, вместимость которого как раз равна 8 литрам. Они хотят разделить эти 8 литров на 2 равные части и могут воспользоваться для этого 2 другими боченками вместимостью один в 5, другой в 3 литра. Как это сделать?

4. Три ревнивых мужа должны переправиться вместе со своими женами через реку, имея в своем распоряжении только один ялик без перевозчика, настолько маленький, что в нем может поместиться не больше двух человек. Как выполнить переправу таким образом, чтобы ни в один момент ни одна из жен не находилась в обществе одного или двух чужих мужей, в отсутствии своего?

5. Каково наименьшее количество гирь, с помощью которых можно свесить любое целое число фунтов от 1 до 40?

6. Некто, умирая, разделил свои деньги между своими сыновьями так, что 1-й получил 1 талер и $^1/_7$ остатка, 2-й — 2 талера и $^1/_7$ остатка, 3-й — 3 талера и $^1/_7$ остатка и т. д. Оказалось, что все получили поровну. Спрашивается, как велика была разделенная сумма и каково было число детей.

7. Общество, состоявшее из 41 человека, в котором были мужчины, женщины и дети, заказало обед, за который пришлось заплатить 40 су. При этом за каждого мужчину заплачено было по 4 су, за каждую женщину по 3 су и за каждого ребенка по $^1/_3$ су. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Мы видим, что часть этих задач (и в первую очередь № 2 и № 7) сводится к решению неопределенных уравнений 1-й степени в целых числах. В то время как Диофант ничего не знал о таком решении, у индусов даются правила для него, ведущие к почти тем же выкладкам, к каким теперь ведет употребление непрерывных дробей. Среди европейских математиков более позднего времени эти правила не получили, однако, распространения.

Задачи такого рода имеются уже у Леонардо из Пизы; интерес у него представляет главным образом ясная форма, в которой устанавливаются правила для их решения. Сами задачи таковы, что сводятся к уравнениям, однородным относительно неизвестных; уравнения эти ведут к определению отношений неизвестных, после чего нетрудно образовать целые числа, стоящие друг к другу в этих отношениях. Задачи эти, следовательно, несмотря на совершенно иную форму, сходны с теми, которые в древности приходилось решать астрономам Запада и Востока, чтобы определять периоды, через которые некоторая группа явлений снова наступит одновременно.

Пример другого рода задач, часто встречающихся у писателей начала нового времени, представляет вышеприведенная за-

дача № 7. В таких задачах дело сводится к решению в целых положительных числах системы

$$x + y + z = a,$$
$$bx + cy + dz = e.$$

В данном случае x, y и z обозначают соответственно число мужчин, женщин и детей; при этом $b > c > d$. В различных задачах a, b, c, d, e могут иметь различные значения. Для решения этих задач применяются некоторые совершенно несистематические приемы, не дающие даже гарантии в получении целочисленных решений, не говоря уже о получении всех возможных решений. Примером такого беспочвенного приема может служить применение двух групп пробных значений, аналогично тому, как это предписывает правило двух ложных положений. Бо́льшую ценность имело правило, шедшее от арабов и носившее имя „сетиш". Оно требовало, если взять нашу задачу № 7, прежде всего определения того, насколько дешевле стоил бы обед, если бы все участники были детьми. Если перевести этот шаг в решении на современный язык уравнений, то он соответствует умножению верхнего уравнения на d и вычитанию из нижнего, что дает:

$$(b - d)x + (c - d)y = e - da.$$

После этого дело идет только о том, чтобы известную величину $e - da$ представить как сумму двух чисел, из которых одно делится на $b - d$, а другое на $c - d$. Это делается путем подбора; перепробовав для x все целочисленные значения, не превышающие $\frac{e - da}{b - d}$, можно быть уверенным, что получены все решения. Впрочем, вопросом о нахождении *всех* решений часто не интересовались вовсе.

Баше указывает на недостатки правила „сетиш". Во-первых, оно требует ряда проб, во-вторых, оно не является достаточно общим, так как дает только целочисленные решения соответственно конкретным условиям задачи и не дает бесконечного множества других решений задачи, взятой независимо от конкретного смысла входящих в нее величин.

Этот недостаток Баше стремится устранить. При этом он, однако, вводит обозначения не для всех неизвестных, но, как верный ученик Диофанта, только для одного (обозначенного нами через x). С чисто диофантовским искусством он образует затем для y и z выражения, которые мы записали бы следующим образом:

$$y = \frac{e - da}{c - d} - \frac{b - d}{c - d}x,$$
$$z = \frac{ca - e}{c - d} + \frac{b - c}{c - d}x.$$

Баше показывает нам этот свой прием на отдельных числовых примерах; однако он получает при этом все различные формы

выражений для y и z, рассматривая как случай $ca > e$, так и случай $ca < e$; он определенно подчеркивает, что когда задача не имеет такой специальной формы, при которой рассмотрению подлежат только целочисленные решения, то x может принимать *все* значения, при которых y и z получаются положительными, вне зависимости от того, будут ли при этом y и z также целыми. Алгебраическая трактовка Баше обладает, таким образом, наибольшей общностью, которой можно достичь без употребления отрицательных чисел.

Что представляет у Баше интерес с точки зрения теории чисел — это решение в целых числах. Когда он указывает здесь прежде всего на то, что число проб (при положительности искомых решений) является ограниченным, то он, повидимому, не замечает, что то же самое имеет место и для решения „сетиш", отличающегося сверх того своей простотой. Действительное право свое критиковать решения, основанные только на подборе, Баше доказывает, когда апеллирует к ряду предложений, установленных им сперва в его „Элементах арифметики" („Eléments d'Arithmétique"), а затем во втором издании „Задач". Предложения эти содержат настоящую теорию неопределенных уравнений 1-й степени и прием, с помощью которого можно прямо определять их решения в целых числах. Баше иллюстрирует этот прием на одной задаче во втором издании своей книги.

На то, какой общности достиг Баше при трактовке этих вопросов, указывает нам 25-е из упомянутых предложений, утверждающее, что числа, которые при делении на данные делители дают данные остатки, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной общему наименьшему кратному делителей. Таким образом дело сводится только к тому, чтобы среди этих чисел найти такое, которое меньше общего наименьшего кратного. Приведенное предложение находит непосредственное применение в нашей задаче № 2 о женщине с корзиной яиц.

Чтобы найти также и в других случаях (например в задаче № 7) решение, из которого можно получить все остальные, надо только, как известно, уметь решать уравнения вида:

$$ax - by = 1, \tag{1}$$

где a и b — взаимно простые числа. К этому Баше сводит в 21-м предложении определение x и y из уравнения:

$$ax - by = c.$$

Решение уравнения (1) Баше дает в 18-м предложении, отыскивая наименьшее из чисел, кратных a, превосходящее на единицу число, кратное b. Он доказывает, в соответствии с упомянутым нами 25-м предложением, что это наименьшее значение x есть единственное меньшее b и что наименьшие решения уравнения

$$by - ax = 1 \tag{2}$$

можно получить из соответствующих решений уравнения (1), полагая

$$y' = a - y, \quad x' = b - x.$$

Чтобы действительно найти наименьшие значения x и y, удовлетворяющие уравнению (1), Баше поступает так, как делают при нахождении общего наибольшего делителя. Чтобы сделать понятными его правила, выразим этот прием на современном алгебраическом языке с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r, \\ b &= q_2 r_1 + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство указывает непосредственно, что уравнению

$$r_{n-1} x_n - r_n y_n = 1$$

удовлетворяют значения $x_n = 1$, $y_n = q_{n+1}$. Так как $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$, то это уравнение можно представить в виде:

$$r_{n-1}(x_n + q_n y_n) - r_{n-2} y_n = 1,$$

откуда следует, что уравнение

$$r_{n-2} x_{n-1} - r_{n-1} y_{n-1} = -1$$

удовлетворяется значением $x_{n-1} = y_n$ и целым значением y_{n-1}, выражение которого $x_n + q_n y_n$, у нас уже выписанное, Баше вычисляет, вставляя в уравнение значение x_{n-1}. Далее, уравнение

$$r_{n-3} x_{n-2} - r_{n-2} y_{n-2} = 1$$

удовлетворяется значением $x_{n-2} = y_{n-1}$ и целым значением y_{n-2}, которое можно вычислить из самого уравнения. Продолжая этот прием, находим, наконец, если n четно, что уравнению

$$ax - by = 1$$

соответствуют значение $x = y_1$, где y_1 принадлежит предшествующему уравнению, и целое значение y. Если n нечетно, то надо только заменить первое из решенных уравнений уравнением:

$$r_{n-1} x_n' - r_n y_n' = -1,$$

где

$$x_n' = r_n - 1, \quad y_n' = r_{n-1} - q_{n+1}.$$

Баше, не пользующийся символикой, ведет объяснение на числовых примерах, но в то же время ясно устанавливает выраженные предыдущими формулами правила для определения величин x.

Если бы x_n, x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots$ выразить по данным в нашем изложении формулам $x_n = 1$, $x_{n-1} = y_n = q_{n+1}$, $x_{n-2} = y_{n-1} = x_n + q_n y_n$ и т. д. через частные q_n, то вычисления были бы те же, как при нахождении непрерывной дроби и ее последовательных приближений. Баше, напротив, пользуется для коэфициентов образуемых им уравнений последовательными остатками r_1, r_2, $r_3, \ldots$ Вследствие этого его вычисления несколько длиннее теперешних. Непосредственная связь с непрерывными дробями не была замечена и занимавшимся позже теми же вопросами Роллем; она стала ясна лишь тогда, когда с этими дробями и их свойствами познакомились ближе по другим поводам.

Начало этому было положено, впрочем, благодаря одному частному применению уже за некоторое время до Баше. Применение это состояло в постепенном вычислении приближенных значений квадратного корня. Если надо вычислить $\sqrt{N}$ и a есть наибольшее целое число, заключающееся в нем, то $a + \frac{r}{2a+1}$, где $r = N - a^2$, представляет собою еще лучшее приближенное значение, снова меньшее, чем $\sqrt{N}$. Вставляя его вместо a и т. д., будем получать все более точные приближенные значения, совпадающие с некоторыми из тех, которые дает применение непрерывных дробей. Этот способ, встречающийся у Ал-Кархи, в действительности восходит, вероятно, к грекам. К настоящему образованию непрерывных дробей приходит, однако, только Бомбелли в своей алгебре 1572 г.; он полагает $\sqrt{a^2 + r} = a + x$ и находит отсюда $r = 2ax + x^2$, что, в свою очередь, дает $x = \frac{r}{2a + x}$.

Ряд все более точных приближений получается, если вместо x в знаменателе вставлять последовательно приближенные значения, уже полученные для этой величины. В 1613 г. Катальди вводит в эти вычисления повторное применение дробной черты, т. е. уже настоящее обозначение непрерывных дробей:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \ldots}};$$

только вместо $+$ он пишет et. Катальди сверх того дает этому дальнейшие применения; в частности, он стремится к тому, чтобы заключить величину корня в возможно более тесные пределы. Например, для

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ldots}}$$

он получает их, полагая последнего знаменателя равным $8\frac{1}{4}$ или $8\frac{8}{33}$. Замены эти ведут, очевидно, к двум последовательным приближенным дробям. Таким образом Катальди замечает, что при-

ближения непрерывных дробей поочередно то больше, то меньше искомой величины корня.

Здесь мы, однако, имеем все еще не дроби с числителями 1. Последние появляются лишь несколько позже у Швентера, дающего им более общее применение, а именно пользующегося ими для более простого представления дробей с большими числителями и знаменателями. Суть дела ясно видна из следующей схемы разложения $\frac{177}{233}$ в непрерывную дробь и из данного образования приближенных дробей:

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Здесь первая колонна содержит знаменатель данной дроби, ее числитель и ряд остатков, получающихся при делении на каждое число числа, ему предшествующего; вторая колонна содержит получающиеся при этих делениях частные, так что

$$\frac{177}{233}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

Третья колонна содержит числители, а четвертая знаменатели последовательно образованных приближенных дробей $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{19}{25}, \frac{79}{104}$. Каждое число 3-й и 4-й колонны образуется согласно с употребительным теперь правилом путем умножения стоящего непосредственно над ним числа на стоящее влево от последнего (во 2-й колонне) частное и прибавления к этому произведению числа, стоящего на 2 строки выше отыскиваемого. Здесь можно видеть основу всего учения о непрерывных дробях с числителем 1. Полное развитие получило оно впоследствии у Гюйгенса, стремившегося к той же цели, как и Швентер; Гюйгенс дал действительное доказательство того, что непрерывные дроби дают приближенные значения, лучшие, чем какие-нибудь другие дроби с небольшими знаменателями, и что сама непрерывная дробь лежит между двумя последовательными приближенными дробями.

К новому времени перешли, однако, не только те вопросы теории чисел, которые были связаны с упоминавшимися нами занимательными задачами. В то время как эти последние принесли свои плоды в созданной Баше теории неопределенных урав-

нений 1-й степени, более абстрактные задачи Диофанта дали толчок главным образом к углубленному изучению неопределенных уравнений 2-й степени и решению их в рациональных числах. Исследования такого характера продолжались арабами; в Европе ими стали заниматься также сравнительно рано. Так, уже Леонардо из Пизы рассматривает очень трудные вопросы этого рода. Если он и не имел в ближайшие столетия последователей в этом отношении, так же, впрочем, как и в других, то интерес к этим вопросам должен был пробудиться с новой силой, когда сочинения Диофанта стали известны непосредственно. Действительно, этот интерес проявляется, например, у Региомонтана, обнаружившего и здесь свое умение быстро овладевать уже имеющимся материалом и способность к дальнейшему развитию предмета. Об этой его способности свидетельствуют хотя бы такие задачи, как решение системы

$$x+y+z=116; \quad x^2+y^2+z^2=4624$$

или нахождение четырех полных квадратов, сумма которых есть тоже квадрат. На интерес, существовавший в то время к подобным вопросам, указывает, например, тот факт, что Яков из Шпейера нашел для последней задачи две группы решений.

Успехами в области теории чисел обязаны мы и некоторым другим математикам, в том числе Штифелю. Исследования несколько более систематического характера имеются у Виета. Его символика, в частности введение обозначений для известных, но произвольных чисел, получила в вопросах теории чисел такое же значение, как и в алгебре. Мы видим это в его сочинении „Zetetica" („Пытливость"), где он, между прочим, рассматривает часть задач Диофанта; его обозначения позволяют ему сохранять полную общность, теряемую в изложении Диофанта, так как последний сразу дает вполне определенные значения числам, которые могут быть произвольными (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 169).

В сочинении „Примечания к Logistica speciosa", из которого мы взяли уже выражения для $\sin nx$ и $\cos nx$, рассматривается вопрос об образовании рациональных прямоугольных треугольников. Виета, проявляющий здесь, как и во многих других случаях, свой интерес к достижениям математики древних, не ограничивается прямым нахождением таких треугольников, но показывает также, как из двух или даже из одного такого треугольника можно образовать новые. Даваемый им результат есть тот же, который знал уже Диофант:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac \pm bd)^2+(ad \mp bc)^2,$$

и имеет более частный характер, чем подобные же преобразования у индусских математиков; но Виета приводит его в связи со своими тригонометрическими исследованиями. Если a и b — катеты одного прямоугольного треугольника, d и c — другого, то, так как Виета не вводит особых обозначений для синуса

и косинуса, а берет их как отношения катетов к гипотенузе, его формула равнозначаща следующей:

$$1 = \sin^2(x \pm y) + \cos^2(x \pm y).$$

Виета ясно указывает при этом, что если (при наших верхних знаках) вместо двух данных треугольников взять два раза один и тот же, то образованный угол равен $2x$.

Если мы, таким образом, не находим у Виета новых результатов по теории чисел, то все же его изложение, связанное с новыми воззрениями, дает полученным результатам бóльшую общность. Благодаря этому и в теории чисел была подготовлена почва для дальнейших крупных успехов, о которых мы будем говорить в следующем отделе.

В различных отношениях эти успехи были подготовлены уже Баше; здесь имели значение не только его „Задачи" с их интересными решениями отдельных вопросов и данным во введении ясным изложением важных общих положений, но и его издание Диофанта, в котором „Поризмы", служащие введением в него, и примечания к задачам отличаются большой содержательностью. „Поризмы" содержат, между прочим, некоторые положения о составе чисел, например то, что числа, имеющие в современном обозначении вид:

$$\frac{a^2-c}{a-b} \cdot \frac{b^2-c}{a-b} + c,$$

являются полными квадратами. Примечания Баше часто затрагивают области, в которых возможно было — и в скором времени было действительно осуществлено — дальнейшее продвижение.

8. Теория чисел у Ферма.

Рассмотренные нами работы Баше в значительной степени подготовили почву для исследований относительно целых чисел, особенно на родине Баше, во Франции. Задачи — и среди них очень трудные — сразу представились в большом числе. В связи с данной Баше теорией неопределенных уравнений 1-й степени встал вопрос о решении в целых числах неопределенных уравнений 2-й степени (Диофант довольствовался для них решением в рациональных числах) и о дальнейшем развитии других исследований, начатых в древности. Можно было, следуя опять-таки примеру Баше, заняться обобщением задач Диофанта и отысканием условий возможности образованных таким образом обобщенных задач. Орудием для исследований такого рода служили теперь не только методы работы древних, но и алгебра Виета, уже самим им примененная к задачам Диофанта.

Алгебра в тогдашнем состоянии, быть может, даже особенно способствовала исследованиям по теории чисел: с одной стороны, она позволяла фиксировать руководящие мысли и давала

всем заключениям надлежащую надежность и общность, с другой — ее работа была еще слишком тяжеловесной для того, чтобы содействовать чрезмерному абстрагированию. Таким образом не было отрыва от конкретного числового материала, наблюдения над которым часто наилучшим образом вели к ответу на поставленные вопросы и к открытию совершенно новых результатов. В то время не могло быть и речи о занятиях теорией чисел вне такого детального изучения свойств отдельных целых чисел. Это обстоятельство делало зато чрезвычайно трудным проведение и изложение строгих доказательств и выработку общих методов теории чисел.

Среди всех, кто занимался в рассматриваемое нами время теорией чисел, бесспорно первое место принадлежит Ферма. Результаты, данные им без доказательства и содержащиеся частью в опубликованных после его смерти пометках его на принадлежавшем ему экземпляре Диофанта в издании Баше, частью в его письмах, адресованных одному или нескольким корреспондентам, вплоть до последнего времени давали отправные пункты для весьма важных исследований и даже теперь еще не все доказаны. Надо отметить, что нужный импульс к работе Ферма получил в горячем споре современных ему математиков, в котором он скоро доказал свое первенство, а также что впоследствии он встречал понимание трудности его задач и значения полученных им результатов.

Ферма, следовательно, не вполне был лишен той связи с современниками и их работами, в которой нуждается и гений. Таких более или менее непосредственных сотрудников нашел он частью в лице математиков, выдвинувшихся тогда в других областях этой науки, как Декарт и позже Паскаль, частью среди менее крупных ученых, занимавшихся специально вопросами теории чисел, как Сент-Круа, Сен-Мартэн и особенно Френикль. Впоследствии Ферма сообщал свои задачи и результаты также английским математикам, только благодаря ему вовлеченным в изучение этих вопросов. Упомянутые специалисты по исследованию целых чисел были, однако, в сущности, людьми без широкого математического образования; этим, вероятно, и объясняется, что направленные к Ферма неоднократные предложения изложить подробнее его методы в том или ином пункте встречали так мало отклика.

Переписка с Френиклем, которая велась главным образом через Мерсенна, имела очень любопытное начало. Ферма нашел и сообщил Мерсенну некоторые результаты, относившиеся к составлению магических квадратов. Френикль, узнав о них, написал письмо, в котором хвалился своими собственными результатами, шедшими в некоторых отношениях дальше, например составлением из чисел натурального ряда таких магических квадратов, что удаление определенного числа крайних их полос снова дает магические квадраты. Упоминает он и о перенесении некоторых своих результатов из плоскости в пространство.

В противоположность тому крайне пренебрежительному тону, в котором Френикль отзывается о достижениях Ферма, последний в своем ответе ограничивается простым замечанием, что если бы он имел честь быть знакомым с Френиклем, то тот, наверное, отказался бы от некоторых слов своего письма. Ферма довольствуется тем, что указывает на крупные результаты, найденные им в той же области с помощью своих методов; некоторые из них совпадают с теми, которыми хвалится Френикль, некоторые же являются новыми; в частности, Ферма спрашивает Френикля, в состоянии ли тот с помощью своих методов найти, например, число магических квадратов с определенным числом полей или составить магические кубы, в которых все квадратные сечения, параллельные паре боковых граней, представляют собою магические квадраты с одной и той же суммой. Тон письма Френикля не мешает Ферма выразить удивление успехам, которых тот достиг без помощи алгебры, и желание поближе познакомиться с методами, которыми, видимо, можно работать быстрее и легче, чем его собственными. С тех пор Френикль становится главным корреспондентом Ферма. Ферма не только сообщает ему охотнее, чем кому-либо другому, свои результаты и предлагает свои задачи, но и сам широко пользуется для своих исследований его результатами и задачами. Отношения между ними несколько испортились, когда Френикль и Сен-Мартэн заподозрили Ферма в том, что он нарочно предложил им невозможные задачи; Ферма, однако, тотчас же попытался отвести от себя это обвинение, сообщив им решение одной из задач — задачи о нахождении прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза и сумма катетов представляют собою точные квадраты; приведенное Ферма решение — треугольник со сторонами:

$$4687\,298\,610\,289;\ 4565\,486\,027\,761;\ 1061\,652\,293\,520.$$

Подозрение, что Ферма могло притти в голову предложить неразрешимые задачи, не было необоснованным, так как в свое время он предложил Френиклю и еще раньше Сент-Круа следующие задачи:

1) найти прямоугольный треугольник (с рациональными сторонами), площадь которого есть квадрат;

2) найти две четвертых степени, сумма которых есть четвертая степень;

3) найти четыре квадрата, составляющие арифметическую прогрессию;

4) найти два куба, сумма которых есть куб.

Ферма предложил их, вполне сознавая их невозможность; он хотел из ответа, который мог говорить или о невозможности для чисел до известного предела или о полной невозможности, узнать, шли ли его корреспонденты к цели с помощью таблиц, т. е. эмпирически, или пользовались общими соображениями. Самому ему, как можно судить по его замечаниям, был свойственен последний путь.

Мы уже привели несколько образцов многочисленных задач, привлекавших внимание Ферма. Пояснения его относительно методов, с помощью которых он находил и решал такие задачи, настолько малозначительны, что наиболее существенным в наследстве, оставленном им науке, являются готовые результаты. Сами эти результаты представляют, однако, такую громадную ценность, что невольно заставляют обращаться к упомянутым скудным пояснениям, находящимся главным образом в письмах, хотя бы для того, чтобы найти связь между важнейшими исследованиями Ферма.

Часть этих исследований касается делимости чисел. Укажем прежде всего на один прием, о котором Ферма, в виде исключения, дал обстоятельные пояснения. Прием этот служит для нахождения множителей данного числа и особенно хорошо позволяет, после того как небольшие первоначальные множители выделены путем обычных проб, отыскивать такие множители, которые лежат вблизи квадратного корня из числа. Если само число есть N, а наименьшее из целых чисел, превышающих $\sqrt{N}$, есть a, то

$$N = a^2 - b.$$

Если b не квадрат, что в большинстве случаев сразу видно по его последней или двум последним цифрам, то полагаем $b_1 = b + 2a + 1$ и имеем:

$$N = (a + 1)^2 - b_1;$$

далее получаем таким же образом:

$$N = (a + 2)^2 - b_2$$

и т. д. Продолжаем так, пока не дойдем до разложения:

$$N = p^2 - q^2 = (p - q)\ (p + q);$$

так как N путем выделения множителя 2 уже с самого начала было сделано нечетным, то этот прием выявляет все возможные разложения.

Полученные Ферма результаты, касающиеся делимости чисел некоторого определенного состава, связаны с одним классом исследований, которые занимали его с раннего времени и в которых он, судя по его письмам, достиг постепенно высокого мастерства. Исследования эти касались нахождения занимавших еще древних математиков так называемых совершенных и дружественных чисел, а также чисел, находящихся в данном отношении к сумме их делителей.

Чтобы понять замечания Ферма относительно применяемых им здесь методов, надо вспомнить, что сумма всех делителей числа $p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \ldots$[1], где $p, q, \ldots$ — первоначальные числа, равна:

$$(1 + p + \ldots + p^{\alpha})\ (1 + q + \ldots + q^{\beta}) \ldots - p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \ldots$$

---

[1] За исключением самого этого числа.

или

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \ldots - p^{\alpha} q^{\beta} \ldots$$

Этого общего закона Ферма, впрочем, нигде не выставляет; наиболее подробные его замечания относятся к таким простым случаям, в которых речь идет о числах вида $2^{\alpha} \cdot p$ или $2^{\alpha} \cdot p \cdot q$, где p и q — первоначальные числа В этом он примыкает как к Евклиду, так и к Табит ибн Курра (Tâbit ibn Kurra), которым принадлежит определение совершенных чисел вида $2^{\alpha} \cdot p$ и некоторых дружественных чисел вида $2^{\alpha} \cdot p \cdot q$ или $2^{\alpha} \cdot r$ (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 112 и 208). Ферма сообщает, что он обладает методом, с помощью которого он может из числа вида $2^{\alpha} \cdot p \cdot q$, равного половине суммы своих делителей (например, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$), получить следующее за ним число, обладающее тем же свойством (в указанном примере $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$). Таким же образом он получил из уравнения вида:

$$(2^{\alpha+1}-1)(1+p)(1+q) = 3 \cdot 2^{\alpha} \cdot p \cdot q,$$

где $\alpha = 3$, $p = 3$, $q = 5$, новое, в котором $\alpha = 5$, $q = 7$.

Тем же методом, по его сообщению, он пользуется для того, чтобы из дружественных чисел 220 $(= 2^2 \cdot 5 \cdot 11)$ и 284 $(= 2^2 \cdot 71)$ образовать новые дружественные числа 17 296 $(= 2^4 \cdot 23 \cdot 47)$ и 18 416 $(= 2^4 \cdot 1157)$, т. е. имея одно решение системы:

$$(2^{\alpha+1}-1)(p+1)(q+1) = 2^{\alpha} \cdot p \cdot q + 2^{\beta} \cdot r = (2^{\beta+1}-1)(r+1),$$

где p, q и r — первоначальные числа, получить из него другое, более сложное.

Ферма сообщает далее, что употребляемый им здесь метод совпадает с тем, которым он пользовался при своем диференцировании. Судя по этому, дело здесь должно итти о преобразовании уравнений путем замены некоторой величины (например q), другою $(q+h)$, что должно быть связано с изменением величины показателя α; таким образом все сводится к простым алгебраическим преобразованиям.

Результаты, сообщаемые здесь Ферма, не являются особенно значительными ни по сравнению с теми, которые мы находим у упомянутого выше арабского писателя, ни с теми, которые одновременно с Ферма были получены Декартом и Сент-Круа; но Ферма в противоположность всем этим авторам обладал методическим отправным пунктом, что позволило ему, с одной стороны, получить дальнейшие результаты в областях, родственных рассмотренным выше, а с другой — притти к совершенно новым важным соображениям.

Уже при упомянутых исследованиях ему пришлось столкнуться с вопросом о делимости чисел вида $2^n - 1$. Он установил здесь следующие положения: $2^n - 1$ есть число составное, если n — число составное; $2^n - 2$ делится на $2n$, если n — первоначальное число

(за исключением 2), и в этом случае 2^n-1 не делится ни на какие другие первоначальные числа, кроме имеющих вид $2rn+1$. В скором времени он обобщает второе из этих положений, утверждая, что первоначальное число n, не являющееся делителем a, является делителем $a^{n-1}-1$. Этому положению, широко известному под именем „малой теоремы Ферма", Ферма также не дал доказательства (которое, как известно, может быть выполнено совершенно элементарно). Положение это также находит применение в исследованиях о сумме делителей, когда рассматриваемые числа имеют первоначальных множителей, отличных от 2.

От вопроса о разложимости чисел вида 2^n-1 Ферма, естественно, перешел к рассмотрению разложимости чисел вида 2^n+1, тем более, что она также имела для него значение при исследованиях относительно чисел, находящихся в данном отношении к сумме их делителей. Ферма утверждал, что 1) такие числа разложимы, если n не является степенью 2, и что 2) $2^{2^r}+1$ есть всегда первоначальное число. Справедливость первого положения очевидна; что же касается второго, то Эйлер обнаружил впоследствии его ошибочность, найдя, что $2^{32}+1$ делится на 641. По этому поводу надо отметить, что сам Ферма всегда указывал, что не имеет здесь полного доказательства, хотя в своих письмах он выражал все большую и большую убежденность в справедливости своего утверждения. Убежденность эта основывалась не только на том обстоятельстве, что первые числа вида $2^{2^r}+1$ действительно являются первоначальными, но, по словам Ферма, и на том, что для большого количества чисел он доказал, что они не могут служить делителями чисел такого вида. Результаты, достигнутые им в этом отношении, имели бы для нас значение, если бы они сохранились, и независимо от их связи с ошибочным положением. Ошибочность последнего убедительно свидетельствует о важности строгого математического доказательства даже для таких случаев, когда могло бы показаться достаточным положиться на чутье искушенного математика.

Сам Ферма совсем несклонен был успокоиться на этом. Он неоднократно возвращался к попыткам найти настоящее доказательство, а также приглашал других увенчать таковым его мнимое открытие. Поэтому мы не имеем оснований не доверять ему, когда он сам говорит, что обладает доказательством того или иного предложения. Ферма дает понять, что эти доказательства в такой степени связаны с другими тайнами теории чисел, что настоящее свое место они смогли бы найти только в задуманном им труде, посвященном этой дисциплине. Такого труда он, к сожалению, никогда не издал и вряд ли когда-либо полностью написал его. Большая часть недоказанных Ферма положений получила впоследствии полное подтверждение. Есть, однако, и такие, для которых это еще не имеет места. Относительно их представляется возможным, что даже столь ясный мыслитель, как Ферма, заблуждался относительно доказательства, которого он не имел случая провести в полном виде, вплоть до всех частностей.



Ферма

1608 — 1655

С современной гравюры

Такая возможность существует прежде всего по отношению к следующему замечательному положению, которое Ферма высказывает в общем виде только в одном из своих замечаний на полях Диофанта в издании Баше.

Уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не разрешимо в рациональных числах при всех значениях n, кроме $n=2$. Это утверждение доказано еще не для всех значений n. Справедливость его для $n=3$ была известна уже арабу Ал-Ходжанди. Доказательство для $n=4$ мы найдем ниже: оно содержится в данном Ферма доказательстве другого его предложения. Сверх того Ферма нашел, что уравнение $x^4+y^4=z^2$ не разрешимо в целых числах. Этот результат содержит в себе и предыдущий, так как, если бы уравнение $x^4+y^4=z^4$ можно было решить в рациональных числах, то вследствие его однородности его можно было бы решить и в целых числах.

Наряду с подобными отрицательными результатами, к которым Ферма был приведен попытками обобщить задачу древних об образовании прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, Ферма получил и ряд положительных результатов, которые были связаны с другими исследованиями математиков древности, а также с работами Баше. Определенная задача Диофанта: найти два числа, зная их разность и разность их кубов, натолкнула уже Баше на постановку неопределенных задач о нахождении двух (рациональных) чисел, сумма или разность кубов которых равна разности двух данных кубов. Ферма показал, что условие возможности, данное Баше для этих задач, неправильно; сверх того он нашел, что сумму двух кубов можно бесконечным количеством способов представить в виде суммы двух других кубов (в рациональных числах). Это положение является дополнением к положению о невозможности решить в рациональных числах уравнение $x^3+y^3=z^3$. К другому результату весьма общего характера привело Ферма то обстоятельство, что Диофант при решении одной из задач, повидимому, принимает, что всякое число можно представить в виде суммы не более чем 4 квадратов. Баше напрасно пытался доказать это; это удалось только Сент-Круа. Ферма же получил следующее широкое обобщение: всякое число можно представить в виде суммы не более чем n n-угольных чисел.

Относительно изображения чисел в виде суммы квадратов Ферма идет дальше; он исследует, сколькими способами это разложение может быть выполнено для данных чисел; он находит наименьшее число, обладающее тем свойством, что либо само оно, либо квадрат его могут быть представлены в виде суммы двух квадратов определенным количеством различных способов. Одни его правила касаются при этом первоначальных чисел того или иного вида, другие — составных. Относительно первоначальных чисел вида $4n+1$ Ферма утверждает следующее: вся-

кое такое число, а также квадрат его можно представить в виде суммы двух квадратов только одним способом, куб и 4-ю степень его — двумя способами, 5-ю и 6-ю степень — тремя и т. д. Первоначальные числа вида $3n+1$ можно представить в форме x^2+3y^2, вида $8n+1$ и $8n+3$ — в форме x^2+2y^2, где x и y рациональны.

Хотя для нас и остается загадкой, каким образом Ферма смог доказать свои в высшей степени общие результаты, но некоторые пояснения относительно общего хода его рассуждений он все же дал. Прежде всего он делает указания о своем методе доказательства отрицательных предложений, заключающихся в том, что некоторая задача (например, определение сторон прямоугольного треугольника, площадь которого есть квадрат) не может быть решена в целых числах: он доказывает, что если бы было найдено одно решение, то из него можно было бы получить другое в меньших числах; доказанное имело бы силу и для этого второго решения и т. д.; но так как целые числа нельзя уменьшать бесконечно, то задача невозможна.

Труднее было Ферма, как он пишет, найти нужную форму для полного доказательства столь же общих предложений положительного характера, утверждающих, что числа известного вида *всегда* могут быть составлены определенным образом. Он достигает цели, выражая положительные предложения в отрицательной форме, так как то, что *всегда* существует, никогда не перестает существовать. В качестве примера Ферма указывает, что именно таким образом он доказал предложение, имевшее в его исследованиях относительно представления чисел в виде суммы квадратов особую важность, а именно, предложение о возможности написать всякое первоначальное число вида $4n+1$ как сумму двух квадратов. Ему удалось доказать, что если бы какого-нибудь первоначального числа этого вида нельзя было написать указанным образом, то существовали бы меньшие первоначальные числа того же вида, обладающие тем же свойством. Такое уменьшение привело бы, в конце концов, к заключению, что 5 нельзя представить как сумму двух квадратов. Это заключение, однако, неправильно, так как $5=2^2+1^2$. Следовательно, доказываемое положение справедливо.

В то время как этот ход мыслей ясен и прост, указаний на то, как выполнить самую редукцию, Ферма в большинстве случаев никаких не дает. Однако что касается упомянутой задачи о нахождении прямоугольного треугольника, стороны которого были бы целыми числами, а площадь — квадратом, то для нее одно из замечаний на книге Диофанта содержит пояснения относительно такой редукции, позволяющие воспроизвести полное доказательство. Приводим его.

Целые числа, представляющие стороны прямоугольного треугольника, можно изобразить, как Ферма обычно делает это по образцу древних, в виде:

$$x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ 2xy.$$

Если два катета целочисленного прямоугольного треугольника, а значит, и гипотенуза, имеют общий множитель k, то площадь его содержит множитель k^2. Поэтому если площадь этого треугольника выражается квадратным числом, то квадратным же числом выражается площадь подобного ему треугольника, стороны которого уменьшены в k раз. Отсюда следует, что, не уменьшая общности доказательства, мы можем считать взаимно простыми числа: x^2+y^2, x^2-y^2 и $2xy$. Значит, числа x и y, а следовательно, и $x+y$ и $x-y$, можно считать взаимно простыми, а так как сумма последних ($2x$) — четное число, то оба они — нечетные числа.

Предположим теперь, что площадь треугольника

$$xy(x+y)(x-y)$$

выражается квадратным числом. Так как все сомножители взаимно простые, то каждый из них должен быть числом квадратным:

$$x = u^2; \qquad y = v^2;$$
$$u^2 + v^2 = p^2, \quad u^2 - v^2 = q^2.$$

Из двух последних равенств получаем:

$$2v^2 = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q).$$

И $p+q$ и $p-q$ — числа четные, так как, по предположению, p^2 и q^2 — нечетные числа; других общих множителей, кроме 2, они не могут иметь, так как в противном случае этих множителей должны были бы иметь числа $2p$ и $2q$, а значит числа $p^2=x+y$ и $q^2=x-y$. Эти же последние, по предположению, — взаимно простые. Из найденного равенства следует, таким образом, что

$$p+q = \begin{cases} 2m^2 \\ n^2 \end{cases}, \quad p-q = \begin{cases} n^2 \\ 2m^2 \end{cases},$$

где n — четное число. Отсюда

$$u^2 = \frac{p^2+q^2}{2} = (m^2)^2 + \left(\frac{n^2}{2}\right)^2.$$

Целые числа m^2 и $\frac{n^2}{2}$ являются, таким образом, сторонами нового прямоугольного треугольника, площадь которого есть квадрат $\frac{m^2n^2}{4}$. Стороны этого нового треугольника меньше сторон первоначального, так как квадрат его гипотенузы (u^2 или x) является множителем одного из данных катетов. Так как беспредельное уменьшение целых положительных чисел невозможно, то таково же и сделанное нами допущение.

Наше пополнение доказательства Ферма состоит, в сущности, только в том, что мы перевели его указания на язык современной алгебры и несколько подробнее осветили то, на чем он не считает нужным останавливаться. Приведем для сравнения его

собственное изложение (для пояснения мы добавляем в скобках современную алгебраическую формулировку его мыслей):

„Если бы площадь треугольника была квадратом, то существовали бы две четвертых степени, разность которых ($u^4 - v^4$) была бы квадратом, и, следовательно, два квадрата, сумма и разность которых были бы также квадратами ($u^2 + v^2 = p^2$, $u^2 - v^2 = q^2$). Таким образом существует число, составленное из квадрата и удвоенного квадрата, которое само есть квадрат ($p^2 = 2v^2 + q^2$). Но если квадрат составлен из квадрата и удвоенного квадрата, то, *как легко доказать*, корень из него также можно составить из квадрата и удвоенного квадрата $\left[p = m^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]$. Отсюда следует, что этот корень есть сумма катетов прямоугольного треугольника, квадратный член (m)— один катет, а удвоенный квадрат $\left[2\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]$ — другой".

О достигаемом таким путем уменьшении целых чисел, которые должны были бы удовлетворять задаче (в случае, если бы она была возможна), Ферма не дает никаких пояснений.

Доказательство это заключает в себе доказательство того, что $u^4 - v^4$ не может быть квадратом, а следовательно, также и 4-й степенью, так что уравнение $u^4 = v^4 + t^4$ нельзя решить в целых, а значит, и в рациональных числах.

В столь сжатом виде даже и это доказательство, приведенное Ферма в виде исключения, должно было представлять затруднения для его современников, так как им (а особенно специалистам по теории чисел) употребленная нами алгебраическая транскрипция была еще мало привычна. То, что сам Ферма не применил в своем изложении алгебраических обозначений, объясняется тем, что он обладал редкою способностью удерживать свои мысли в памяти без внешних вспомогательных средств; он вообще чрезвычайно редко прибегает в своих работах к алгебраической символике и пользуется ею только в том зачаточном виде, который дал ей Виета. Между тем легко видеть, что при отказе от этой символики подробное изложение доказательства явилось бы по необходимости чрезвычайно пространным. Немудрено поэтому, что Ферма делает здесь (а также в другом месте) замечание, что ему нехватает места на полях его экземпляра Диофанта; неудивительно, что он и вообще так мало дает сведений о своих доказательствах и методах. Адресованные к нему многократные предложения дать пояснения относительно отдельных вопросов не нашли, повидимому, отклика, да и вряд ли бы ему было легко это сделать при той пространности изложения, которой он не мог избежать, и при взаимной зависимости между многочисленными и разнообразными положениями, установленными им. Эта связь требовала полного и систематического изложения его воззрений, что, как мы видели, входило в его намерения. Для такой работы ему, однако, вряд ли оставляли время его служебные обязанности; кроме того, становились у него на пути трудности, связанные с ее изданием.

Таким образом лишь немногие из результатов Ферма, относящиеся к области теории чисел, получили такой вид, что его современники и непосредственные продолжатели смогли воспользоваться ими и положить их в основу для дальнейших исследований. Исключение составляют некоторые результаты, о которых мы будем говорить в следующем отделе, так как Ферма дал им применение в вопросах совершенно иного характера, а также одна стоящая совершенно особо задача, относительно которой мы не знаем даже собственного решения Ферма, но которою много занимались его современники, особенно по ту сторону Ламанша, после того как он предложил ее их вниманию. Задача эта состоит в решении в целых числах уравнения:

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

где a — данное целое число, не являющееся квадратом. Ферма, пояснив задачу указанием отдельных решений для определенных значений a, предлагает доказать, что она имеет бесконечно много решений. Броункер и Валлис сперва неправильно поняли условия так, что x и y должны быть не целыми, а только рациональными: в этом случае задача, как замечает Ферма, довольно легка. Впоследствии они нашли громоздкое решение, по недоразумению, виною которому был Эйлер, приписанное Пеллю. Задача получила поэтому совершенно неправильное название пеллевой задачи. Ее исследованием математики продолжали заниматься и после этого, видя в ней основную проблему теории чисел. Интересно, что за эту задачу брались уже индусские математики; они решили ее тем же способом, как впоследствии Лагранж, не сумев, однако, в противоположность ему, доказать, что их метод действительно всегда приведет к цели („Древние и средние века", стр. 191).

Остальные открытия Ферма в области теории чисел были впервые подвергнуты обстоятельному исследованию Эйлером, которому они послужили исходным пунктом в его собственных работах. Эйлер использовал то немногое, что было известно о методах Ферма, например цитированное выше доказательство невозможности решить в целых числах уравнение $x^4 + y^4 = z^4$; но в большинстве случаев ему приходилось отыскивать новые доказательства. Такое же влияние имело наследие Ферма на работы Лагранжа. Далее, влияние это простирается также на Лежандра и Гаусса, хотя последний и пролагает совершенно новые пути. Несмотря на достигнутые указанными учеными крупные успехи, математики, работающие в области теории чисел, все еще находят во многих предложениях Ферма, иные из которых до сих пор не доказаны, импульс к новым исследованиям. Таким образом, хотя Ферма и не удалось дать систематическое изложение теории чисел, все же современным развитием этой науки и присущей ей теперь внутренней связностью мы в значительной мере обязаны его открытиям и вызванным ими стремлениям доказать их справедливость.

В исследованиях по теории чисел Ферма стоит неизмеримо выше всех своих современников; относительно последних можно, в сущности, вполне ограничиться сделанными указаниями на более или менее интересные результаты, полученные ими в той или иной сравнительно узкой области. Из относящихся к тому же времени исследований, принявших несколько иное направление, надо упомянуть еще о паскалевых признаках делимости чисел, написанных в десятичной системе, на первоначальные множители, в том числе на 7. Результатом глубокого понимания Паскалем значения систематического написания чисел является также его арифмометр, сконструированный по тем же принципам, как и наиболее практичные арифмометры настоящего времени. В исследованиях, о которых будет итти речь в следующем отделе и которые также находятся в связи с теорией чисел, Паскаль стоит рядом с Ферма.

9. Биномиальные коэфициенты, комбинаторика и исчисление вероятностей.

Мы видели выше (стр. 105), что уже со времени Штифеля было известно образование биномиальных коэфициентов как членов таких разностных рядов все более и более высокого порядка, для которых рядом 1-го порядка является ряд натуральных чисел (перед ним предполагается еще ряд, состоящий из одних единиц). Соответствующий ряд 2-го порядка образуется треугольными числами, 3-го порядка — пирамидальными. Исследования древних относительно фигурных чисел, получившие продолжение и в новое время (особенно занимался ими Мавролико); послужили, таким образом, подготовкой к работам, составляющим предмет настоящего отдела. Последователи Штифеля в Германии продолжали его исследования; в начале XVII в. Фаульгабер дал без вывода выражения для суммы r-ых степеней чисел натурального ряда, кончая любым числом, для значений r до $r=11$. Как мы увидим сейчас при разборе результатов Ферма, эта тема находится в тесной связи с образованием членов разностных рядов различных порядков (в наших современных обозначениях n-ый член ряда r-го порядка или сумма n первых членов $r-1$-го порядка имели бы вид $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}$).

Таким образом представляется вероятным, что Фаульгабер знал этот закон составления членов. Для $r=2$ этот закон был известен давно: сумму членов простого разностного ряда умел находить уже Архимед (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 42 и 127). Полное правило образования членов рядов путем умножения, соответствующее вышенаписанной формуле, находим мы, напротив, только в письме Ферма от 1636 г. Насколько это его правило, по крайней мере в столь общем виде, представляло тогда собою для математиков нечто новое, видно из того, что Паскаль много лет спустя снова нашел его и поспешил сооб-

щить его Ферма, не подозревая, несмотря на их переписку, что тот уже давно владел им.

Ферма применил эту формулу также к тому, чтобы решить в общем виде другую задачу — задачу вычисления суммы Σm^r r-ых степеней чисел натурального ряда до некоторого данного числа. Древние знали решение только для $r=2$ (Архимед), $r=3$ и $r=4$ (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 127, 167, 209). Ферма не сообщает, каким путем он получает результат; но в данном случае это несущественно, так как вышенаписанная формула позволяет здесь производить вычисления без всяких затруднений. Действительно,

$$\sum \frac{m(m+1)\ldots(m+r-1)}{1 \cdot 2 \quad \ldots \quad r}$$

состоит из членов вида

$$\Sigma m^r, \ \Sigma m^{r-1}, \ \ldots, \ \Sigma m;$$

из знакомых Ферма выражений для суммы членов разностного ряда любого порядка можно, таким образом, последовательно находить Σm^r для все более высоких значений r. Ниже (гл. III, § 2, c и d) мы увидим, как Ферма, а затем Валлис, пришедший к тому же правилу об образовании суммы степеней, несомненно, самостоятельно, по образцу Архимеда применяли выражения этих сумм при выполнении квадратур. О том, что Ферма был знаком также с определением числа перестановок, сочетаний и пр., говорят его задачи о количестве магических квадратов.

Вполне систематическое и обоснованное изложение свойств и соотношений членов различных разностных рядов находим мы только в „Traté du triangle arithmétique" Паскаля. Так называемый арифметический треугольник представляет собою, конечно, только видоизменение таблицы Штифеля и по существу вполне совпадает с таблицей Тартальи (стр. 106), а закон образования членов с помощью умножения был, как мы указали, найден уже Ферма. Но Паскаль дает этому закону общее доказательство. Доказательство, которое он с полной последовательностью проводит по отношению к этому и дальнейшим предложениям, состоит в применении так называемой математической или полной индукции. Паскаль дает его в ясной и определенной форме, в которой оно с тех пор постоянно применяется к предложениям подобного рода. Он доказывает, с одной стороны, что предложение справедливо, когда входящее в него произвольное число n имеет некоторое небольшое значение r и низшие значения, а с другой стороны, что, если предложение справедливо для некоторого значения n и для низших значений, то оно сохраняет силу и для значения $n+1$; отсюда делается заключение, что предложение остается справедливым и для всех значений n, больших чем r.

Графическое изображение позволяет Паскалю дать его правилам совершенно общее выражение и общее обоснование. Дей-

ствительно, представляя себе число стоящим в некотором $[(m+1)$-м$]$ ряду и некоторой $[(n+1)$-й$]$ колонне, он по существу пользуется нашим обозначением $\binom{m+n}{m}$.

Сочинение Паскаля содержит также полные доказательства, относящиеся к важнейшим применениям рассматриваемых им чисел как в качестве биномиальных коэфициентов, так и в качестве чисел сочетаний. Последняя роль их приводит к приложению их в теории вероятностей.

Прежде чем говорить об основанной Ферма и Паскалем точной теории вероятностей, вернемся к несколько более раннему времени. Уже Тарталья при составлении своих таблиц разностных рядов различных порядков имел в виду прежде всего определение числа сочетаний того или иного рода. Как мы видели, эти ряды продолжаются только до 6-го члена, имеющего для рядов порядков 0, 1, 2, ... соответственно значения 1, 6, 21, ... Целью Тартальи было нахождение числа существенно различных выпадений (6, 21 и т. д.), возможных в случае 1, 2 и т. д. костей. В случае r костей число это равно сумме шести первых членов ряда $(r-1)$-го порядка или 6-му члену ряда r-го порядка; по правилу Ферма оно равно:

$$\frac{6\cdot 7\ldots(6+r-1)}{1\cdot 2\ldots r} \quad \text{или} \quad \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+5)}{1\cdot 2\ldots 5}.$$

Первоначальное изображение результата в виде суммы свидетельствует о том, что он был получен путем последовательного увеличения числа костей. При подсчете к каждому выпадению новой кости отнесены только такие выпадения прежних костей, при которых число очков ни на одной из них не превышает числа очков на вновь прибавленной кости.

Этот подсчет числа существенно различных выпадений стоит в связи с обычным в то время применением костей не только для игры, но также для особого рода гадания, причем каждый результат метания имел особое значение. Таблица Тартальи показывала, сколько ответов могли дать кости. Считать эти ответы обладающими одинаковой вероятностью было бы, конечно, ошибкой. Действительно, в то время как, например, выпадение, при котором все кости дают определенное одинаковое количество очков, может быть осуществлено лишь одним способом, выпадение, при котором все r костей (при $r \leqslant 6$) дают различные количества очков, может быть осуществлено столькими способами, сколько можно составить перестановок из r элементов. Мы, впрочем, не имеем никакого повода приписывать Тарталье эту грубую ошибку. Современник Тартальи Кардано в своем сочинении „De ludo aleae" („Об азартной игре") дает даже ясные указания относительно того, сколькими способами из числа всех вообще возможных можно получить те или иные результаты метания 2 или 3 костей; таким образом, мы находим у него уже оценку вероятностей этих результатов.

Вообще же говоря, однако, в то время были склонны делать упомянутую ошибку. На это указывает применение слова, давшего азартной игре ее название. Арабское слово „азар" значит „трудный", им характеризовалась такая общая сумма очков, которая может получиться только при одном определенном выпадении. При этом выпадения, различающиеся только переменой ролей костей, считались одинаковыми. Например, в случае трех костей относили к „трудным" результатам не только получение суммы 3, образуемой только одним образом (как $1+1+1$), но и суммы 4 ($1+1+2$), образуемой тремя, хотя и не существенно различными, способами.

Азартные игры, несомненно, сопровождались вычислением вероятностей; объективные качества получавшихся при этом результатов зависели от степени понимания игроком сути вопроса и от степени его суеверности. Играло роль при этих расчетах, конечно, и опытное определение частоты, с какой появляются различные комбинации. То обстоятельство, что эти опытные данные при очень большом числе повторений (и правильности наблюдений) приближаются к теоретическим результатам, было отмечено уже Кардано, высказавшим, таким образом, закон больших чисел. Исчисление вероятностей, всецело построенное на точных заключениях, мы находим впервые, однако, только у Паскаля и Ферма. Паскаль, как мы видели, в особенности способствовал развитию столь важного для этого исчисления учения о соединениях. Паскаль и Ферма также принимают за исходный пункт применение к азартным играм; особенно большую роль сыграла здесь задача, которую предложил Паскалю его друг Мере, страстный игрок; однако, оба ученые дают ясные и простые примеры и других более существенных приложений теории вероятностей.

Задача Мере заключалась в следующем: найти, как должна быть распределена между игроками ставка, если игра, состоящая из ряда партий, остается незаконченной. Предположим, что победителем считается тот, кто первый выиграет s партий; пусть, далее, игра была прервана, когда A выиграл a партий, а B — b партий, где $a<s$, $b<s$. Задача эта рассматривалась, хотя и не особенно удачно, уже и раньше. Так, ею занимался Лука Пачиоло, думавший, что ставка должна быть распределена пропорционально числу выигранных каждым партий, т. е. в отношении $a:b$. Кардано правильно возражал на это, что здесь остается неучтенным количество s партий, которые надо вообще выиграть. Он понимал, что решение требовало соглашения, основанного на дальнейших возможностях; найти это решение ему, однако, не удалось. Действительно рациональный подход к задаче видим мы только у Ферма и Паскаля; указания относительно их решения мы находим в их переписке и в сочинении Паскаля об арифметическом треугольнике.

Метод Ферма известен нам прежде всего из упоминания о нем в ответном письме Паскаля и из поправки, сделанной Ферма

к предложенному Паскалем распространению задачи на случай, когда число игроков больше двух. Ферма исходит из того, что для окончания игры потребовалось бы самое большее $s-a+$ $+s-b-1$ партий. Он рассматривает все возможные их результаты. Если бы в α случаях победителем оказывался A, а в β случаях B, то ставка должна быть разделена между ними в отношении $\alpha:\beta$. Например, если $s=3$, $a=1$, $b=0$, то число оставшихся партий не превышает 4. Относительно результатов этих 4 партий мы имеем следующие 16 возможностей:

A A A A B A A A B B B A B B B B
A A A B A A B B A A B B A B B B
A A B A A B A B A B A B B A B B
A B A A A B B A B A A B B B A B

Только в 5 последних случаях победителем оказывается B, в 11 же остальных — A. Следовательно, A должен получить $^{11}/_{16}$ ставки, а B $^{5}/_{16}$, т. е. положение игры таково, как если бы A выиграл $^{3}/_{16}$ общей ставки, или $^{3}/_{8}$ ставки B.

Найденные дроби $^{11}/_{16}$ и $^{5}/_{16}$ представляют собою величины, которые мы теперь называем вероятностями выигрыша A или B; это — частные от деления числа случаев, благоприятных для A или B, на число всех возможных случаев. Таким образом этим понятием вероятности пользовались по существу уже в то время, хотя ему не дано еще было четкого определения.

В одном из писем Паскаль сообщает, что Роберваль возражал против того, что при этом методе во всех случаях предполагается доигрывание 4 партий, тогда как в действительности для выигрыша, например A, в 8 случаях из вышенаписанных достаточно 2 или 3 партий. Паскаль, напротив, указывает, что партии, которые игрались бы после выигрыша A, именно в силу того, что они не отражаются на результате игры, можно по желанию присчитывать или нет. Предположение, на котором основано решение Ферма, было, таким образом, совершенно естественным, и он вправе был сделать его.

Подтверждение этому Паскаль нашел в том, что сам он получил тот же результат, исходя из совершенно других соображений. Он начинает со случая, при котором A выиграл из 3 нужных партий 2, а B только 1 (в предыдущих обозначениях $s=3$, $a=2$, $b=1$). Следующая партия либо даст A окончательный выигрыш либо сравняет его с B. В первом из этих двух равновероятных случаев он получит всю ставку, во втором он может требовать половины ее. В случае, если игра будет прервана перед этой партией, он может, таким образом, претендовать на

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \text{ или } \frac{3}{4}$$

ставки. Если A выиграл 2 партии, а B ни одной, то новая партия либо даст A победу, либо приведет к только что рассмотрен-

ному случаю, в котором A может требовать $\frac{3}{4}$ ставки. Если игра прервана перед этой партией, то A имеет право на получение

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}, \text{ или } \frac{7}{8}$$

ставки. Если, наконец, A имеет только одну выигранную партию, а B ни одной, то новая партия может с одинаковой вероятностью либо привести к предыдущему случаю, либо уравнять положение обоих игроков. Таким образом, если игра прервана перед этой партией, то A должен получить

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, \text{ или } \frac{11}{16}$$

ставки; к тому же результату мы пришли пользуясь методом Ферма.

В сочинении об арифметическом треугольнике Паскаль дает общее решение; он доказывает, что, если A нехватает до выигрыша m партий, а B — n партий, то касса должна быть разделена между ними в отношении:

$$\frac{1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\ldots+\binom{m+n-1}{n-1}}{1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\ldots+\binom{m+n-1}{m-1}}.$$

Написанные здесь биномиальные коэфициенты выражены у Паскаля с помощью указания места их в арифметическом треугольнике, а доказательство проведено путем полной индукции.

Ферма и Паскаль занимались и другими задачами на вычисление вероятностей. Мы видели, что уже задача Мере заставила их нащупать общие принципы, которые должны были составить основу подобного рода исследований. Третьим не менее значительным ученым, обратившимся несколько позже к вопросам теории вероятностей, был Гюйгенс. Занялся он ими под влиянием сообщений об исследованиях Ферма и Паскаля, не будучи, однако, ближе знаком с этими исследованиями. Гюйгенсу также удалось вполне овладеть основными принципами исчисления. Тотчас же по окончании своего труда „О расчетах в азартной игре" (1657) он послал французским математикам, чтобы испытать их в этой области, несколько относящихся к ней задач; полученные им ответы убедили его, что Ферма и Паскаль также обладали общими методами решения. Сам Гюйгенс кладет в основу своих исследований следующее положение: если из $p+q$ (равновероятных) случаев p случаев дают выигрыш a, а q случаев — выигрыш b, то общая оценка ожидаемого выигрыша выражается числом

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Мы видим, что это тот же принцип, который был применен и Паскалем, только выраженный в общем виде. Если, как у Паскаля, величины a и b также представляют собою вероятности, то этот закон совпадает с законом, говорящим, что вероятность наступления либо одного либо другого из нескольких взаимно исключающих друг друга случаев равна сумме вероятностей каждого отдельного случая. Второй основной закон, говорящий, что вероятность совмещения двух событий равна произведению вероятностей каждого из этих событий, как мы видим, также фактически применялся Паскалем.

Ферма, Паскаль и Гюйгенс обладали, таким образом, основными принципами, из которых вскоре развилась теория вероятностей. Через 14 лет после того, как появилось сочинение Гюйгенса, его известный соотечественник Жан де-Витт применил исчисление вероятностей к определению значений пожизненной ренты.

Вопрос этот легко решался при помощи принципа Гюйгенса и вычисления сложных процентов, если только была известна вероятная продолжительность жизни лиц, достигших того или иного возраста. Относящиеся сюда предположения Витта были, однако, довольно произвольными. Двадцать лет спустя той же задачей занялся Галлей, но уже на основании результатов, взятых из действительной таблицы смертностей. Его работа помещена в „Philosophical Transactions" за 1693 г. Так как Галлей воспользовался только одним рядом наблюдений, то у него нет определения средних значений искомых вероятностей. В работе его затрагивается и вопрос о вероятности сложных событий, когда речь идет о продолжительности жизни двух или трех лиц.

Ко всему сказанному можно добавить, что современное учение о вероятностях и о наблюдениях было практически подготовлено также вычислительными работами Кеплера и Бригга. Установление Кеплером законов на основании полученных из наблюдения числовых данных есть, в сущности говоря, не что иное, как „выравнивание" полученных из наблюдения результатов.

10. Геометрия. Применение центральной проекции.

Если, говоря о пышном расцвете большей части ветвей математики, мы до сих пор ничего не упоминали об успехах геометрии, то это вовсе не значит, что последняя находилась в рассматриваемый нами период на заднем плане или не получала дальнейшего развития. Напротив, геометрия образовывала основание, на котором строились успехи других математических наук; именно в ней искали опоры, когда зданию надо было придать особую прочность. Мы видели, что так поступал даже Виета, и притом даже в ту пору, когда он вводил свою символику, которая при дальнейшем развитии создала математику, независимую от геометрии. Геометрией пользовались, осо-

бенно в начале рассматриваемого нами периода, и еще более непосредственным образом, представляя, например, при решении уравнений 3-й степени отдельные члены правой части формулы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

в виде кубов и параллелепипедов, из которых составлен куб $(a+b)^3$. Мы видели, что Непер представляет диференциальное уравнение, служащее для определения логарифма, в геометрической форме (стр. 135), и увидим, что такая же форма давалась и первым исследованиям относительно бесконечно малых. Частично пользовались ею даже в задачах по теории чисел, в которых часто речь шла о прямоугольных треугольниках и т. д.

В последнем случае все дело сводилось, конечно, только к сохранению старых названий; но, вообще говоря, во всех вопросах, где речь шла о величинах, могущих принимать как рациональные, так и иррациональные значения, требование математической точности по необходимости заставляло базироваться на геометрии и учении о пропорциях, которое некогда было поставлено с нею в связь. Математическая точность немыслима без полной уверенности в незыблемости основания, на котором производятся дальнейшие построения. Подготовить новое основание, которое бы наилучшим образом соответствовало постепенно воздвигавшимся новым зданиям, не было еще времени. Поэтому приходилось искать для них опору в том, что уже само по себе стояло прочно, а именно, в античной греческой геометрии. На фоне ее мы и должны рассматривать разобранные нами успехи науки.

В то время было вполне естественно постоянно снова обращаться к этому основанию. Изучение древних было тогда еще общим отправным пунктом; тому, кто хотел наверняка быть понятым, приходилось постоянно делать ссылки на них. Классиков тогда знали, умели следить за ходом их мыслей и находить у них многое, что зачастую ускользает от современного математика или историка, изучающего старых авторов с сознанием своего превосходства и потому поверхностно.

Овладение античной геометрией повело к успехам, далеко выводившим за ее пределы, и дало в руки средства, которые можно было широко применить и вне областей, культивировавшихся в древности. Мы уже видели, как геометрические исследования, благодаря которым получила развитие тригонометрия привели к формулам, имевшим большое значение для теории уравнений; в дальнейшем мы увидим и другие примеры такой же связи.

Близкое знакомство с античной геометрией и с ее приемами должно было, конечно, принести новые плоды и внутри той области, в которой работали древние математики. Мы не можем, однако, останавливаться на этом в нашей книге, главный предмет которой — развитие математических воззрений и методов. Мы не будем поэтому описывать тех блестящих геометрических

достижений, благодаря которым Виета (стр. 123) приобрел себе имя галльского Аполлония, снова найдя построение окружности, касающейся трех данных окружностей и решив, таким образом, задачу, решенную в древности уже Аполлонием. Не будем мы также разбирать новых задач на построение, решенных им и другими математиками средствами, уже известными в древности.

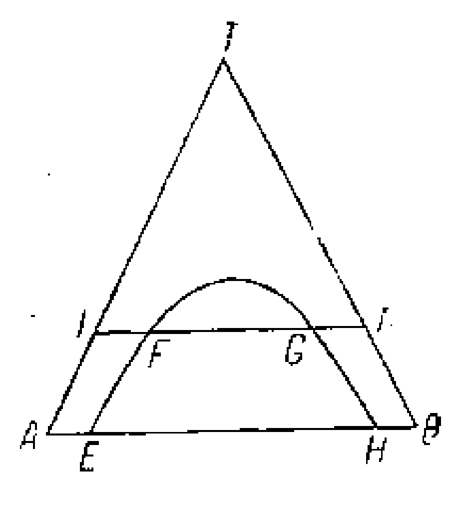
Новые геометрические средства, сразу же получившие крупное значение, а впоследствии приобретшие еще большее, мы находим, с одной стороны, в новом и планомерном применении перспективы, или центральной проекции, а с другой — в связи геометрии с выросшей при ее поддержке алгеброй, достигшей постепенно такой независимости от геометрии, что теперь она, в свою очередь, могла оказывать последней поддержку. Начнем с центральной проекции, получившей ко времени Ферма у Дезарга и Паскаля обширные применения, которые могли бы, будучи продолжены в духе этих математиков, уже тогда привести к созданию проективной геометрии.

Древними центральная проекция применялась при изучении свойств сечений конуса; однако, она служила здесь (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 133 и след.) лишь для вывода одного планиметрического свойства конических сечений, дальнейшее же исследование кривых исходило из этого свойства и имело исключительно планиметрический характер. Неоднократно пользовались древние, в частности в астрономии, особым видом центральной проекции — стереографической проекцией. В „Аналеммах" Птоломея применяется прямоугольная проекция.

Есть признаки, указывающие, что уже началу нового времени было свойственно значительно более широкое пользование центральной проекцией. Альбрехт Дюрер дал ей дальнейшее развитие своими математическими правилами перспективных построений. Современник и соотечественник его Иоганн Вернер, знакомый, по сообщениям древних комментаторов, с тем, как определял конические сечения Менехм, но вряд ли знавший труд Аполлония, получил стереометрическим путем уравнение конических сечений относительно осей. Принято думать, что таким же путем пришел он и к уравнению относительно асимптот; в действительности, однако, он планиметрически вывел его из уравнения относительно осей.

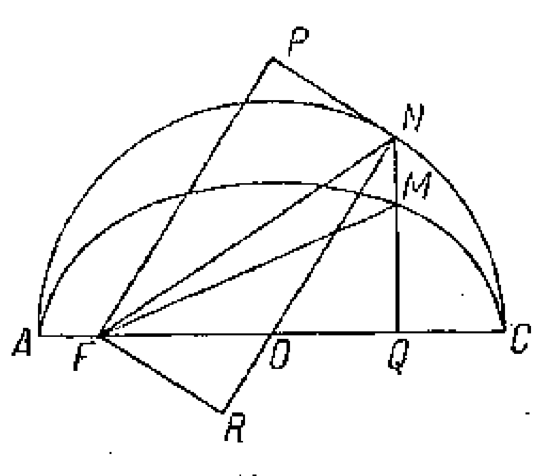
Напротив, Мавролико несколько позже дал стереометрический вывод уравнения относительно асимптот, сводящийся в основном к следующему. Пусть *TAB* (черт. 4) есть осевое сечение конуса вращения. Параллельно ему на расстоянии a находится гиперболическое сечение, которое проектируется на плоскость чертежа гиперболой *EFGH*. Обозначив через *IFGK* проекцию любого сечения, параллельного основанию, получаем, так как это сечение есть круг, что $I \cdot FK = a^2$. Отсюда легко вывести, что площадь параллелограмма, сторонами которого служат асимптоты и параллельные им прямые, проведенные через точку F, имеет постоянную величину. Асимптоты гиперболического сечения Мав-

ролико, пользующийся другим чертежом, получает как следы, образуемые в плоскости гиперболы плоскостями, касательными к поверхности конуса и проходящими через образующие, параллельные плоскости сечения. Мавролико дает также стереометрические доказательства некоторых теорем о касательных; он вполне сознает противоположность своих методов стремлениям Аполлония доказать почти все планиметрически. Попытка Мавролико воспроизвести неизвестные еще тогда книги 5—7 Аполлония не соответствует тому, что в действительности находится в этих книгах; однако она показывает, что Мавролико достаточно хорошо знал Аполлония, чтобы на имевшемся у того основании вести дальнейшую самостоятельную работу.



Черт. 4.

Вызванные коперниковой системой астрономические исследования также требовали применения стереометрических методов. Дело шло теперь об установлении зависимости между гелиоцентрической, или действительной, и геоцентрической, или кажущейся, орбитами планеты. В то время как первая лежит в плоскости, проходящей через Солнце, последняя является проекцией первой на небесный свод. Дело весьма сильно усложняется здесь тем, что движется самый центр проекций; но как раз в силу этого методы, с помощью которых Кеплер по кажущимся орбитам нашел действительные, знаменуют собою крупные успехи в применении стереометрии, и именно это способствовало развитию принципов, лежащих в основании учения о проекциях. В своем сочинении „Оптическая часть астрономии" („Astronomiae pars optica", 1604 г.) Кеплер прямо пользуется центральной проекцией, хотя здесь нет еще ее специальных применений к коническим сечениям. Однако он уже часто пользуется новыми методами теории конических сечений, рассматривая параболу как переходную форму между эллипсом и гиперболой и представляя основные предложения относительно радиусов-векторов параболы как предельный случай соответствующих предложений для эллипса и гиперболы.



Черт. 5.

Кеплерово определение планетных орбит сделало конические сечения, и в частности их фокусы, предметом особого внимания. Мы находим у Кеплера следующее предложение, играющее в его

исследованиях почти ту же роль, какую теперь играет уравнение конического сечения в полярных координатах с полюсом в фокусе. Если (черт. 5) из подвижной точки N круга с центром в O опустить перпендикуляр NQ на неподвижный диаметр AC, то геометрическое место точки M этого перпендикуляра, расстояние которой FM от некоторой определенной точки F диаметра AC равно проекции (RN) FN на диаметр ON (или расстоянию FP от точки F до касательной, проведенной из N), есть эллипс, имеющий диаметр AC главною осью, а точку F фокусом. В настоящее время справедливость этого предложения легко проверить с помощью уравнения эллипса.

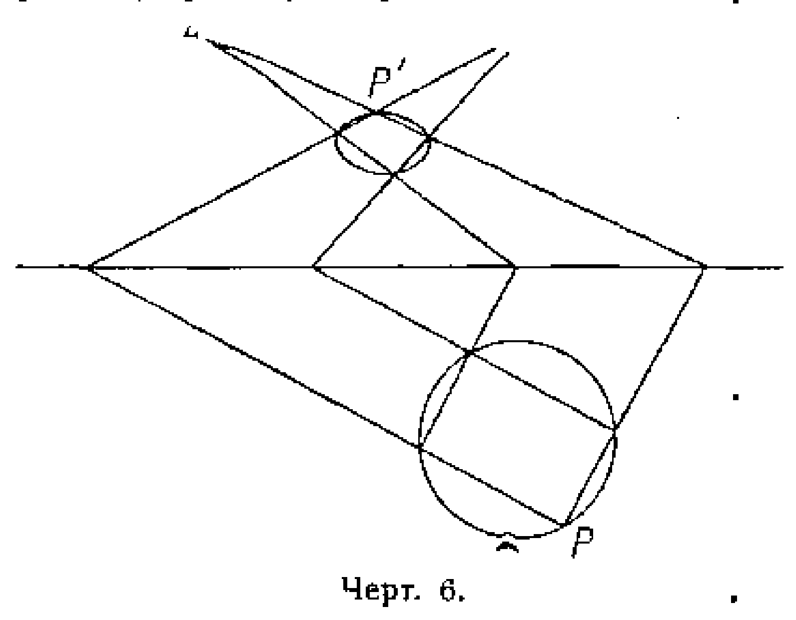
Кеплер доказывает как это предложение, так и другие геометрически, на основании учения Аполлония о конических сечениях. Одно сделанное им замечание свидетельствует о том, что даже в его время, когда, как мы уже упоминали, в деле овладения античной математикой сделаны были большие успехи, сочинение Аполлония не считалось особенно ясным. Чтобы оправдать тяжеловесность одного из своих доказательств, Кеплер приводит „Конические сечения" Аполлония как пример того, что есть вещи, которые нельзя изложить так, чтобы они были сразу понятны при беглом чтении.

Для того чтобы учение о конических сечениях стало доступно более широкому кругу математиков, требовалось более простое и соответствующее времени изложение этого учения, нежели то, которое мы находим у Аполлония. Такое изложение дал современник и друг Декарта Мидорж. Мы, однако, не будем останавливаться на его работе, так как по существу он идет в ней теми же путями, что и Аполлоний. Совершенно новыми взглядами обязаны мы, напротив, Дезаргу, положившему в основание своих геометрических исследований, в частности исследований о конических сечениях, систематическое применение перспективы.

Для того чтобы дать крупным успехам, связанным с именем Дезарга, правильное историческое освещение, недостаточно оттенить путем сравнения с прежними очень скромными попытками в этом направлении то новое, что принесли с собою эти успехи; надо еще проследить, какого развития достигло к этому времени практическое учение о перспективе, положенное Дезаргом в основу широких геометрических исследований, и посмотреть, насколько оно в тогдашнем его состоянии было пригодно для практического применения. Хорошее представление об этом можно получить из большого труда Гвидо Убальдо „Перспектива" („Perspectiva"), появившегося в 1600 г. В этом произведении, отношения которого к более ранним работам по тому же вопросу мы не будем здесь касаться, особенно ясно и отчетливо изложены правила о перспективном изображении плоской фигуры (обычно горизонтальной) на другой плоскости (обычно вертикальной) и приведены решения задач, в которых данными являются различные точки и отрезки. В основе всех этих решений лежит

перспективное изображение различных систем параллельных линий, лежащих в первоначальной плоскости, с помощью систем, проходящих через определенные точки прямой, параллельной линии пересечения плоскостей. Для получения изображения плоскость данной фигуры покрывается сеткой, состоящей из двух систем параллелей, которые затем отображаются двумя пучками лучей (один из них, если одна из систем параллельных параллельна линии пересечения плоскостей, сам может быть пучком параллельных). Отображение P' точки P получается тогда в точке пересечения лучей, соответствующих прямым, принадлежащим обеим системам параллельных и проходящим через P.

Убальдо ясно отмечает, что построение выполняется независимо от центра перспективы, если только известны точки схода A и B, соответствующие двум системам параллелей, лежащих в плоскости данной фигуры (черт. 6). Луч одного из определенных таким образом пучков, соответствующий некоторой параллели соответствующего пучка параллелей, характеризуется тем, что он должен пересекать линию пересечения обеих плоскостей в той же точке, как и эта параллель. Таким образом дело сводится к построению двух соответственных или коллинеарных фигур, когда известны ось соответствия и точки одной, соответствующие двум бесконечно удаленным точкам другой. Убальдо строит, таким образом, эллипс, как изображение представленного на чертеже круга. Изображение центра круга, которое он также строит, является по отношению к эллипсу полюсом прямой, проходящей через обе данные точки схода A и B. Далее, одно из построений Убальдо показывает, что хорды эллипса, соединяющие концы двух хорд, проходящих через полюс, пересекаются на поляре. Убальдо упускает только случай вывести из своих построений общие геометрические заключения. Так, он не отмечает, что здесь мы имеем дело со свойствами, которые принадлежат каждой точке плоскости конического сечения и связанной с ней прямой.



Черт. 6.

Убальдо отображал также тела, стоящие на основной плоскости. Масштаб высот для различных плоскостей, параллельных картинной плоскости, он находит с помощью точек схода параллельных горизонтальных прямых. Рассматривал он и перспективу на различных кривых поверхностях. Эти вопросы представляют, однако, для нас здесь сравнительно мало интереса. Не будем

останавливаться также на разборе того, в каких отношениях Дезарг в своем учении о перспективе (1636) ушел дальше Гвидо Убальдо. О том, что он был новатором и в этой практической области, свидетельствует уже то сопротивление, которое он встретил (стр. 47). В добавлении к своей работе Дезарг указывает на общие принципы, применяемые в учении о перспективе, и на средства, даваемые ими, для дальнейших исследований. В том же добавлении он приводит рассматриваемую впоследствии в его учении о конических сечениях и важную для самой перспективы задачу построения прямых, изображающих оси конического сечения.

На свое сочинение о конических сечениях (1639) сам Дезарг смотрел лишь как на предварительный набросок (Brouillon project). Поэтому мы должны обращать гораздо больше внимания на обилие содержащихся в нем совершенно новых для того времени методов и новых результатов, чем на недостаток связи между отдельными частями и результатами. Мы находим здесь наряду с хорошо разработанными основаниями общего проективно-геометрического учения о конических сечениях много новых и притом очень общих предложений, приводимых без доказательств; доказательства эти при пользовании новыми методами Дезарга выполняются довольно легко, в то время как без них они представляли бы громадные затруднения.

Установка Дезарга имеет совершенно общий проективно-геометрический характер. Он не только рассматривает параллельные прямые как частный случай пересекающихся, когда точка пересечения удалена в бесконечность, но и бесконечно удаленные точки плоскости он трактует как точки одной бесконечно удаленной прямой. Цилиндр он рассматривает как частный случай конуса. О параболах с общим диаметром говорится, что они касаются друг друга в бесконечно удаленной точке, а о двух гиперболах с общими асимптотами, — что они касаются в двух бесконечно удаленных точках. Все эти утверждения имеют силу потому, что от частных случаев с помощью центральной проекции можно перейти к общим. Таким же образом мы получаем возможность переходить от предложений, касающихся наиболее простых и хорошо знакомых частных случаев, к предложениям более общим.

Сам Дезарг широко пользовался этим. В то время как у Аполлония мы находим из теории поляр только первоначальное определение поляры как геометрического места точек, гармонических с полюсом по отношению к тем точкам, в которых прямая, проходящая через полюс, пересекает коническое сечение, — работа Дезарга дает гораздо большее: в ней, правда, нет вполне обоснованной теории поляр, но есть целый ряд предложений, которые могут быть развиты в такую теорию. Среди них мы можем указать, например, даже на установление того обстоятельства, что пары линий, соединяющих определенную точку конического сечения с парами точек, отсекаемыми на нем лучами пучка, обра-

зуют инволюцию. Не только бесконечно удаленные, но и бесконечно близкие элементы рассматриваются Дезаргом как частные случаи общих соотношений. Касательная, например, является секущею, точки пересечения которой совпадают, и служит, таким образом, полярою своей точки касания.

Дезарг сам говорит, что большую часть этих предложений он доказал прежде всего с помощью „рельефа", т. е. методом перспективного перенесения, и определенно указывает, что при пользовании этим методом можно воспользоваться двумя различными исходными образами. Можно взять, во-первых, полюс в центре круга; в этом случае доказательства основываются на том, что ординаты перпендикулярны к их диаметрам; можно, во-вторых, произвольный диаметр принять за поляру. От этих образов те или иные свойства переносятся затем на любую центральную проекцию. Кроме предложений о полюсах и полярах мы должны отметить еще одно разбираемое ниже предложение, носящее общий характер и получаемое Дезаргом путем такого же обобщения, основанного на центральной проекции.

Как ни легко выполняются подобные перенесения, однако остается еще то затруднение, что мы не получаем сразу полной уверенности в общности распространенного предложения. Дезарг делает многое для устранения сомнений, могущих здесь возникнуть, но все же его рассуждения, столь плодотворные в отношении получения новых результатов, не всегда проводятся таким образом, чтобы они давали вместе с тем и полное доказательство. Доказательства отдельных предложений, действительно имеющиеся у него, связаны также не непосредственно с перспективными обобщениями, но в большей мере с общей теорией, связное развитие основ которой дано в начале его сочинения. Так как дело идет о том, чтобы перенести на центральную проекцию не только дескриптивные, но и метрические свойства фигуры, то эта теория должна иметь алгебраический исходный пункт, хотя бы и в геометрической форме. Дезарг осуществляет это, давая в начале своего сочинения прежде всего полное учение об инволюции пар точек прямой. Ему принадлежит и самый термин „инволюция". Некоторые основные положения этого учения имеются уже у Паппа в его сообщениях об утерянном сочинении Аполлония „Об определенном сечении" (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 147), содержавшем, повидимому, и другие предложения, относившиеся к тому же вопросу. Дезарг, вероятно, знал эти сообщения столь же хорошо, как современный ему критик его книги Богран (Beaugrand), указавший на соответствующее место из Паппа; но Дезарг дополнил и развил это учение применительно к своей трактовке конических сечений.

Ряд пар точек прямой, образующих инволюцию (обозначим их через AA', BB', CC'), определяется прежде всего как такой ряд, по отношению к которому точка O прямой имеет одну и ту же степень, так что

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC', \ldots$$

Путем алгебраических преобразований отсюда выводятся равенства

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

и аналогичные им; таким образом мы получаем соотношения, выражающие тот факт, что 6 точек A, A'; B, B'; C, C' образуют инволюцию, не пользуясь при этом какими-либо иными точками. Как эти алгебраические преобразования, так и те, которые ведут к другим соотношениям, Дезарг проводит в соответствии с античной геометрической алгеброй 2-й книги Евклида, на которую он делает определенные ссылки. Относительно O — центральной точки, как мы сказали бы теперь — Дезарг указывает, что она связана в инволюции с бесконечно удаленной точкой.

Дезарг разбирает различные положения, которые пары точек, образующие инволюцию, могут принимать по отношению к центральной точке и друг к другу. Он показывает, что инволюционные пары точек либо все разделяют друг друга, либо все не разделяют и что в последнем случае инволюция содержит две двойные точки B и C и что тогда (употребление знаков перед отрезками было несвойственно тому времени)

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{CA}{CA'}.$$

Соотношение это, которому мы теперь даем имя гармонического, Дезарг называет инволюцией 4 точек. Не упускает он и разбора частных случаев, например того, что середина отрезка по отношению к концам его гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой.

То, что инволюция есть проективное свойство, т. е. что центральная проекция трех пар точек, образующих инволюцию, снова дает три пары точек, образующих инволюцию, Дезарг легко доказывает посредством соотношения между отрезками сторон треугольника, отсекаемыми любою трансверсалью. Он называет это соотношение птоломеевым; в действительности же, оно имеется уже у Менелая („Древние и средние века", стр. 161). Из доказанной проективности следует соответствующее соотношение между 3 проектирующими парами линий. Дезарг рассматривает при этом также „инволюцию 4 прямых", в частности тот случай ее, когда две прямые делят пополам углы между двумя другими.

То, что прямая пересекается 6-ю сторонами полного четырехугольника (как мы теперь называем его) в парах точек, образующих инволюцию, Дезарг доказывает также с помощью предложения Менелая. Для того чтобы доказать то же относительно точек пересечения прямой с окружностью и сторонами вписанного четырехугольника, ему приходится вместе с тем воспользоваться предложениями, относящимися к степени точки относительно окружности: эти предложения он цитирует по 3-й книге

Евклида. Ввиду фундаментальной важности предложения приведем вкратце это доказательство.

Пусть $BCDE$ — вписанный четырехугольник, противоположные стороны которого пересекаются трансверсалью в парах точек P и Q, I и K; точки пересечения трансверсали с окружностью пусть будут L и M. Обозначим, далее, буквою F точку пересечения продолжений сторон CD и BE. Тогда имеем:

$$\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PE} = \frac{QC \cdot QD}{FC \cdot FD} \cdot \frac{FC \cdot FD}{PB \cdot PE} = \frac{QC \cdot QD}{FC \cdot FD} \cdot \frac{FB \cdot FE}{PB \cdot PE}$$

или вследствие того, что

$$\frac{QC}{FC} \cdot \frac{FB}{PB} = \frac{QI}{PI}$$

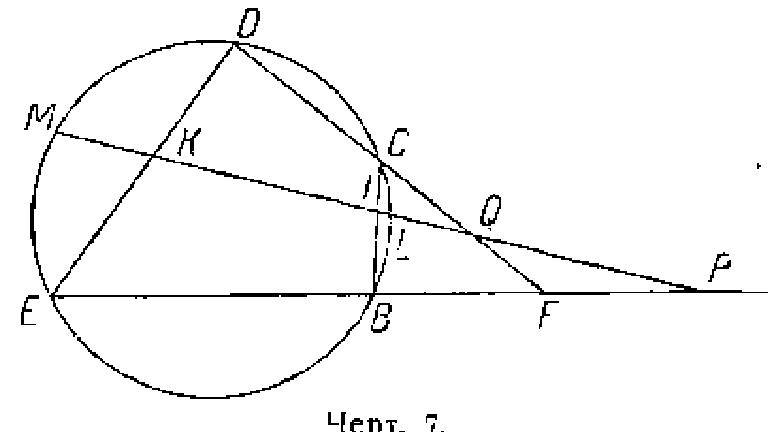
и

$$\frac{QD}{FD} \cdot \frac{FE}{PE} = \frac{QK}{PK},$$

получаем:

$$\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK}.$$

Инволюция точек I, K; L, M; P, Q, таким образом, доказана. Так как всякая фигура, содержащая коническое сечение, вписанный четырехугольник и пересекающую их трансверсаль, может быть спроектирована в такую, в которой коническое сечение заменено кругом, то мы имеем полное доказательство того, что трансверсаль дает в сечении с коническим сечением и противоположными сторонами четырехугольника пары точек, образующие инволюцию. Дезарг уже раньше отметил, что когда он особо не оговаривает противного, его доказательства применимы ко всем случаям, а не только к взятому на данном чертеже взаимному расположению точек и прямых. Путем этого замечания он сообщает своим доказательствам ту же общность, которая теперь более совершенным образом достигается благодаря применению знаков.



Черт. 7.

Можно, конечно, считать, что доказанное здесь предложение содержится в установленном уже древними предложении, что произвольное коническое сечение может быть получено как „место к четырем прямым" („Древние и средние века", стр. 148), и представляется весьма вероятным, что упомянутое выше сочинение Аполлония „Об определенном сечении" содержало обработку того материала, который это предложение могло дать для теории конических сечений. Однако данное этому предложению название „предложения Дезарга" является вполне оправданным не только потому, что Дезарг первый вполне определенно установил его, но и потому, что он выдвинул его в качестве общего

основания, исходя из которого можно получить полное учение о свойствах отдельных конических сечений. Примеры этого Дезарг дает в своих доказательствах уже упомянутых предложений о полюсах и полярах, сопряженных диаметрах и т. д., хотя, по его словам, он сперва доказал их иначе. Он показывает также, что, применяя его общее предложение к частному случаю, когда четырехугольник является трапецией, мы приходим к обобщению обычной аполлониевой трактовки конических сечений, а, если за трансверсаль взять прямую, служащую диаметром для параллельных сторон трапеции, то мы, в частности, придем к трактовке самого Аполлония. Только учение о фокусах требует развития некоторых новых элементарных предложений относительно круга; но и здесь Дезарг, как мы увидим, проявляет исключительную для того времени независимость от приемов Аполлония.

Принципы, проводимые Дезаргом в его наброске учения о конических сечениях, позволяют ему решить задачу, поставленную в заключительной части его работы о перспективе: в перспективном изображении конического сечения найти точки и прямые, соответствующие центру, осям и фокусам. Для этого он пользуется получающимся на картинной плоскости следом s плоскости, проведенной через вершину T проектирующего конуса параллельно плоскости самого конического сечения. Полюс P этого следа является проекцией искомого центра, а сопряженные лучи, проходящие через полюс, проекциями сопряженных диаметров. Они определяют на s инволюцию. Вторая инволюция, произвольную пару точек которой обозначим через N, N', определяется на s с помощью пар взаимно перпендикулярных прямых, проводимых через T в плоскости Ts. Прямые, соединяющие P с парой точек, общей обеим этим инволюциям, являются проекциями осей. Точка пересечения которой-нибудь из этих прямых с касательной, проведенной из точки N второй из упомянутых нами инволюций, и точка пересечения той же прямой с прямой, соединяющей точку касания с точкою N', принадлежащей к той же паре, что и N, образуют пару точек новой инволюции. Эта новая инволюция является проекцией той, которая образуется на оси точками пересечения с касательной и нормалью, проведенными из одной и той же точки кривой. Двойные точки этой инволюции, которые на одной из двух проекций осей будут действительны, представят, таким образом, проекции фокусов.

Наше краткое изложение на языке современной геометрии является, конечно, несколько свободным по форме, но суть дела передает точно. Насколько хорошо Дезарг владел примененными здесь принципами, лучше всего видно, быть может, из того, что он, независимо от учения о фокусах, высказал общее проективное предложение об инволюции, которое он использовал для построения проекций фокусов, а также из того, что с помощью одного из своих учеников Пюжо (Pujos) он получил прямое доказательство этого общего предложения, первоначально найденного путем проективного обобщения. Вопрос о распростра-

нении теории поляр на поверхности 2-го порядка, равно как вопросы, относящиеся к свойствам пары конических сечений, разработаны Дезаргом слишком мало, чтобы дать значительные результаты, однако, эти исследования интересны как показатель того, что Дезарг ясно понимал широкую применимость своих методов.

Дезарг, бывший, как помнит читатель, архитектором и инженером, издал также несколько небольших сочинений, в которых его теории находят практическое применение в искусстве и ремеслах: они прилагаются к учению о перспективе, причем он заботится даже о рациональном пользовании воздушной перспективой, к выполнению резьбы на камне, к устройству солнечных часов и т. д. В сочинениях этих, с одной стороны, предлагается усовершенствование обычных практических приемов, с другой — дается точное обоснование последних. Сочинения ученика его, гравера на меди Боссе, содержат указания, что они написаны в соответствии с методами Дезарга; кое-что Боссе берет от Дезарга непосредственно.

Из небольших сочинений Дезарга мы хотим упомянуть о добавлении к учению о перспективе, содержащем три чисто геометрических предложения. Предложения эти дают возможность выполнять перспективные построения в одной единственной плоскости. Они касаются перспективных (коллинеарных) фигур плоскости, т. е. таких, в которых каждой точке одной соответствует точка другой, а каждой прямой прямая, причем прямые, соединяющие соответственные точки, проходят через одну точку, а точки пересечения соответственных прямых лежат на одной прямой.

Первое предложение утверждает, что два треугольника, обладающие первым из этих свойств, обладают и последним, второе, что два полных четырехугольника коллинеарны, когда пять сторон одного пересекаются с соответственными сторонами другого в точках, лежащих на одной прямой. Эти предложения очевидны, когда фигуры лежат в различных плоскостях. Если они лежат в одной плоскости, то доказательство получается с помощью предложения Менелая. Указанные предложения имеют, как известно, основное значение для проективной геометрии в той ее форме, какую придает ей Штаут (Staudt). В этом случае они должны быть, однако, доказаны без помощи пропорций.

Третье предложение утверждает, что, если на сторонах четырехугольника $ABCD$ выбрать 4 точки E на AB, 4 точки F на BC, 4 точки G на CD и 4 точки H на DA, то величина

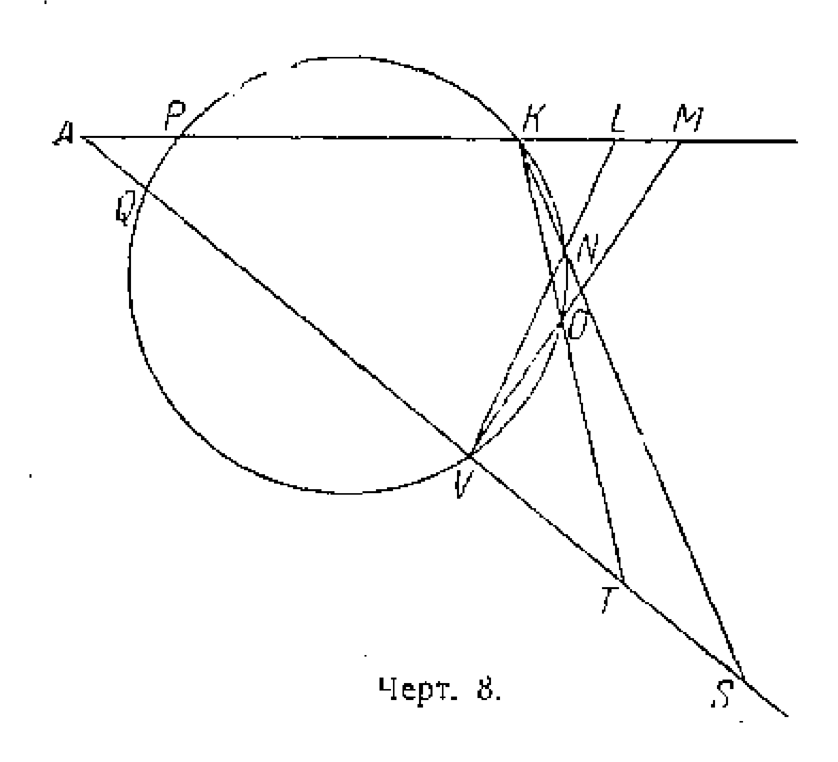
$$\Pi\frac{AE}{BE}\cdot\Pi\frac{BF}{CF}\cdot\Pi\frac{CG}{DG}\cdot\Pi\frac{DH}{AH},$$

где произведения Π распространены для каждой прямой на все 4 точки ее, при переходе к перспективной фигуре остается неизменной. Предложение это, как известно, имеет силу и в том случае, если заменить четырехугольник m-угольником, а 4 точки

каждой стороны n точками; выбранное Дезаргом значение 4 для каждой из этих величин взято, несомненно, тоже лишь в виде примера. Доказательство выполняется с помощью предложения Менелая. Указанное предложение было впоследствии положено Понселе (Poncelet) в основу исследования проективных метрических свойств.

Отметим еще, что Боссе в работе, изданной после смерти Дезарга, сделал попытку изложить указанный Дезаргом способ построения барельефа. Насколько можно судить по очень несовершенному изложению, Дезарг применил здесь построение коллинеарных тел, что и само по себе представляется наиболее вероятным.

Мы уже упоминали талантливого сотрудника Дезарга, Пюжо; 16-летний Паскаль дал в совсем маленьком сочинении „Опыт построения теории конических сечений" („Essai sur les coniques") блестящее продолжение работы Дезарга. Он установил здесь предложение, которому восхищенный Дезарг, вполне понимавший его значение, дал имя la Pascale. Предложение это касается фигуры, которую мы называем паскалевым шестиугольником, в то время как сам Паскаль называет ее „мистический шестилинейник" („Hexagramma mysticum"). Заключается оно, как известно, в том, что если шесть произвольных точек конического сечения, взятых в любом расположении, принять за вершины шестиугольника (собственного или несобственного), то три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой. Относительно доказательства Паскаль замечает только, что сперва это свойство доказывается для круга, а затем с помощью проекции переносится на любое коническое сечение. Паскаль, указывающий сам, что его работа возникла под влиянием сочинений Дезарга, говорит, что из этого свойства можно вывести все предложения о диаметрах, параметре, касательных и т. д., а также построение конических сечений по данным точкам или другим данным условиям. Дезарг утверждает, что предложение Паскаля содержит в себе четыре первые книги Аполлония.



Черт. 8.

Паскаль не тратит времени на вывод всех этих следствий. Зато он указывает на некоторые другие совершенно общие со-

отношения между точками конического сечения. Одно из них заключается в том, что при обозначениях, указанных на черт. 8,

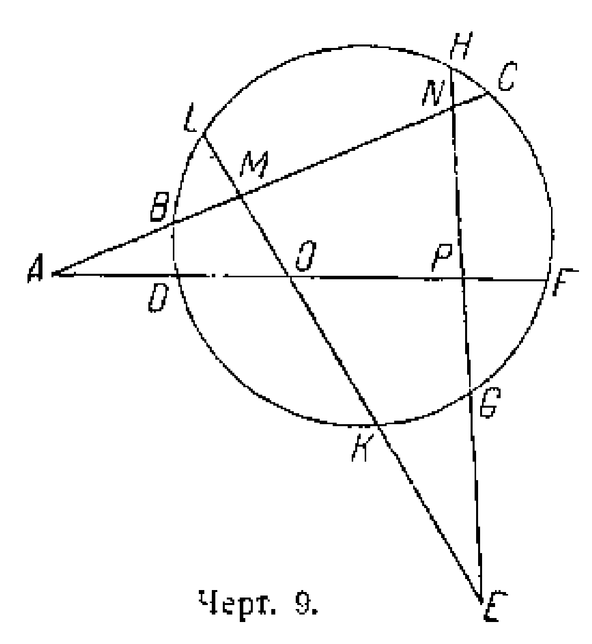
$$\frac{PM \cdot AS}{MA \cdot SQ} = \frac{PL \cdot AT}{AL \cdot TQ}.$$

Значение этого предложения становится ясным, если написать его в виде:

$$\frac{PM}{MA} : \frac{PL}{LA} = \frac{AT}{TQ} : \frac{AS}{SQ};$$

оно выражает тогда, что двойное отношение P, A, M, L равно двойному отношению между A, Q, T, S, или, иными словами, что двойные отношения пучков, проектирующих четыре точки конического сечения из любых двух его точек V и K, равны между собою. Другое общее предложение выражает зависимость между точками пересечения конического сечения с тремя прямыми; оно обычно называется предложением Карно, так как Карно распространил его на любую алгебраическую кривую. Паскаль устанавливает, сверх того, соответствующее предложение для четырехугольника ($MAPE$): он утверждает, что (черт. 9)

$$\frac{MB \cdot MC}{PF \cdot PD} \cdot \frac{AD \cdot AF}{AB \cdot AC} = \frac{ML \cdot MK}{PH \cdot PG} \cdot \frac{EH \cdot EG}{EK \cdot EL}.$$



Черт. 9.

Это предложение ясно свидетельствует об успехе, который представляют собою проективные методы по сравнению с приемами Аполлония. Действительно, если $BC \parallel DF$, а $KL \parallel GH$, то последние отношения в обеих частях равенства пропадают, и мы получаем предложение, которое было нами названо предложением о степени (Цейтен, „Древние и средние века". стр. 136 и 143) и которое образует важнейшую основу для богатых содержанием предложений 3-й книги Аполлония. Паскаль, особенно стремившийся к тому, чтобы из его предложений можно было вывести все, что имеется у Аполлония, приводит в своем кратком обзоре вышеприведенное предложение, конечно, именно в силу того, что оно содержит в себе результат, столь важный для Аполлония.

Паскаль приводит еще несколько теорем и задач, которые могут быть доказаны и решены с помощью его общих предложений; в числе их находится дезаргово предложение об инволюции, причем Паскаль отмечает большие заслуги Дезарга. Обработку остальной части своего учения о конических сечениях

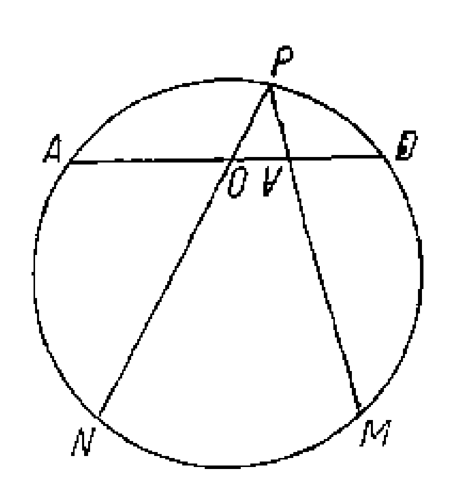
он пока что с юношеской скромностью откладывает; план ее был ему, во всяком случае, настолько ясен, что он чувствовал себя уверенным в его выполнении. То, что Паскаль действительно сделал по этому плану, он показывал различным математикам. Сейчас можно судить об этом только по краткому сообщению Лейбница, получившего во время пребывания во Франции от семьи умершего Паскаля во временное пользование его рукопись. Сообщение Лейбница показывает нам, что Паскаль действительно выполнил обещанное и сделал даже больше, так как он определял в своей рукописи коническое сечение не только с помощью пяти данных точек, но и пяти данных касательных и вообще с помощью точек и касательных, общее число которых равно пяти. Указание на это мы имеем и в письме, адресованном кружку парижских математиков. Хотя, таким образом, мы и не знаем детально, как Паскаль осуществил свой замысел, однако знакомство с методами Дезарга позволяет нам легко понять, как он мог в действительности получить все нужные результаты, заставляя в своих общих предложениях отдельные точки или прямые сливаться или уходить в бесконечность.

На собраниях кружка математиков, куда Паскаль уже мальчиком получил доступ через своего отца, он, несомненно, имел случай встречаться с Дезаргом. Возможно, таким образом, что тот сам познакомил Паскаля со своими воззрениями, проникнуть в суть которых без личного его руководства, на основании одной его книги было бы нелегко. Совершенно новые и гениальные руководящие мысли Дезарга, которые мы извлекли из того, что он говорит о полюсах и полярах и их связи с учением о диаметрах, не выступают в начале его сочинения с достаточной ясностью. Кроме того, память читателя загромождается большим количеством совершенно новых терминов, которые Дезарг считает нужным ввести. В довершение всего к этому присоединяется тяжеловесная евклидовская формулировка многочисленных соотношений, изображающих инволюции. Читатель, который остановится на этом и не дойдет до геометрических приложений, для которых предназначены эти соотношения, естественно, может увидеть в этом, как это и случилось с Ботраном, только повторение сказанного Паппом в его разборе сочинения Аполлония.

Как говорит Ферма, при такого рода чтении язык Дезарга должен представляться своего рода „жаргоном". Сам Ферма отнюдь не разделяет этого мнения; он ставит работы Дезарга очень высоко. Для него не составляло труда правильно понимать их, так как, будучи знаком с древними авторами и в этой области, он решал геометрические задачи с той же уверенностью, как и задачи по теории чисел. В свое время он обменивался со старшим Паскалем трудными геометрическими задачами на построение треугольников. Виета дал построения окружностей, касающихся трех данных окружностей. Ферма указал столь же

простое построение для шаров, касающихся четырех данных шаров. Ферма принадлежат также геометрические предложения, относительно которых он думал, основываясь на указании Паппа, что они должны иметь тот же характер, что и предложения, содержавшиеся в утерянном труде Евклида о поризмах; представляется спорным, правильна ли его догадка о характере евклидовых поризмов; но во всяком случае найденные им глубокие геометрические соотношения хорошо отвечают духу исследований древних.

Эти попытки натолкнули Ферма, сверх того, на предложение, которое, как он ясно, указывает, при перспективном обобщении приводит прямо к „предложению Дезарга". Предложение Ферма, о котором идет речь, заключается в следующем: если две определенные точки окружности N и M (черт. 10) соединить с подвижной точкою ее P, то прямые PN и PM пересекают хорду AD, параллельную MN, в таких двух точках O и V, что $\frac{AO \cdot DV}{AV \cdot DO}$ остается постоянным. Если дать P два различных положения и выполнить проектирование, то получается предложение Дезарга. Форма, которую дал своему предложению Ферма, особенно интересна тем, что постоянная величина $\frac{AO \cdot DV}{AV \cdot DO}$ представляет собою двойное отношение между A, D, O и V или между прямыми, проектирующими определенные точки кривой A, D, N и M из подвижной точки ее.



Черт. 10.

Пользуясь здесь и выше термином „двойное отношение", мы не должны, конечно, забывать, что до действительного установления этого понятия было еще далеко. Оно принадлежит лишь XIX в. и идет от Мебиуса (Möbius), а геометрическую систему построили на нем лишь Штейнер (Steiner) и Шаль (Chasles)[1].

Высокую оценку Дезарг нашел и у Декарта. Она относилась, однако, прежде всего к его личности и проницательности его ума, о которых Декарт говорит неоднократно в своих философских и алгебраических работах, которые, в свою очередь, высоко ставил Дезарг. Декарт дает также лестную оценку практическим работам Дезарга и его стремлению найти полезные применения науки. Декарт отзывается с похвалой и о конических сечениях Дезарга; но чувствуется, что он слишком занят своей собственной новой трактовкой геометрии, чтобы вполне оценить тон-

[1] Hr. Björnbo нашел, однако, недавно у Менелая свидетельство о том, что предложение о проективности двойных отношений, особенно на шаре, было определенно известно в древности, притом в общем виде (см. Abh. z. Gesch. d. mathem. Wissensch., XIV, стр. 96).

кость и большое значение методов Дезарга. То же отношение, что у самого Декарта, находим мы и у всего математического мира того времени, быстро усвоившего декартовы методы. Правда, Декарт тоже давал совершенно новое освещение широким областям геометрии; но, как мы скоро увидим, работа, которую надо было выполнить в этих областях, была подготовлена как математикой древних, так и трудами, относившимися к непосредственно предшествовавшему периоду, так что можно было сразу взяться за дальнейшее развитие этих методов. Новые задачи, для которых был особенно пригоден декартов метод, также уже имелись — их доставляло зарождавшееся исчисление бесконечно-малых. Поэтому наиболее крупные математики скоро последовали за Декартом, а те области математики, к которым нельзя было применить методов Декарта, или результаты которых не давали материала для дальнейшего развития этих методов, остались в тени. Геометрия древних, в которой параллельные координаты играли уже большую роль, и в результатах которой параллели встречаются довольно часто, представляла собою для применения декартовых методов значительно более благодарную область, чем более общая проективная геометрия. Это ясно видно хотя бы при сравнении аполлониева предложения о степени с обобщением его у Паскаля (стр. 185). В XIX в., правда, проективная геометрия ставила аналитической задачи, в большой степени способствовавшие развитию как понятия о координатах, так и алгебры, но для этого ни аналитическая геометрия Декарта, ни современная ему алгебра не были еще, конечно, готовы; они просто уклонялись от таких задач.

Из сказанного ясно, что проективная геометрия Дезарга, несмотря на хороший прием, оказанный ей наиболее крупными математиками того времени, не могла еще тогда по-настоящему пустить корни. Для этого нужно было, помимо всего прочего, лучшее и более доступное изложение ее, чем то, которое было дано в наброске самого Дезарга; но оно, конечно, не заставило бы себя ждать, если бы эпоха была более восприимчива к такого рода идеям; оно даже имелось уже в неизвестном нам, правда, виде в рукописи Паскаля. Рукопись эта, однако, никогда не была опубликована, а работы самого Дезарга оставались до такой степени незамеченными, что даже наиболее значительная из них, напечатанное всего в 50 экземплярах (?) сочинение о конических сечениях, не сохранилось, и содержание его дошло до нас только благодаря сделанной в 1679 г. де-ла-Гиром копии. Де-ла-Гир сам выпустил за шесть лет до этого сочинение о конических сечениях, теперь, повидимому, утерянное. Он был слишком занят прежде всего своею собственной работой, чтобы правильно оценить силу и общность методов Дезарга, значение которых далеко выходит за пределы учения о конических сечениях; критикует он и неудобную для выполнения алгебраических операций и старомодную форму изложения у Дезарга.

Собственные указания де-ла-Гира относительно его первой

работы позволяют предполагать, что она была выполнена по тому же хорошо обдуманному плану, как и следующий более обширный его труд, появившийся в 1685 г., — „Конические сечения" („Sectiones conicae"). У де-ла-Гира тоже встречается рассмотрение конического сечения на самом конусе и, следовательно, пользование перспективой, что уже в первом труде его могло явиться результатом косвенного влияния Дезарга; но он не выходит при этом за пределы того, что ему нужно по его плану, и, видимо, не чувствует в полной мере значения проективных методов Дезарга. У де-ла-Гира нет их применения к обобщению знакомых предложений; он пользуется ими в первую очередь для совершенно противоположных целей, правда, так же удачно и целесообразно. В то время как Дезарг выводит предложения о полярах из предложений о диаметрах, де-ла-Гир дает прежде всего изящное элементарное доказательство предложения о полярах по отношению к окружности и применяет затем проектирование, чтобы показать, что в коническом сечении каждая система параллельных хорд имеет диаметр. Таким путем он избегает пространного планиметрического доказательства, занимающего значительную часть 1-й книги Аполлония. У де-ла-Гира имеется и распространение предложений о полярах с круга на конические сечения, но он не пользуется при этом бесконечно удаленными точками. Вообще говоря, образцом для него, несомненно, являются конические сечения Аполлония, хотя доказательства де-ла-Гира проще и нередко объединяют в себе несколько отдельных доказательств Аполлония. Об общих проективных предложениях, которые бы, подобно предложению Дезарга или Паскаля, обнимали собою все учение о конических сечениях, у него нет и речи.

Сочинение де-ла-Гира, получившее благодаря своей большей доступности сравнительно широкое распространение, не могло, таким образом, содействовать популяризации идей Дезарга. Для того чтобы стать достоянием более широких кругов, они должны были зародиться сызнова. Так как это произошло лишь значительно позже рассматриваемого в настоящей книге периода, то мы ограничимся здесь немногими указаниями. Ламберт (Lambert, 1758) снова применил дезарговы принципы центральной проекции и дал им дальнейшее распространение. Однако возможность действительного развития проективная геометрия получила лишь благодаря школе Монжа (Monge), начертательная геометрия которого вообще позволила исследователям лучше освоиться с операциями в пространстве. Следует отметить работы Брианшона (Brianchon); по-настоящему же обосновал проективную геометрию, сделав ее способной к дальнейшему развитию, Понселе (Poncelet). Работы Понселе совершенно независимы от дезарговых; о том, что занимавшие его идеи существовали уже в XVII в., он узнал лишь по очень поверхностной статье Бограна, притом умалявшей значение труда Дезарга.

11. Работы Ферма по алгебре и аналитической геометрии. Координаты.

Почти одновременно с появлением работ Дезарга по проективной геометрии связь между геометрией и алгеброй, существовавшая с первых дней научной математики, достигла поворотного пункта. Повороту этому, подготовленному всем предыдущим ходом вещей, суждено было иметь громадное значение в дальнейшем развитии математики. Первоначально связь между геометрией и алгеброй состояла в том, что геометрия и геометрическая трактовка давали алгебре и алгебраическим операциям ту опору, которую мы имеем теперь в математической символике. Однако уже в те времена развитие алгебры было столь значительным, что она могла, в свою очередь, оказывать геометрии существенные услуги, сводя, например, деление окружности на 5 равных частей к решению уравнения 2-й степени или позволяя Аполлонию трактовать вопрос о так называемом „пропорциональном сечении" чисто алгебраически. Самостоятельность алгебры и возможности применения ее к самой геометрии с тех пор все время росли, сперва потому, что алгебра по мере увеличения своих вычислительных ресурсов завязывала связи с совершенно иными областями помимо геометрии, а затем потому, что в новое время она получила свою собственную символику. Однако, пока математика продолжала развиваться на основании, данном Виета, наиболее точное выражение алгебраическим операциям продолжала давать, как мы уже не раз отмечали, безупречная в своей строгости геометрия древних.

В новое положение по отношению к геометрии алгебра была поставлена Декартом. Он дал приложение алгебры к геометрии в связи с координатным методом, которое мы теперь называем аналитической геометрией. Однако этот фундаментальный метод мог получить развитие и без той реформы алгебры, которую предпринял Декарт; это видно из того, что одновременно с появлением геометрии Декарта Ферма, в формально алгебраическом отношении примыкавший еще к Виета, развил тот же метод в своем опубликованном, правда, значительно позже сочинении „Введение в теорию плоских и пространственных мест" [1] („Ad locos planos et solidos isagoge"); относительно этого метода и важнейших применений его он сделал ряд сообщений своим парижским друзьям. Мы и начнем с рассмотрения координат у Ферма, так как его аналитическая геометрия ближе к математическим воззрениям предшествующего времени и к античной геометрии; к тому же самый метод выявляется у него непосредственнее, чем в геометрии Декарта.

Сперва, однако, мы разберем одну чисто алгебраическую работу Ферма, имевшую значение и для аналитической геометрии

---

[1] „Плоскими местами" называли те геометрические места, которые представлялись прямой или окружностью. „Пространственные места" — геометрические места, представляющиеся коническими сечениями. *Прим. ред.*

и для других встречающихся у него применений алгебры. Речь идёт о маленьком сочинении, посвященном исключению неизвестных из уравнений высших степеней. Прием Ферма, показанный им на частном примере, состоит в следующем: пусть из уравнений:

$$a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_{m-1} y + a_m = 0,$$
$$b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

надо исключить y. Имеем:

$$\frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_{m-1} y}{a_m} = \frac{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y}{b_n}.$$

Сокращая на y, получаем уравнение, степень которого на 1 ниже. Повторное применение приема приводит в конце концов к желаемому исключению.

В добавлении это исключение применяется к освобождению уравнений от иррациональности. Для этого каждому радикалу дается новое обозначение, например, полагается

$$\sqrt[m]{ax^r + bx^{r-1} + \ldots} = t.$$

Возводя это равенство в m-ю степень, получаем новое рациональное уравнение, причем к прежним неизвестным прибавилось новое t. Исключение последовательно вводимых новых неизвестных дает в конце концов искомое рациональное уравнение с первоначальными неизвестными.

Так как работы Ферма по аналитической геометрии относятся к более раннему времени, чем только что рассмотренная, то неудивительно, что в том же добавлении мы находим замечания относительно того, что уравнение с одним неизвестным вполне определяет некоторую отдельную величину, уравнение с двумя неизвестными — геометрическое место на плоскости, уравнение с тремя неизвестными — поверхность в пространстве. Эти замечания указывают, впрочем, на способ, каким фактически уже в древности трактовались вопросы, сводящиеся к уравнениям с двумя или тремя неизвестными. Чисто алгебраическое значение этих уравнений и, в частности, существование бесконечного количества решений такого уравнения были уже в непосредственно предшествовавшее время с большой определенностью отмечены Баше (стр. 149) и Гетальди.

Во вступлении к „Isagoge“ Ферма дает указания относительно применения параллельных, в частности прямоугольных, координат на плоскости. Он заставляет обе неизвестные величины уравнения (рассматриваемые как отрезки) примыкать друг к другу под данным (обыкновенно прямым) углом (мы сохраняем здесь выражения самого Ферма). Конец и направление одной он оставляет при этом неизменными и исследует кривую, пробегаемую другим концом образованной обеими координатами ломаной линии.

Такое изображение кривой по существу совпадает с тем, которое было употребительно уже в древности. Таким способом представляются у Аполлония конические сечения — между прочим при установлении тех свойств, которые принимаются им за основные для планиметрического исследования конических сечений („Древние и средние века", стр. 138 и след.). Различие заключается только в роли алгебры. В древности алгебраические уравнения с двумя неизвестными совсем не появлялись как нечто самостоятельное. В геометрической алгебре такое уравнение представляло собою только геометрическую зависимость между прямыми, которые мы называем теперь координатами, только так называемое „симптома" характеризуемой этой зависимостью кривой. Совершенно естественно, что Ферма этот термин переносит на уравнение кривой. Самое понятие о координатах у древних выражено не в столь явной форме, чтобы Ферма мог позаимствовать его у них: ординаты ставятся у них в зависимость скорее вообще от положения точки оси абсцисс, из которой они выходят, чем прямо от абсциссы этой точки, или, иными словами, кривые определяются как места движущейся точки подвижной прямой неизменного направления, причем „симптома" кривой выражает зависимость между обоими этими движениями. В промежуточное время пользование координатами не прекращалось, а в некоторых отношениях даже усиливалось. Это относится, например, к применению сферических координат для астрономических определений положения, а затем для исследования движения планет; Орезм (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 219) употреблял координаты для изображения эмпирических кривых. Гвидо Убальдо при построении перспективы плоской фигуры (стр. 177) также определял ее точки с помощью координатной сетки, состоящей из двух систем параллелей. Мы увидим, далее, когда подойдем к зачаткам исчисления бесконечно малых, что и до Ферма интегрирование постоянно выступало в форме квадратуры кривых, отнесенных к прямоугольным координатам.

Введенное Ферма и Декартом применение координат к алгебраическому определению геометрических мест стояло, однако, ближе к применению координат древними геометрами, особенно Аполлонием, чем к тому, которое мы находим у астрономов, у Орезма или в исследованиях, касающихся бесконечно малых. Импульсами к установлению и дальнейшему развитию своего метода координат Ферма был обязан сочинениям древних; особую роль играло тут его стремление доказать содержащиеся в них результаты, доказательства которых не дошли до нас. Большее развитие алгебры позволяет ему дать найденным результатам более общую и сжатую форму. В качестве главного результата Ферма выставляет в начале „Isagoge" следующие общие положения: уравнение 1-й степени между координатами представляет прямую линию уравнение 2-й степени, вообще говоря, коническое сечение. Главной целью сочинения является доказательство этих положений.

О том, как Ферма постепенно дошел до таких результатов, мы можем судить, с одной стороны, по его более раннему сочинению „Две восстановленные книги Аполлония Пергского о плоских местах“ („Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti“), с другой, — по его переписке. Упомянутое сочинение содержит доказательства тех предложений из пропавшего сочинения Аполлония о плоских местах, которые дошли до нас благодаря Паппу. Предложения эти, частично очень простые, касаются геометрических мест, представляющих собою прямую или окружность. Для того чтобы дать геометрическое доказательство большинству их, не требовалось еще никаких особых методов. Только в двух случаях весьма общая форма выставленных предложений представляла некоторые затруднения; это относится к 7-му предложению 1-й книги, состоящему в том, что геометрическое место точек, расстояния которых от любого количества прямых удовлетворяют однородному уравнению 1-й степени, есть прямая, и к 5-му предложению 2-й книги, согласно которому геометрическое место точек, расстояния которых от любого количества данных точек имеют определенную сумму квадратов, есть окружность. Так, по крайней мере, истолковывает истинный смысл этих изложенных несколько многоречиво предложений Ферма, хотя второе место у Паппа можно было бы понять и так, что между квадратами расстояний должно иметь место общее уравнение 1-й степени. Излишнее ограничение в 7-м предложении 1-й книги, состоящее в том, что уравнение должно быть однородно, содержится у Паппа в явной форме.

Трудность, которую в этом предложении представляет наличие любого числа данных прямых, Ферма преодолевает в своем доказательстве последовательным распространением на большее число прямых. Что касается до второго предложения, состоящего в том, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от данных точек равна определенной величине, есть окружность, то Ферма удается в первом сочинении устранить трудность, состоящую в наличии любого количества данных точек, лишь в том случае, когда все эти точки лежат на одной прямой. Он достигает этого, относя искомую точку к прямоугольной системе координат, в которой осью абсцисс служит прямая, проходящая через данные точки, причем абсциссы данных точек положительны. Он легко находит тогда, определяя квадраты расстояний по пифагоровой теореме, что искомые точки находятся на одинаковом расстоянии от точки оси абсцисс, абсцисса которой равна среднему арифметическому абсцисс данных точек.

Преимущества употребления координат настолько бросаются в этом случае в глаза, что это должно было побудить Ферма воспользоваться этим средством и в других вопросах. Он скоро увидел, как он сам замечает в конце „Isagoge“, что таким путем можно получить „гораздо более изящные и общие определения плоских мест“, чем те, которые он сам дал в своей реставрации

сочинения Аполлония. Он замечает также, что таким образом можно найти бесконечное количество других результатов, которые можно поставить наряду с аполлониевыми; в частности, он указывает на обобщение 7-го предложения 1-й книги Аполлония на случай неоднородных уравнений.

Равным образом Ферма должен был попытаться применить координатный метод и к упоминавшимся древними „пространственным местам", и, в частности, к двум из них, бывшим предметом особого внимания Аполлония: „месту к трем прямым" и „месту к четырем прямым", т. е. к геометрическому месту точек, удовлетворяющих уравнениям

$$x^2 = ayz \quad \text{и} \quad xy = azu,$$

где a — постоянная, а x, y, z, u — расстояния точки от 3 или 4 прямых. При этом совершенно несущественно, берутся ли эти расстояния по направлениям, перпендикулярным к прямым, или образующим с ними данный угол. Ферма занимался определением этих мест уже раньше; еще до появления „Геометрии" Декарта они были предметом его письменных сообщений, встреченных парижскими математиками с большим интересом. Вначале Ферма применял к этим геометрическим местам, так же как и к плоским, специальные приемы. Первое его решение задачи о „месте к 3 прямым", довольно легкой для человека, знакомого с Аполлонием, косвенным образом содержится у самого Аполлония в некоторых из доказательств, которые, как мы показали („Древние и средние века", стр. 147), можно поставить в соответствие с образованием конического сечения с помощью проективных пучков. Эта трактовка приближается, таким образом, к методам аналитической геометрии лишь постольку, поскольку ей родственен уже метод Аполлония. Когда Ферма позже попытался решить те же задачи, отнеся подвижную точку к определенным координатным осям, то он скоро увидел, что уравнения искомых мест квадратные. Задача Ферма состояла поэтому в том, чтобы показать, что квадратное уравнение представляет коническое сечение, а также точнее определить форму и положение этого конического сечения.

Таким образом мы хорошо знаем предварительную историю „Isagoge" Ферма. В „Isagoge" даются в кратком и ясном изложении полные указания относительно определения вида линий, представляемых уравнениями 1-й и 2-й степени, причем, в частности, отмечается условие, при котором линия в последнем случае является окружностью. Ферма прежде всего доказывает с помощью подобных треугольников, что уравнение $ax = by$ представляет прямую, проходящую через начало, и дает вывод уравнений окружности, отнесенной к двум взаимно перпендикулярным диаметрам, гиперболы, отнесенной к асимптотам, параболы, отнесенной к диаметру и касательной в конце его, и эллипса или гиперболы, отнесенных к двум сопряженным диаметрам. Эти уравнения конических сечений взяты непосредственно у Аполлония. Далее, Ферма рассматривает другие виды уравнений 1-й

и 2-й степени и сводит их посредством преобразования координат к прежде полученным формам. В случае отсутствия в уравнении члена с xy для этого требуется только перенос начала, который не представлял затруднений. Прием, который надо применять при наличии члена с xy, Ферма поясняет на следующем примере. Уравнение

$$2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$

можно преобразовать в

$$(x + y)^2 + x^2 = a^2.$$

Если взять за новые оси координат прямые $x + y = 0$ и $x = 0$, то из чертежа видно, что новые координаты будут $x_1 = x\sqrt{2}$, $y_1 = x + y$; между ними имеем уравнение

$$\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2,$$

выражающее по Аполлонию, что кривая есть эллипс, в котором новые координатные оси служат сопряженными диаметрами. Так как при этом существенно только то обстоятельство, что коэфициентом при xy является величина постоянная или, как выражается Ферма, данная (data), то доказательство Ферма применимо и к иным уравнениям, нежели взятое здесь в качестве примера.

Ферма не оставляет без внимания и однородного уравнения 2-й степени между x и y. Он начинает с предположения, что кривая имеет в этом случае, кроме начала, еще одну точку, и показывает затем, что она содержит и всю прямую, соединяющую эти точки.

Мы находим, таким образом, у Ферма уже очень полный разбор уравнений 1-й и 2-й степени между параллельными координатами на плоскости; надо, однако, отметить при этом, что в наиболее трудном пункте этого разбора он вынужден еще строить свою аналитическую геометрию на геометрии древних. Действительно, когда говорится как о знакомой вещи о том, что уравнение вида

$$Ax^2 \pm By^2 = C$$

представляет коническое сечение также и в том случае, если координаты косоугольны, то при этом предполагается, что здесь идет речь о тех же кривых, как и при прямоугольных координатах, или что всегда существует бесконечное количество пар сопряженных диаметров, из которых одна образует прямые углы. Это предположение Ферма заимствует, таким образом, еще от Аполлония; то же самое делает в своей геометрии и Декарт.

У древних нахождение геометрических мест стояло в теснейшей связи с применением их к решению геометрических задач или алгебраических задач в геометрической форме; для этой цели пользовались пересечением геометрических мест, и в частности,

для решения задач, приводящихся к уравнениям 3-й и 4-й степени, — пересечением конических сечений. Хотя уже при возникновении аналитической геометрии алгебра обладала лучшими и чисто алгебраическими средствами для прямого решения таких уравнений, было все же замечено, что новые алгебраические координатные методы представляли большие преимущества для применявшегося древними геометрического решения алгебраических задач. И вот мы видим, что Ферма, Декарт и другие математики, например де-Слюз, усердно применяют аналитическую геометрию к нахождению таких конических сечений, которые особенно удобны для решения уравнений 3-й и 4-й степени, причем корни уравнений определяются как абсциссы точек пересечения конических сечений. Так как это представляет собою лишь усовершенствование способа решения, который вскоре должен был утратить свое значение, то мы ограничимся по этому поводу лишь одним замечанием, относящимся к Ферма. Ферма понимал, что такое решение уравнений 3-й и 4-й степени (которое могло заключаться лишь в том, чтобы посредством соотношения 2-й степени между неизвестною x и новою неизвестною y, например $x^2 = ay$, свести данное уравнение, содержащее x, к уравнению 2-й степени между x и y) можно осуществить бесконечным количеством способов, — между прочим, так, чтобы решение уравнения определялось пересечением параболы с окружностью. Это еще раз свидетельствует о той свободе, с которой он владел своим координатным методом. Позже мы будем иметь случай говорить об усовершенствованиях, внесенных им в декартово решение уравнений высших степеней с помощью кривых высших порядков.

Из писем Ферма и маленького сочинения его „Isagoge ad locos ad superficiem" („Введение в изучение поверхностных мест") мы видим, что он применял свою аналитическую геометрию и к определению геометрических мест в пространстве. При этом он, однако, не употребляет пространственных координат, а определяет поверхности, исследуя свойства линии их пересечения с любою плоскостью. С особенным удовлетворением он отмечает следующее пространственное расширение одного из прежних своих предложений: геометрическое место точек, квадраты расстояний которых от данных точек в пространстве имеют данную сумму — или, в более общем случае, удовлетворяют уравнению 1-й степени — есть шаровая поверхность. Действительно, если спроектировать на некоторую плоскость расстояния от данных точек до точек геометрического места лежащих в этой плоскости, то квадраты проекций удовлетворяют уравнению того же вида, так что сечение плоскостью есть круг. Подобным же образом Ферма находит, что геометрическое место точек, расстояния которых от данных плоскостей удовлетворяют уравнению 1-й степени, есть плоскость. Если эти расстояния удовлетворяют уравнению 2-й степени, то геометрическое место есть поверхность, пересекаемая любою плоскостью по коническому сечению или по прямым. Здесь у Ферма чувствуется, однако, некоторая не-

уверенность, так как поверхности 2-го порядка он знает в сущности только по Архимеду. Хотя он и не ограничивается подобно последнему рассмотрением поверхностей вращения и хотя он рассматривает также эллиптические и гиперболические цилиндры, но и он не замечает существования эллиптических гиперболоидов и гиперболических параболоидов. Не замечает он также, что геометрическое место точек, расстояния которых x, y, z от трех плоскостей удовлетворяют уравнению $xy = az^2$ (распространение на пространство места к 3 прямым), есть коническая или цилиндрическая поверхность.

„Симптомы" кривых у древних не всегда были только словесным выражением алгебраического уравнения между прямоугольными или параллельными координатами; были и такие, которые относили кривую (как например архимедову спираль) к полярным координатам или (как например квадратрису, — Цейтен, „Древние и средние века", стр. 62) к смешанной системе прямоугольных и полярных координат. В новое время начали применять, по образцу Архимеда, полярные координаты тогда, когда стали продолжать инфинитезимальные исследования Архимеда; при этом начали приводить во взаимную связь результаты, выражающиеся одинаковым образом в полярных и прямоугольных координатах. В дальнейшем мы будем подробнее говорить об этом; пока упомянем только, что Григорий Сен-Винцент в своем сочинении „Геометрическое решение задачи квадратуры круга и сечений конуса" (Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni), появившемся лишь в 1647 г., но писавшемся до выхода „Геометрии" Декарта, дал этому методу преобразования также иное применение. Он сравнивает различные свойства архимедовой спирали

$$r = \frac{\vartheta}{2\pi} a,$$

где r и ϑ — полярные координаты, со свойствами параболы

$$x^2 = 2py = \frac{a}{2\pi} y,$$

точки которой, определенные в прямоугольных или косоугольных координатах (x, y), так связаны с точками (r, ϑ), что $x = r$, $y = r\vartheta$.

Таким путем он, пользуясь различными предложениями Архимеда относительно спирали, получает предложения относительно параболы. Все они принадлежат, впрочем, к тем, которые легко можно вывести из уравнения самой параболы, написав его в виде $x = 2p\frac{y}{x}$. Наибольший интерес представляют те из них, которые связаны с исследованиями, касающимися бесконечно малых, например единообразное определение величин, которые мы называем теперь полярной подкасательной спирали и подкасательной параболы, или найденная, как мы увидим, также иным путем зависимость между квадратурами обеих кривых. Как ни просто все это, но Григорий вступил здесь на удачный путь. Мы уви-

дим, что и в других отношениях он достигает результатов, которые, будучи просты сами по себе, в скором времени в работах других математиков принесли обильный урожай.

12. Геометрия Декарта.

В „Историческом обзоре развития геометрических методов" Шаль (Chasles) дает восторженную оценку идеям, которые Декарт развил в своей „Геометрии". „Proles sine matre creata" — дети, появившиеся на свет без матери — так характеризует образно Шаль эти идеи Декарта.

Высокая оценка Шаля не является преувеличенной. Идеи Декарта, действительно, имели огромное преимущество перед теми, которые до него господствовали в математике: они оказались способными проникать во все более и более широкие круги, приобщать эти круги к сокровищам, составлявшим дотоле достояние немногих, и, более того, привлекать их к умножению этих сокровищ. Вот почему „Геометрия" Декарта знаменует в истории математики переход к новой эпохе.

Однако характеристика Шаля представляется нам глубоко ошибочной, и мы привели здесь эти известные его слова лишь для того, чтобы, опровергнув их, сделать более ясной нашу концепцию. Мы отнюдь не хотим этим возражать против труда Шаля в целом. Большая заслуга этого труда состоит в том, что Шаль рассматривает в нем историческое развитие специфически геометрических методов, на что до него обращалось очень малое внимание. В частности, Шаль заострил внимание на вопросе об историческом развитии методов новой геометрии, одним из наиболее выдающихся представителей которой является он сам. В сущности именно Шаль познакомил нас с работами Дезарга. Влияние же „Геометрии" Декарта сказывалось на всей математике и было общеизвестным. Заниматься им Шалю поэтому не было особенной надобности. Таким образом процитированные слова его указывают в первую очередь только на то, что он вполне понимал чрезвычайное значение труда Декарта и новизну заложенных в нем идей.

Дитя без матери — это сравнение, как мы видели, подходит скорее к проективной геометрии Дезарга; именно поэтому она и не смогла принести плоды; она сама была некоторым образом бесплодной матерью. „Геометрия" Декарта была, напротив, хорошо подготовлена, и эта подготовка состояла в такой обработке всей математической почвы, что новые мысли Декарта вскоре же смогли принести обильные плоды.

Меньше всего эпитет „дитя без матери" может быть отнесен к декартовой аналитической геометрии в узком смысле слова, так как мы только что познакомились с ее сестрою-близнецом, аналитической геометрией Ферма, происхождение которой мы установили в предыдущей главе. Применение связанных с алгеброю координат у Ферма и Декарта было почти одинаково,

если говорить только о тех собственно математических трудностях, которые при этом преодолевались. Значит, в „Геометрии“ Декарта должно было содержаться, кроме того, и нечто иное, что именно и обеспечило ей блестящий ее успех. Причиной этого успеха отнюдь не является то случайное обстоятельство, что работа Декарта вышла в свет задолго до работы Ферма. Ведь Ферма еще до появления „Геометрии“ Декарта сообщал о своих исследованиях по аналитической геометрии парижским математикам, от которых он раньше всего мог ожидать понимания и которые действительно оценили значение его работ.

Дело в том, что идеи „Геометрии“ Декарта отнюдь не ограничиваются тем плодотворным применением алгебры к геометрии, которое составляет предмет собственно аналитической геометрии; они совершенно изменяют существовавшее до тех пор соотношение между алгеброй и геометрией и знаменуют, таким образом, реформу всей математики, до той поры имевшей свое признанное основание в геометрии, а теперь получающей его в алгебре. Последняя не могла уже впредь снова базироваться на геометрии, а должна была вести дальнейшее существование самостоятельно и непосредственно как общий аппарат арифметики. Реформа эта в значительной степени была подготовлена всем предшествующим развитием. При рассмотрении аналитической геометрии Ферма мы уже имели случай коснуться одного из факторов этого развития. Именно, мы указали на предшествующее развитие связи между геометрией и алгеброй в форме геометрической алгебры, в которой, правда, эта связь носит обратный характер. К этому нужно добавить еще развитие техники счета и вспомогательных средств самой алгебры, в частности ее символики. Последняя была особенно нужна, чтобы действительно обеспечить алгебре как в логическом, так и в техническом отношении необходимую независимость от геометрии, столь хорошо вооруженной благодаря успехам предшествующего времени. На это развитие мы уже неоднократно указывали выше. Арифметическое понимание алгебры, видящее в алгебраических операциях только выражение арифметических расчетов, встречалось уже нередко. Индусы и не знали иного понимания; находим мы такое понимание и у отдельных арабских писателей, а из новых математиков, например, у Симона Стевина (стр. 101). Оно имеется даже и там, где авторы еще чувствовали себя логически обязанными представлять себе операции, имеющие общее значение, геометрически. Однако только у Декарта построенная на арифметике алгебра достигает такого развития, что алгебраический метод может получить полное признание не только как метод, несущий с собой огромные облегчения, но и как метод точный и общий.

Чтобы правильно судить о сущности успехов, которыми мы обязаны Декарту, надо сравнить его понимание алгебры и его алгебраические ресурсы с теми, которые были у Виета. Правда, в алгебраическую символику Виета были уже до Декарта вве-

дены некоторые усовершенствования (например его обозначение степеней особыми словами quadratum, cubus и т. д. было заменено повторением равного сомножителя, так что вместо A cubus стали писать AAA), но все же у наиболее значительных математиков, как, например, у Ферма, в основе лежит все еще, главным образом, алгебра Виета. Мы должны при этом иметь в виду, что Виета хотя и применял фактически повсюду символику для обозначения арифметических операций, но считал еще нужным обращаться к геометрическому их представлению всякий раз, как требовалась полная уверенность в общности результата. Мы видели также, что и Дезарг построил алгебраическую теорию инволюций, лежащую в основе его геометрических исследований, в стиле Евклида (стр. 180). Как раз по поводу связанных с этим трудностей Декарт указывает Дезаргу в одном из писем, что есть гораздо больше людей, которые знают, что́ такое умножение, чем людей, которые знают, что́ такое составление отношений.

Декарт ясно видел, что понятная и легко применимая алгебра должна иметь исходный пункт в арифметике, а не в геометрических операциях, которыми до него было связано с геометрией, например, учение о пропорциях. Этот новый исходный пункт он ясно и определенно выдвигает на первых же страницах своей „Геометрии". Когда он говорит на этих страницах, что́ нужно сделать в *геометрии*, это равносильно тому, что он решает задачу основания *общей математики*, так как до сих пор последняя находила в геометрии свое наиболее полное выражение.

Декарт начинает с замечания, что все геометрические задачи можно свести к определению длин отрезков. „Подобно тому, как вся *арифметика* состоит только из 4—5 действий, а именно, сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня, и в *геометрии* для нахождения искомых отрезков надо только *прибавлять* или *отнимать* другие; или, имея отрезок, который я для лучшей связи с числами буду называть единицей и который вообще можно выбирать по произволу, и имея кроме него два других отрезка, надо найти четвертый, который так относится к одному из этих двух, как другой к единице, — *это равносильно умножению*; или приходится находить четвертый, который так относится к одному из двух данных, как единица к другому, — *это равносильно делению*; или, наконец, случается находить одно, два или несколько средних пропорциональных между единицей и другим отрезком — *это равносильно извлечению корня. И я нисколько не колеблюсь ввести эти арифметические выражения в геометрию, чтобы мое изложение было более понятным*".

В этом введении Декарт дает общие, независимые от рациональности величин определения арифметических действий: умножения, деления и извлечения корня. Общность результатов достигается здесь, правда, лишь тем, что эти определения основы-



Декарт

1596 — 1650

С гравюры Эделинка. Исполнено по портрету работы Ф. Хальса

ваются на принадлежавшем до тех пор геометрии учении о пропорциях; но, во-первых, это обращение к геометрии делается раз навсегда, тогда как раньше к геометрии приходилось прибегать при каждом новом исследовании; во-вторых, учение о пропорциях легко освободить от геометрической формы. Когда Декарт в дальнейшем применяет математические формулы, то с самого начала становится совершенно ясно, что содержащиеся в них умножения и т. д. надо понимать в соответствии с данными общими определениями. Формулы при этом имеют смысл независимо от того, однородны они по отношению к содержащимся в них отрезкам или нет. В первом случае они не зависят от выбора единицы, в последнем они соответствуют, как отмечает сам Декарт, вполне определенной единице. Величины a^2, b^3 он, правда, называет, в согласии с обычной терминологией, квадратом и кубом; но он определенно отмечает, что их можно понимать и как отрезки. Геометрическое обозначение величин сохранилось, таким образом, и у него, но у него оно, как мы видим, применяется так, как теперь применяется понятие числа. Связь с геометрией, необходимая для применения алгебры к геометрическим задачам, поддерживается при помощи определенных указаний относительно построений, с помощью которых описанные алгебраические операции выполняются геометрически.

После установления указанных предпосылок (на стр. 3—4)[1] даются общие правила для аналитического решения задачи: предположим, что задача решена; дадим всем входящим в нее величинам, как неизвестным, так и известным, обозначения; не делая между ними различия, пользуемся данными задачи для того, чтобы выразить одну и ту же величину двумя различными способами, и таким образом получаем уравнение; образуем столько уравнений, сколько имеем неизвестных; если этого нельзя сделать, то задача является неопределенной, и часть величин можно выбрать тогда по произволу. После этого набрасывается ход дальнейшего алгебраического решения.

Прежде чем перейти к более подробному рассмотрению того, как Декарт применяет свои правила и, в частности, по какому поводу и в каком виде появляются у него координаты, остановимся на имевшихся в его распоряжении технических ресурсах, особенно на символике.

Символика ко времени Декарта была, как мы видели, настолько развита, что он смог, сделав одно единственное усовершенствование, пользоваться ею не только для наглядного обозначения алгебраических операций, но и для их выполнения. Упомянутое усовершенствование состояло во введении употребительного теперь обозначения степени. Вскоре после Декарта оно привело к рассмотрению степеней с любыми непрерывно изменяющимися показателями, что позволило, например, при объяснении логарифмов обходиться без рассмотрения связи между

[1] По французскому изданию 1886 г. (A. Hermann).

геометрической и арифметической прогрессиями. В труде самого Декарта это его нововведение сообщает всем формулам и выполняемым операциям такую простоту и наглядность, что за ними можно следить с тою же легкостью, как и за алгебраическими операциями в какой-нибудь современной книге. Символика Декарта отличается от теперешней, в сущности, только отсутствием показателей корней (кубичный корень, например, он обозначает через $\sqrt{C \ldots}$), иною формою знака равенства и, наконец, тем, что относительно букв, обозначающих у него безразлично рациональные и иррациональные величины, всегда предполагается, что они представляют собою положительные величины (стр. 104). Чтобы избежать отрицательных корней, он прибегает на стр. 5 к тому же видоизменению уравнения, как Виета; изображенные буквами известные величины он также рассматривает как положительные. Поэтому уравнение 4-й степени (без члена 3-й степени) с совершенно произвольными (действительными) коэфициентами он записывает на стр. 66 в виде:

$$+x^4 \ldots px^2 \ldots qx \ldots r \infty 0,$$

где точки обозначают + или —. Лишь Гудде в своем добавлении к „Геометрии" Декарта (1658), содержание которого мы будем разбирать ниже, обозначил отдельными буквами p, q, r коэфициенты вместе с их знаками и, таким образом, дал совершенно общую алгебраическую трактовку.

Мы видели выше, что и другие математики пользовались символикой, во многих отношениях близкой к декартовой; видели, что древние авторы выражали без всякой символики ход своих мыслей, для передачи которого мы должны были прибегнуть к этой символике; видели и увидим в дальнейшем, что Ферма преодолевает более значительные и более глубокие трудности, чем Декарт; видели, наконец, что Ферма создал аналитическую геометрию без помощи иных алгебраических средств, кроме тех, которые уже имелись к тому времени; все это может побудить нас недооценить те успехи, которые поставлены здесь во главу всей математической деятельности Декарта. Значение этих успехов становится, однако, понятным, если мы примем во внимание, как часто мы должны были для изложения идей более ранних авторов прибегать к пользованию алгебраической формой Декарта; без нее мы вряд ли смогли бы это сделать сколько-нибудь сжато и наглядно. Мы смогли воспользоваться этой алгебраической формой, с одной стороны, потому, что декартова трактовка алгебры благодаря своим преимуществам получила ныне широкое распространение, и знакомство с ней приобретается уже в школе. С другой стороны, она уже сама по себе в большой мере расчистила путь многому, что раньше могло быть изложено лишь весьма громоздким образом и было поэтому доступно лишь очень способным математикам.

В связи с этим мы должны обратить внимание на необходимость не забывать различия между идеями, развитие которых

мы излагали, пользуясь представленным у Декарта в своем завершенном виде языком алгебры, и между самим этим языком. То обстоятельство, что раньше те же мысли могли фиксироваться и без помощи этого языка, нисколько не уменьшает нашего удивления перед ним. Благодаря Декарту он получил полное развитие и полное признание, так что теперь преимуществами его может пользоваться всякий, кто только приобретет нужные навыки в его употреблении.

Навыки эти, однако необходимы, а сам Декарт в своей „Геометрии" не ставит себе непосредственно задачу развития этих навыков. Методы Декарта могут быть усвоены, в сущности говоря, только при изучении того, как он их применяет. Его пояснения являются скорее ориентирующими замечаниями, чем подробными пояснениями. Многих выкладок Декарт совсем не выполняет; он просто предлагает читателю самому проделать их. Декарт говорит, что понимание некоторых частей своей „Геометрии" он даже намеренно затруднил с целью показать тому, кто решил бы, что он и сам мог бы достичь тех же результатов, что не так-то просто можно их получить.

Если, несмотря на это, методы Декарта вошли в общее употребление, то произошло это, во-первых, потому, что его книга была достаточно ясной для ученых, которые затем содействовали широкому распространению этих методов; во-вторых, под наблюдением самого Декарта было написано „Введение" к его „Геометрии", которое, правда, не было издано, но все же стало достаточно широко известно, так как тотчас же по выходе в свет „Геометрии" (1637) было переслано Мерсенну. В этом „Введении" содержатся подробные правила буквенного исчисления, основанные на применении развитой Декартом символики; свобода в обращении с ними являлась необходимым условием возможности применять символику к выкладкам и вообще получать с помощью ее надежные математические выводы. Правила относительно составления уравнений также изложены здесь полнее, чем в „Геометрии". Полнее разъяснена здесь и декартова алгебраическая геометрия („аналитическая геометрия"). Алгебраические методы применены затем к некоторым тригонометрическим и геометрическим задачам, в том числе к рассматривавшейся впоследствии Ферма (стр. 186) задаче о нахождении шара, касающегося четырех других шаров.

То, что сообщает применению координат у Декарта совершенно иной характер по сравнению с применением их у древних или даже у Ферма — это, главным образом, новое арифметическое основание алгебры и значительное развитие техники алгебраических выкладок. Геометрические операции в гораздо более полной мере становятся объектом исчисления. Декарт, однако, не устанавливает в своей „Геометрии" общих правил для аналитической геометрии. Он показывает их, главным образом, на решении задач, и это делает особенно ясным превосходство новых методов над прежними. Но как ни велико это пре-

восходство, Декарт все же переоценивает его, когда на стр. 7—9 дает пренебрежительный и совершенно поверхностный отзыв о работах древних, на которые он сам опирается в стольких вопросах и которые содержат результаты, которые он сам стремился получить новыми методами. К таким результатам для него, как и для Ферма, в первую очередь принадлежало то положение, что место к трем и четырем прямым (стр. 194) представляет собою коническое сечение. Декарт, однако, тотчас же применил свою аналитическую геометрию и к нахождению упоминаемых у Паппа мест более чем к 4 прямым („Древние и средние века", стр. 164). Это — геометрические места точек, обладающих тем свойством, что произведение их расстояний от n прямых находится в постоянном отношении к произведению их расстояний от n или $n-1$ других прямых. Декарт находит, что такая кривая выражается уравнением n-й степени; он принимает при этом на стр. 10—13 одну из прямых за ось абсцисс, а расстояния от нее за ординаты. Так как расстояния берутся под любым углом к прямым, то координаты в общем являются косоугольными. Для расстояний от остальных прямых можно получить с помощью тригонометрии выражения 1-й степени. Декарт не только устанавливает, что уравнение кривой имеет n-ю степень относительно двух переменных x и y, но на стр. 13—14 указывает также, что для места к $2n-1$ прямой (если y обозначает расстояние от одной из n первых прямых) степень уравнения относительно x равна лишь $n-1$; поэтому, например, построение точек „места к 5 прямым" является „плоскостной задачей" (т. е. задачей, разрешимой с помощью циркуля и линейки) „Древние и средние века", стр. 145) [1].

Вряд ли можно поставить Декарту в упрек, что он не заметил, что построение точек „места к 6 прямым" также является задачей „плоскостной", так как эти точки можно получать на прямых, проводимых из точки пересечения двух данных прямых, из которых одна принадлежит к первой, а другая ко второй группе [2].

---

[1] Примем за ось x одну из трех прямых первой группы, а уравнения двух других прямых этой группы представим в виде: $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$. Произведение расстояний точки (x, y) до этих трех прямых пропорционально произведению $y(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$; коэфициент пропорциональности зависит от постоянных a, b, c и от величины тех углов, под которыми берутся расстояния. Произведение расстояний до двух прямых второй группы пропорционально произведению $(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$, множители которого представляют левые части уравнений этих прямых. Искомое геометрическое место имеет уравнение $y(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$, где k — постоянная, зависящая от величины данного отношения, углов, под которыми берутся расстояния и постоянных a, b, c, l, m, n. Очевидно, это уравнение 3-й степени. По отношению к x оно квадратное.

Прим. ред.

[2] Пользуясь теми же обозначениями, что и в предыдущей сноске, и принимая за ось y одну из трех прямых второй группы, мы напишем уравнение „места к 6 прямым" в виде:

$$y(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=kx(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2).$$

Все вышеизложенное составляет содержание первой из трех книг „Геометрии" Декарта. Вторая посвящена более подробному рассмотрению кривых, частными видами которых являются найденные геометрические места. Отступая несколько от порядка изложения, принятого Декартом, мы передадим вкратце содержащееся на стр. 21—26 доказательство того, что уравнение 2-й степени представляет собою коническое сечение и что, следовательно, места к 3 или 4 прямым, будучи выражаемы уравнениями 2-й степени, являются коническими сечениями. Решая уравнение относительно y, Декарт получает выражение вида:

$$y = ax + b + \sqrt{cx^2 + dx + e}.$$

Здесь $y - ax - b$ представляет умноженное на постоянную величину расстояние от прямой $y = ax + b$, а величины x пропорциональны отрезкам, которые ординаты отсекают на этой линии (если за начало отсчета принять точку пересечения этой прямой с осью y). Поэтому в новой системе координат, в которой за ось абсцисс взята прямая $y = ax + b$, а направление ординат оставлено прежним, кривая выразится уравнением вида:

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C;$$

последнее же легко сводится к виду, представляющему по Аполлонию коническое сечение, отнесенное к сопряженным диаметрам. Изложение Декарта является более пространным, с одной стороны, потому, что он проделывает преобразования, соответствующие переносу начала в центр, с другой — потому, что он рассматривает каждый из трех видов конических сечений в отдельности и определяет их параметры, соответствующие сопряженным диаметрам. Декарт добавляет далее (стр. 26—28) к проделанному им анализу синтез, доказывая, что кривые, представляемые уравнениями, выводимыми для каждого из трех видов конических сечений, действительно обладают требуемыми свойствами. Это доказательство выполняется с помощью тех же преобразований, как и анализ, путем которого уравнения кривых были выведены из этих свойств; только теперь, конечно, преобразования ведутся в противоположном направлении. Как мы видим, Декарт проводит свой анализ не дальше, чем Ферма; подобно последнему, он, опираясь фактически на результаты Аполлония, основывает свое рассуждение на том, что кониче-

---

Его можно переписать так:

$$\frac{y}{x}\left[\left(a_1 + b_1\frac{y}{x}\right)x + c_1\right]\left[\left(a_2 + b_2\frac{y}{x}\right)x + c_2\right] =$$
$$= k\left[\left(l_1 + m_1\frac{y}{x}\right)x + n_1\right]\left[\left(l_2 + m_2\frac{y}{x}\right)x + n_2\right].$$

Проводя через начало координат прямую $\frac{y}{x} = u$, мы получаем для определения абсциссы x точки ее пересечения с искомым „местом" квадратное уравнение.

Прим. ред.

ские сечения могут быть отнесены к *произвольной* паре сопряженных диаметров.

Декарт совершенно правильно придает большое значение общему обзору всех алгебраических или, как он называет их, геометрических кривых и связанной с этим классификации их по степени уравнения, служащего для их изображения. Честь введения этой классификации, благодаря которой можно сделать предметом исследования не отдельные, а все алгебраические кривые, принадлежит Декарту, хотя никоим образом нельзя одобрить того, что на стр. 18 и 20 он объединяет кривые, представляемые уравнениями $(2n-1)$-й и $2n$-й степени, в один n-й „род" (genre). Склонило его к этому неправильное предположение, что, подобно тому как уравнение 4-й степени с одной неизвестной (в качестве которой Декарт рассматривает ординату) можно свести к уравнению 3-й степени, так же можно свести уравнение 6-й степени к уравнению 5-й степени и т. д. Ошибкой является также предположение Декарта (стр. 21), что всякую кривую его n-го „рода" можно получить как „место к $4n$ прямым". Если бы это было так, то мы имели бы уже у Паппа определение, охватывающее все алгебраические кривые.

Так как Декарт не в силах построить общую теорию кривых второго и высших родов (третьего и высшего порядков), то он отыскивает, с одной стороны, такие кривые, построение которых можно более или менее легко выполнить механически, с другой — такие, которые можно рассматривать как простейшие образцы кривых данного рода. Обоим этим требованиям удовлетворяет кривая

$$y^3-2ay^2-a^2y+2a^3=axy.$$

Она, с одной стороны, как Декарт показывает на стр. 30, является местом к 5 прямым, из которых 4 параллельны и эквидистантны ($x=0$, $y=-a$, $y=0$, $y=a$, $y=2a$), а с другой стороны, она принадлежит к классу кривых, которые можно построить помощью общего приема, излагаемого Декартом на стр. 18 следующим образом.

Пусть прямая вращается вокруг неподвижной точки $(0, b)$. В неизменной связи с точкою пересечения этой прямой и оси абсцисс передвигается параллельно оси абсцисс некоторая кривая [$f(x', y)=0$, где будем считать абсциссу x' от точки пересечения вращающейся прямой с осью абсцисс]. Пусть искомой кривой будет геометрическое место точек пересечения вращающейся прямой и движущейся кривой. Уравнение ее найдем, вставляя в уравнение движущейся кривой значение $x'=\frac{xy}{b-y}$. Вышенаписанное уравнение получается в том случае, когда $b=2a$ и движущеюся кривою является парабола $y^2=a(a-x')$. Обобщение построенной таким образом кривой Декарт получает, с одной стороны, применяя косоугольные координаты, с другой — давая неподвижным прямым различные расстояния друг от друга. Способ построения взят, очевидно,

из построения конхоиды, для которой движущейся кривою является окружность с центром в точке пересечения вращающейся прямой и оси абсцисс. Если движущуюся кривую заменить прямой, то получается гипербола, уравнение которой дается Декартом. На стр. 20 Декарт делает ошибку, которая, ввиду того, что образование уравнения кривой указано им правильно, могла явиться лишь результатом недостаточно тщательной проверки. Он говорит, что „род" полученной кривой должен быть вообще на единицу выше, чем „род" движущейся. Ферма, исправивший в небольшом сочинении ошибки „Геометрии" Декарта — как действительные, так и приписанные ему по недоразумению, возникшему из трудно.ти понимания слишком сжатого языка Декарта, — показывает на примере, что утверждение Декарта является неверным; общего результата он, однако, не дает.

Одной из важнейших частей содержания 2-й книги является правило для определения нормалей, а следовательно и касательных к алгебраическим кривым. Подробнее мы будем говорить об этом определении и о связанном с ним у Декарта применении метода неопределенных коэфициентов дальше, в связи с другими исследованиями, касающимися бесконечно малых. Декарт применяет свой метод не только к коническим сечениям и к только что рассмотренной кривой, но и к кривым, получившим название декартовых овалов. Определение касательных к ним представляло для него, как мы увидим, большой интерес с точки зрения оптики.

В конце 2-й книги (стр. 52) Декарт касается еще распространения своей аналитической геометрии на пространство, в частности, изображений пространственной кривой. Он получает его, относя проекции ее на две взаимно перпендикулярные плоскости к координатам в этих плоскостях При этом линия пересечения этих плоскостей служит общей осью двух систем координат. Наметив, таким образом путь к построению пространственной системы координат, Декарт совершает вслед за тем ошибку. Он утверждает, что нормали к двум плоским кривым, проведенные через проекции точки кривой, являются проекциями нормали к пространственной кривой.

Как и Ферма, Декарт видит в геометрических местах, для определения которых он нашел новые пути, в сущности, вспомогательное средство для графического решения уравнений. Это и составляет предмет 3-й книги. В качестве подготовительного материала Декарт должен предпослать ряд общих предложений из теории уравнений. Мы встречаем здесь не оторые преобразования, которые были знакомы и Виета; но уже на них мы видим, как много дело в смысле наглядности декартово усовершенствование символики. Новым является предложение, известное и сейчас под именем „правила знаков Декарта". Декарт утверждает, что алгебраическое уравнение имеет столько положительных корней, сколько мы имеем перемен знака в ряду его

коэфициентов, и столько отрицательных корней, сколько в этом ряду повторений знака. Доказательства Декарт не дает. Вероятно, Декарт получил правило, исходя из того, что каждому положительному или отрицательному корню $\pm a$ соответствует множитель $x \mp a$ левой части уравнения. Декарт мог заметить, что умножение многочлена на $x-a$ вводит в него новую перемену знака. Декарт распространяет свое правило и на случай мнимых корней, говоря также о числе положительных и отрицательных мнимых корней и определяя эти числа так, чтобы правило охватывало и действительные и мнимые корни.

Из остального материала, содержащегося в 3-й книге, наибольший интерес представляет, во-первых, новое решение уравнений 4-й степени и, во-вторых, исчерпывающее решение вопроса, в каких случаях задача, сводящаяся к уравнению 3-й и 4-й степени, разрешима с помощью линейки и циркуля или, другими словами, в каких случаях уравнение 3-й или 4-й степени разрешимо в квадратных радикалах.

Пусть уравнение 4-й степени приведено к виду:

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

где мы для удобства предполагаем, что коэфициенты могут быть положительны или отрицательны: Декарт указывает, что левая часть может быть написана в виде произведения двух сомножителей 2-й степени

$$\left(x^2-yx+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}\right)\left(x^2+yx+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}\right),$$

где y определяется из уравнения

$$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0;$$

это последнее уравнение есть уравнение 3-й степени относительно y^2. Декарт дает этот результат лишь в готовом синтетическом виде; ведущий к нему анализ мы находим в одобренном Декартом комментарии Скоутена. Левая часть уравнения 4-й степени отождествляется здесь с произведением

$$(x^2-yx+z)(x^2+yx+v);$$

уравнения, необходимые для определения y, z и v, получаются путем приравнивания коэфициентов при одинаковых степенях x. Мы видим здесь, таким образом, применение только что упомянутого метода неопределенных коэфициентов.

Что касается до разрешимости с помощью линейки и циркуля (или в квадратных радикалах), то Декарт на стр 65 указывает, что уравнение 3-й степени разрешимо только тогда, когда это уравнение приводимо, т. е. когда его можно разложить на уравнение 1-й степени и уравнение 2-й степени. Если уравнение преобразовано таким образом, что коэфициенты его являются целыми числами, и притом первый из них равен единице, то оно должно в указанном случае иметь целый корень, который может

GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; poſtea autem
Unà cum NOTIS
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Bleſenſi Conſiliarii Regii, Gallicè conſcriptis in
Latinam linguam verſa, & Commentariis illuſtrata,

Operâ atque ſtudio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheſeos Profeſſoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis inſtructa, multisque egregiis acceſſionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina verſa exhibet.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIↃ IↃC LIX.

Титульный лист первого (скоутеновского) латинского издания «Геометрии» Декарта

находиться только среди делителей свободного члена. На стр. 67 Декарт утверждает, что для того, чтобы было разрешимо с помощью линейки и циркуля (или в квадратных радикалах) уравнение 4-й степени, должно разрешаться в квадратных радикалах вышеприведенное вспомогательное уравнение, являющееся уравнением 3-й степени относительно y^2. В качестве задачи, которая может быть решена таким образом, Декарт рассматривает на стр. 70 одну из известных античных задач на „вдвижение" [1], а именно, построение прямой, которая проходит через данную точку биссектрисы прямого угла и на которой сторонами угла отсекается отрезок данной длины. Задача эта, как мы видели, привлекала внимание и других математиков нового времени. Жирар (стр. 112) нашел ее алгебраическое решение, Гетальди решил ее геометрически, а в письмах Гюйгенса имеется третье изящное решение. В алгебраической трактовке Декарта задача получает особое значение, как пример применения его общего метода к вопросу о разрешимости задачи с помощью линейки и циркуля За неизвестное Декарт принимает отрезок одной из сторон угла, ограниченный проекцией данной точки и точкой пересечения этой стороны с искомой прямой Уравнение получается 4-й степени, причем соответствующее вспомогательное уравнение 3-й степени оказывается разложимым. Декарт замечает, что то же самое имело бы место и в том случае, если бы за неизвестное была принята другая величина. Таким образом способ его покоится не только на удачном выборе приема, ведущего к цели именно в этой задаче. Решение, однако, может быть упрощено целесообразным выбором неизвестного, как это показывает Ньютон при рассмотрении той же задачи во „Всеобщей арифметике". Действительно, если неизвестное определяет положение середины вдвинутого отрезка, то уравнение получается всего лишь 2-й степени. Ньютон пользуется этой задачей как примером на следующее правило: для того чтобы получить уравнение возможно более низкой степени, надо выбрать за неизвестное величину, которая не может быть с тем же правом заменена другою.

В XIX в. было вполне строго доказано, что решение уравнений 3-й и 4-й степени действительно невыполнимо в одних квадратных радикалах (или с помощью линейки и циркуля), за исключением случаев, указанных Декартом. Декарт, обычно предлагающий своему читателю самому выполнять в виде упражнения доказательства, представляющие прямое применение его методов, видит, что в этом пункте речь идет о вопросе принципиального значения, дать ответ на который должен он сам. Рассуждения его, содержащиеся на стр. 79, свидетельствуют о проницательном понимании того, что бо́льшую роль здесь должно играть число неотделяемых корней, но доказательствами их назвать нельзя.

---

[1] Термин „Einschiebung" можно перевести также словом „вставка", как это, например, сделано в переводе „Истории математики в древности и в средние века".

Прим. ред.

В задачах о двух средних пропорциональных и о трисекции угла, к которым сводится решение уравнений 3-й и 4-й степени, нужно определить — говорит Декарт — *две* средние величины или *две* средние точки: этого нельзя сделать при помощи окружности, кривизна которой повсюду одинакова, но можно при помощи конических сечений, кривизна которых „зависит от двух различных вещей".

Уравнения 3-й и 4-й степени Декарт решает на стр. 72 с помощью параболы и окружности, например уравнение

$$z^4 = pz^2 + qz + r$$

с помощью параболы

$$z^2 = x$$

и окружности

$$\left(z - \frac{1}{2}q\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p\right)^2 + r.$$

Решение кубичного уравнения получается отсюда, если положить $r = 0$.

Для решения уравнений 5-й и 6-й степени Декарт пользуется на стр. 80 пересечением окружности с кривою, которая образуется изложенным выше способом при помощи вращающейся прямой и движущейся параллельно самой себе параболы. Уравнение

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$$

решается с помощью кривой

$$nxy - y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{ty}{2\sqrt{u}} - \sqrt{u} = 0,$$

об образовании которой даются подробные указания, и окружности

$$x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{m}{n^2}y = \frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2},$$

где

$$n = \sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}} + q - \frac{1}{4}p^2}, \quad m = \frac{r}{2} + \sqrt{u} + \frac{pt}{4\sqrt{u}}.$$

Хотя эти приемы решения не могли иметь большого значения для развития математики, но уже самый факт того, что результаты, полученные древними, были вновь получены и обобщены при помощи единого метода, — этот факт дал неоспоримое доказательство превосходства аналитической геометрии. Декарт делает еще некоторые общие и не вполне ясные замечания, касающиеся решения уравнений высших степеней тем же методом. Ферма понял его замечания как определенные указания на „род" требующихся для этого кривых; в таком смысле эти указания были бы неправильными. Ферма, разделяющий кривые просто по степени их уравнений, показывает, что уравнение $2n$-й степени

может быть решено с помощью двух кривых n-й степени, причем во многих частных случаях можно довольствоваться кривыми низших степеней. В частности, он показывает, что такое упрощение имеет место в случае кривых, которые должны служить для определения некоторого количества средних пропорциональных, т. е. для решения двучленных уравнений.

13. Анализ конечной величины после Декарта.

Благодаря „Геометрии" Декарта алгебра и основанный на ней анализ конечной величины достигли той степени развития, до которой мы должны были довести наше изложение. В этой книге, однако, захвачен несколько более продолжительный период, так как исследования, касающиеся бесконечно малых, лишь к концу XVII в достигли вполне соответствующего поворотного пункта.

Мы имеем в виду переход от отдельных исследований к исследованиям по общим методам — переход, который во многих отношениях можно сравнить с переходом индустрии от ремесленного к фабричному производству. Сделанные ручным способом предметы, заслужившие того, чтобы быть сохраненными на позднейшее время, и бывшие для этого достаточно прочными, являются произведениями отдельных одаренных личностей, умевших придать каждой отдельной своей работе отпечаток своей практической и художественной индивидуальности. Каждый предмет представляет собою некоторую самостоятельную ценность, так как мастер в течение долгого времени был занят одною единственною работою, не отвлекаясь ничем другим, так что он мог сосредоточиться на изыскании наилучших средств для выполнения этой работы, то он часто достигал такого совершенства, что позднейшие попытки сравняться с ним оставались тщетными. Когда мастер брался затем за новую задачу, то он пользовался при этом всем тем опытом, который дала ему предшествующая. Таким образом он постепенно овладевал известными методами работы; он посвящал в них своих помощников, и методы эти получали все более широкое и более разнообразное применение. Ремесленник отнюдь не стремился при этом к такому развитию методов, при котором даже совершенно неподготовленный человек мог бы выполнить некоторую часть работы и при котором вся работа была бы разделена между многими одновременно работающими людьми. Напротив, ремесленник боялся конкуренции, отсюда вытекающей

Но именно благодаря такому развитию методов крупная промышленность смогла воспользоваться большим количеством рабочих меньшей квалификации и занять одних из них лишь в одной, других лишь в другой части той или иной работы. Благодаря этому разделению труда она смогла наладить массовое производство однородных и весьма целесообразных, но часто не представляющих особого интереса предметов. Ей удалось использовать одни и те же рабочие руки для изготовления самых

разнообразных предметов и создать новые орудия производства, при помощи которых можно было преодолеть трудности, казавшиеся ранее неразрешимыми. В целях сравнения, которое мы имеем здесь в виду, упомянем еще о том, что промышленник, желающий в настоящее время создать в той или иной области что-нибудь особенно выдающееся по качеству или стремящийся руководствоваться в работе идеями, отличными от общепринятых теперь, не может игнорировать сделанного теми мастерами-одиночками, которые в свое время работали в той же области.

Когда математик наших дней слышит о том, что уже в древности или в рассмотренный нами период нового времени было известно какое-нибудь предложение, которое теперь смогло бы появиться лишь как результат более новых методов и к которому, быть может, вряд ли пришел бы даже человек, знакомый с этими методами, то для него является естественным, соответственно тому способу, каким он сам привык получать новые результаты, подумать сначала, что то время обладало совершенно иными методами. Если он углубится затем в исследование, приведшее к данному результату, то ему легче всего будет понять ход мыслей автора, сопоставляя его с обычными для него самого способами рассуждения, т. е. в большинстве случаев переводя его на современный алгебраический язык и заменяя логические построения буквенным исчислением. Он сможет таким образом добраться до основной идеи, и нередко оказывается, что эта идея совпадает с той, которую он сам положил бы в основу рассуждений, если бы он работал собственными своими методами. Это обстоятельство является простым следствием того, что логические зависимости обладают чисто объективною значимостью, независимой от различных форм, в каких они возникают в нашем сознании. Он заметит, однако, что к этой основной идее, которую он сам может выразить в нескольких строках, старый автор идет по извилистому окольному пути. Эти окольные пути в большинстве случаев состоят в том, что старым авторам приходится в каждом отдельном случае развивать все то, чему современный математик научился раз навсегда, чтобы применять это во всех подобных случаях. Но если бы требовалось, как это и имело место в прежнее время, решить определенную отдельную задачу, не укладывающуюся в рамки существующих методов, то, наоборот, современный математик, практикующийся в общих методах, находящих в отдельном случае лишь весьма частное применение, должен был бы совершить значительно больший окольный путь, чем древний автор, который рассматривает только то, что имеет непосредственное значение для данного вопроса. Окольные же пути, проделанные древним автором, идут обыкновенно вокруг самого рассматриваемого вопроса и способствуют такому глубокому пониманию его, которое совершенно ускользает от человека, прямо прибегающего к методам, одинаково пригодным как к данному вопросу, так и к другим. Понятно поэтому, что

в древнее время часто открывали такие стороны рассматриваемого предмета, которые, правда, легко доказываются новейшими методами, но которые теперь просто вряд ли были бы замечены. Неудивительно также, что новые результаты были найдены и доказаны в большинстве случаев теми же по существу путями, к которым приводят и современные методы, как бы ни была при этом различна форма изложения. Понятно, наконец, что крупные успехи прежнего времени объясняются также и тем, что они найдены выдающимися учеными, которые, несомненно, и в настоящее время нашли бы средства разрешать вопросы, для ответа на которые еще и теперь нет готовых методов.

Такие люди приобретают опыт в деле выбора именно того пути, который ведет к успешному решению, и могут переносить метод, использованный уже прежде, из одной задачи в другую и даже из одной области в другую, совершенно отличную от первой, например из геометрии в теорию чисел. Они имеют в своем распоряжении также опыт, накопленный при рассмотрении других вопросов их предшественниками. Методы, частное применение которых мы, владея ими, можем усмотреть уже у математиков глубокой древности, все яснее осознаются учеными и, наконец, получают свое самостоятельное оформление; метод усваивается раз навсегда, и при достаточном упражнении он дает такие механические навыки, которые позволяют непосредственно решать большое количество задач, требовавших раньше каждая особого подхода.

К моменту, до которого мы дошли теперь в нашем обзоре, в таком положении оказалось буквенное исчисление, применяемое почти так же механически, как и числовые выкладки, и со времени Декарта охватывающее все операции математики конечных величин. Операции геометрической алгебры были превращены во „Введении" к „Геометрии" Декарта в задачи на вычисление, и то же произошло со связывавшимся ранее с геометрической алгеброй применением координат. Последнее получило благодаря этому более систематический характер, и одновременно с геометрией вся математика, имевшая до тех пор в геометрии свою прочную основу, оказалась тесно связанной с исчислением, основанным на символике. Математика бесконечно малых величин достигла такого же состояния в конце столетия благодаря созданию *диференциального и интегрального исчислений*, после предшествующего развития, которое, как читатель увидит в 3-й части нашей книги, дает много поводов для сравнения с высококачественным кустарным производством. В еще более раннее время перелом подобного же рода совершился тогда, когда благодаря введению индусской нумерации производство числовых выкладок получило такое развитие, что для каждого стало возможным выполнять их механически. Перелом этот, как известно, в разных местах произошел в очень разное время.

С появлением общего метода, который можно применять механически, вся математическая работа или, по крайней мере,

часть ее, охватываемая этим методом, вступает в новую стадию. Прежде всего, благодаря этому возрастает общекультурное значение математики. Отныне она становится вполне доступной для широкого круга людей, нуждающихся в ее помощи, но не обладающих особыми математическими дарованиями. Для развития самой математики это большее распространение ее имеет то значение, что расширенный круг лиц, занимающихся ею, необходимо включает в себя ряд таких, математические дарования которых при иных условиях никогда не были бы выявлены; сверх того, растущее число применений все время выдвигает перед самой математикой новые проблемы существенного значения. Далее, многое во внутреннем развитии математики происходит почти само собою: действительно, общий метод дает возможность совершенствовать технический аппарат данной дисциплины и находить новые результаты, которые, в виде легко остающихся в памяти формул, дают исходные пункты для новых механических операций; благодаря существованию общего метода получают разрешение и те вопросы, которые сами собой возникают по мере продвижения начатых исследований. Но как ни значительны могут быть результаты таких исследований, они, конечно, не представляют такого интереса, как те, которые требуют совершенно новых соображений и не могут быть проведены при помощи готового метода. Готовые методы могут, однако, оказать самую разнообразную помощь и в этих новых исследованиях, даже не будучи непосредственно предназначены для них. Так, мы увидим в следующей главе, как сильно способствовали только что созданная алгебра, связанное с нею буквенное исчисление и аналитическая геометрия развитию методов математики бесконечного. С другой стороны, различные успехи самой алгебры, как, например, учение о равных корнях и о разделении корней уравнения, тесно связаны с инфинитезимальными исследованиями, в силу чего они и нашли место лишь в следующей части нашей книги.

Это обстоятельство, а также и то, что вопросы анализа бесконечно малых представляют сейчас для математиков наибольший интерес, дает нам право ограничиться здесь лишь отдельными замечаниями, относящимися к истории анализа конечных величин во второй половине XVII в.

Прежде всего скажем несколько слов по поводу принципиального вопроса об основании алгебры. Как было упомянуто в предыдущей главе, Декарт упрочил значение алгебры тем, что операции, изображаемые с помощью символики, являются у него общими операциями, находившими до тех пор свое точное выражение в античном учении о пропорциях. Так как это последнее было тесно связано с геометрическим изображением величин, то Декартом был сделан, таким образом, заем у геометрии. По существу, однако, принципы учения о пропорциях, содержащиеся в 5-й книге Евклида, не являются геометрическими, так что нетрудно было бы расплатиться по этому займу. Об этом, однако,

никто не думал. Общее внимание было занято задачей распространения господства алгебры на все области математики, что стало возможно после Декарта и для чего алгебра получала все лучшие и лучшие технические средства; о логическом же обосновании этого господства вплоть до XIX в. заботились очень мало.

Такое более практическое направление выступает особенно сильно в сочинении Валлиса с характерным заглавием: „Всеобщая математика или полный курс арифметики" („Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum"). Алгебра является здесь простым и выполняемым без доказательств распространением вычислительных операций, применявшихся раньше к целым числам, на всевозможные величины. Валлис не скрывает этой чисто практической тенденции, которую он проводит как здесь, так и в области исчисления бесконечно малых. Он подчеркивает различие между арифметикой (и геометрией) „спекулятивной" (т. е. теоретической) и арифметикой (и геометрией) практической [arithmetica (et geometria) speculativa и arithmetica (et geometria) practica]. О первой он отзывается почтительно, но холодно: более важным для него является распропагандировать пользу и преимущества „практической арифметики" и „практической геометрии"; первую он называет наукой о том, как хорошо вычислять (scientia bene numerandi), вторую — наукой о том, как хорошо измерять (scientia bene mensurandi).

Что касается до основанной на арифметике алгебры, то ее преимущества состоят в большой легкости, с которою выполняются все операции. Валлис демонстрирует это особенно ясно, разбирая содержание 2-й книги Евклида, образующей основу геометрической алгебры, и 5-й книги, дающей обоснование связанному с геометрией учению о пропорциях. Преимущества арифметического построения алгебры достаются ему, конечно, за недорогую цену, так как он совершенно не заботится о логической строгости, заставлявшей древних изображать величины, могущие принимать любые значения, геометрически, как во 2-й книге Евклида, и развивать такое учение о пропорциях, какое дано в 5-й книге. Для него отношение совершенно тождественно с частным от деления двух однородных величин; он оперирует с ним как с дробью.

В своей большой алгебре, появившейся в 1685 г. на английском языке и в 1693 г. на латинском, Валлис уделяет несколько больше внимания обоснованию евклидова учения о пропорциях, но и здесь он стоит на той же практически-арифметической точке зрения, как в упомянутом выше сочинении. Книга эта чрезвычайно содержательна и дает сведения обо всем, что появилось к тому времени в области алгебры. Однако имеющиеся в ней исторические указания относительно того, кому принадлежат те или иные результаты, лишены объективности — Валлис проявляет совершенно недопустимое пристрастие в отношении к своим соотечественникам.

Практическая арифметика, так же как основанная на ней алгебра, смогла благодаря своей легкости войти в школьное преподавание, в котором она и до настоящего времени занимает свое естественное место; наряду с этим мы наблюдаем странное явление, что одновременно с этим сохраняет свои унаследованные от греков права „спекулятивная геометрия". Особенно ясно проявляется это в том, что при доказательствах пропорциональности геометрических фигур всякий раз особо рассматривается случай несоизмеримости, и к нему применяется метод исчерпывания, между тем как в арифметике учение о пропорциях строится исключительно на операциях с соизмеримыми числами.

Принимаемая в первом случае мера предосторожности оказывается, однако, совершенно напрасной, так как в конце концов для преобразований отношений между геометрическими величинами применяются предложения, доказанные *арифметически*. Особенно ясна станет здесь сила исторической традиции, если мы вспомним, что такое взаимоотношение арифметического и геометрического доказательств сохраняется в элементарном преподавании в то время, как в научной области арифметическое обоснование анализа уже давно достигло такого развития, что анализ во многих отношениях обладает строгостью, гораздо большей, чем геометрия. Что касается до отношений и пропорций, то относительно них и вообще должно было бы возникнуть сомнение, не должна ли эта форма сопоставления величин полностью уступить место алгебраическим операциям, и притом не только в элементарной области, где они представляют не что иное, как результаты истолкованных арифметически операций, но и в научной, где современное понятие числа охватывает все то, чего хотели достичь древние путем применения пропорций.

В одной важной области, в тригонометрии, указанная реформа была выполнена уже Валлисом; до него все тригонометрические формулы изображались в виде пропорций, при этом преобразования выполнялись не при помощи обычного исчисления, а по особым правилам, установленным специально для пропорций. Соотечественник Валлиса Вильям Аутрид (William Oughtred) применял уже в своей геометрии более последовательно, чем это имело место раньше, сокращенные обозначения для тригонометрических величин, как, например, s arc для синуса и т. д., а также ввел, вместо прежних многословных указаний, что величины соответствуют дополнительному углу, такие же краткие обозначения (например, s co arc для косинуса и т. д.). Ему же принадлежит употреблявшийся долгое время после него знак : : для обозначения равенства двух отношений, составляющих пропорцию. Так как он не применял здесь обычного знака равенства, то он до некоторой степени удалялся от указанной реформы. Валлис не только применил более простые обозначения для шести тригонометрических величин (S, Σ, T, τ, s, σ), но и обращался с содержащими их пропорциями как с равенствами,

и оперировал с этими величинами, как и с другими величинами, выраженными символически.

Хотя Валлис интересовался практической геометрией, повидимому, больше, чем „спекулятивной", но он внес кое-что и в последнюю. Он занимался даже постулатами Евклида, особенно 5-м (или так называемой 11-й аксиомой). Этим вопросам посвящены несколько его лекций об Евклиде, читанных им в Оксфордском университете. Относительно 5-го постулата он сперва сообщает некоторые соображения, высказанные Насър-Эддином (стр. 114); затем говорит, что вместо этого постулата можно было бы постулировать существование подобных треугольников, выставив следующее положение: имея любой треугольник, можно построить подобный ему треугольник в любом масштабе. В действительности, требование это значительно шире, чем необходимо. Саккери (Saccheri) в своем вышедшем в 1733 г. сочинении показал, что достаточно постулировать существование одной единственной пары треугольников, которые, не будучи конгруэнтны, имеют равные углы. Валлис определенно отмечает, что он вполне понимает стремление Евклида возможно уменьшить количество недоказанных положений. Сам он сообразно своему практическому направлению предпочитает, однако, постулировать все то, чего никто не станет оспаривать; он находит по существу нелепым, что Евклид, вместо того, чтобы просто постулировать, что сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, приходит к доказательству этого при помощи ряда других предложений.

Как мы видели, в алгебре главное внимание обращали вначале на непосредственное применение ее богатых технических средств, не зависящих от геометрических соображений; никого не смущало то обстоятельство, что логическое обоснование ее было заимствовано Декартом из геометрического учения о пропорциях, и никто не заботился о том, чтобы заменить это обоснование арифметическим; так же обстояло дело, как мы будем еще говорить об этом, в XVIII в. с исчислением бесконечно малых. Здесь мы хотим упомянуть, что и в области аналитической геометрии вначале больше думали о применениях ее к доказательству и отыскиванию отдельных предложений, нежели о том, чтобы обеспечить самому методу более самостоятельное положение по отношению к геометрии, чем то, которое мы находим еще у Ферма и Декарта в их исследованиях кривых, выраженных уравнениями 2-й степени. Мы увидим, как полезна оказалась аналитическая геометрия для развития исчисления бесконечно малых. Мы имеем здесь в виду не самое употребление координат, которые в этой области, где, например, интегралы представлялись как площади, применялись задолго до зарождения настоящей аналитической геометрии; важно знать то, что благодаря применению в связи с координатами современной алгебры (вместо прежней геометрической) удалось достигнуть больших практических упрощений. Благодаря этой реформе

алгебры стало также возможным, не прибегая к систематическому построению теории конических сечений, доказывать отдельные предложения о конических сечениях, в частности те, которые содержались в первых двух книгах Аполлония. Это было тем легче, что для этого не требовалось никаких других координат, кроме имеющихся уже у самого Аполлония; таким образом можно было непосредственно воспользоваться практически преимуществами новой алгебры, которые сказались с особенной силой тогда, когда отпала необходимость углубляться в геометрические формы старой алгебры.

Примеры такого применения алгебры в связи с употреблением координат мы находим у Валлиса в сочинении „Трактат по теории конических сечений, изложенной новым методом" („Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis", 1655), в котором он доказывает, главным образом, те предложения о конических сечениях, которые нужны ему в его „Арифметике бесконечно малых". В геометрическом отношении это сочинение столь же тесно примыкает к Аполлонию, как и к Декарту. Часть доказанных здесь предложений устанавливает, что коническое сечение, заданное первоначально соотношениями, отнесенными к одной паре сопряженных диаметров, имеет бесконечное количество пар сопряженных диаметров, к которым оно может быть отнесено с помощью тех же соотношений. Однако доказательства того, что среди сопряженных диаметров всегда имеется пара взаимно перпендикулярных, у Валлиса нет. Другая часть доказанных предложений имеет связанное с этой трактовкой определение касательных. Все эти предложения имеются уже в 1-й книге Аполлония, мало того — Валлис следует Аполлонию и в доказательствах, так же как у последнего основанных на рассмотрении подобных треугольников. Как и Аполлоний, Валлис доказывает правильность выполняемых построений касательных, основываясь на том, что ординаты построенной прямой по обе стороны точки касания больше, чем соответствующие ординаты кривой (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 142). Различие в трактовке состоит в том, что Валлис вводит для обозначения различных отрезков и, прежде всего, координат отдельные буквы, и благодаря этому произвольные преобразования выражаются помощью алгебраических операций. Валлис демонстрирует достигаемую таким путем большую легкость и наглядность трактовки, применяя тот же прием к другой кривой — к кубической параболе $a^2y = x^3$. Он доказывает, что эта кривая, в противоположность параболе 2-го порядка, не имеет других диаметров, к которым она могла бы быть отнесена помощью уравнения того же вида; кроме того, он решает для этой кривой задачу о нахождении касательных. На чертеже его сказывается свойственный его времени недостаток внимания к знакам: части кривой по обе стороны от вершины изображены так, как у обыкновенной параболы, без учета того обстоятельства, что y в уравнении меняет знак вместе с x. Отметим еще, что в рассматри-

ваемом сочинении впервые появляется употребительный теперь знак бесконечности (∞).

Сочинение Валлиса имело значение в том отношении, что оно показало, как легко с помощью получавшего все большее распространение буквенного исчисления сделать доступными даже вопросы, разбиравшиеся у трудного для понимания Аполлония. С точки зрения систематичности изложения гораздо большее значение имели „Элементы теории кривых линий" (Elementa linearum curvarum) Жана де-Витт. Сочинение это было помещено в качестве одного из дополнений к „Геометрии" Декарта в латинском скоутеновском издании ее (1659). Оно имело целью усовершенствовать исследование кривых 2-го порядка, содержащееся в „Геометрии" Декарта и ведущее к тому результату, что эти кривые представляют собою конические сечения. Вспомним (стр. 205), что этот результат получен у Декарта, так же как у Ферма, тем путем, что кривая относится к такой (вообще говоря, косоугольной) системе координат, в которой квадрат ординаты оказывается пропорционален прямоугольнику, построенному на отрезках, на которые ордината делит диаметр, выбранный за ось абсцисс. То, что в этом случае кривая представляет собою эллипс, гиперболу или в пограничном случае параболу, было известно по сочинению Аполлония, на которого Декарт и делает ссылку. Итак, только из сочинения Аполлония было известно, что кривые, обладающие этим свойством по отношению к некоторой системе параллельных координат, не отличаются от тех, которые обладают тем же свойством по отношению к прямоугольной системе координат, или, иначе говоря, что они всегда имеют две оси. Даже у Аполлония благодаря своеобразию построения его первой книги, общий план которой Декарт, по собственному его признанию, лишь с трудом уяснял себе, этот результат выступает не особенно рельефно. Главная задача, которая решается в этой книге при помощи ряда исследований, имеющих и большое самостоятельное значение („Древние и средние века", стр. 138 и след.), является еще более широкой; она состоит в доказательстве того, что рассматриваемые автором произвольные плоские сечения у любого конуса, имеющего основанием круг, представляют собою те же кривые, что и плоские сечения конуса вращения.

Мы видели, разбирая проективную геометрию XVII в., что последняя также занималась определением осей конического сечения; но, во-первых, исследования Дезарга и Паскаля не пользовались широкой известностью, а работы де-ла-Гира относятся лишь к самому концу столетия; во-вторых же, от результатов, полученных этими учеными, нужно было бы проделать к аналитико-геометрическому рассмотрению еще более длинный путь, чем тот, который подсказывался изучением Аполлония.

Таким образом перед Виттом стояла задача дать непосредственное доказательство того предложения, которое Декарт взял как готовый результат у Аполлония.

Юная аналитическая геометрия была, однако, еще недостаточно развита, чтобы самостоятельно взяться за преобразование, подобное тому, посредством которого мы находим теперь оси кривой 2-го порядка и относим к ним кривые. Витту пришлось поэтому в первой его книге решить ту же задачу чисто геометрически. Он трактует ее таким образом и в таких формах, как это мог бы сделать уже Аполлоний. Однако так как он ставит задачу иначе, он не может базироваться на Аполлонии; он самостоятельно развивает новые геометрические соображения, а благодаря этому его решение, несмотря на чисто формально сходство, в геометрическом отношении оказывается гораздо более независимым от аполлониева, чем алгебраические исследования Валлиса.

Что касается до гиперболы, то Витт пользуется ее асимптотами, углы между которыми делятся осями пополам, и определение осей не представляет особых трудностей При рассмотрении параболы и эллипса он исходит из нового определения этих кривых как геометрических мест. Так, он определяет параболу прежде всего как геометрическое место точек пересечения одной из сторон вращающегося около своей вершины угла и прямой данного направления, проходящей через точку пересечения другой стороны угла с некоторой неподвижной прямой. Отсюда Витт выводит диаметральные свойства параболы и показывает, что существует бесконечно большое количество взаимно параллельных диаметров, имеющих каждый свою систему хорд. Витт определяет касательные и пользуется ими при решении главной задачи — нахождения диаметра, образующего с своей системой хорд данный угол. Если этот угол прямой, то мы получаем оси, Витт определенно подчеркивает это; также и в дальнейшем нахождение осей гиперболы и эллипса отчетливо выступает как важный результат проведенного в 1-й книге геометрического исследования этих кривых.

Таким образом Витт в своей 1-й книге самостоятельно, хотя и чисто геометрическим путем, получает то, что Декарт заимствовал от Аполлония. Он может после этого во 2-й книге, подобно Декарту, ограничиться преобразованием уравнения любой кривой 2-го порядка и отнести ее к паре сопряженных диаметров. Хотя эти последние вообще не образуют прямого угла, но Витт знает из своей первой книги, что всегда имеется пара взаимно перпендикулярных диаметров и что, следовательно, кривая есть эллипс, гипербола или парабола. Прием, употребленный им в этой книге, тот же, что у Декарта и Ферма; но у Витта подробнее рассматривается, как преобразуются различные формы первоначально данного уравнения и к каким кривым они ведут. В качестве приложения доказывается затем методом *аналитической* геометрии, что кривая, точки которой равноудалены от данной точки и данной прямой, есть парабола, а кривая, расстояния точек которой от двух данных точек имеют определенную сумму или разность, есть соответственно эллипс или

гипербола. В связи с этими определениями, имеющимися уже у Ферма, даны геометрические доказательства предложений об углах между касательными и радиусами-векторами.

Чисто геометрический характер 1-й книги Витта показывает, (и это вполне естественно), что аналитическая геометрия, несмотря на сразу выявившиеся преимущества ее, не могла еще собственными средствами достичь всего того, что давали старые методы. Прошло еще сравнительно много времени до тех пор, пока аналитическая геометрия смогла дать в рассматривавшихся раньше областях и, в частности, в учении о конических сечениях, готовые результаты в такой полноте, какую мы находим у Аполлония. Неудивительно поэтому, что Ньютон, несмотря на свое восхищение перед Декартом, на „Геометрию" которого он в одном из писем обращает внимание читателей своих „Начал", при выводе кеплеровых законов из предложений механики прибегает к предложениям Аполлония.

Геометрические предложения, применяемые Ньютоном, взяты из сравнительно более известной 1-й книги Аполлония; однако в одной из глав „Начал", имеющей чисто геометрическое содержание, Ньютон обнаруживает редкое как для его, так и для нашего времени понимание того круга идей, который лежит в основе весьма общих предложений 3-й книги Аполлония. Проективная геометрия, как мы могли усмотреть из предложения Паскаля (стр. 185), дала, правда, предложениям еще более общую форму; но для этого были применены методы, чуждые Аполлонию.

В руках Ферма и Декарта аналитическая геометрия была удобным средством для определения „мест к трем или четырем прямым". Ньютон применяет при нахождении этих мест методы и предложения 3-й книги Аполлония, которая, по указанию самого Аполлония, должна была служить для определения как этих, так и других подобных геометрических мест. В частности, Ньютон пользуется предложением, которое мы назвали „предложением о степени точки" и которое у Аполлония занимает центральное положение („Древние и средние века," стр. 143). В своей геометрической работе, о которой мы будем ниже говорить особо, Ньютон распространил это предложение на кривые 3-го порядка, и притом таким способом, который с тем же успехом может быть применен к кривым высшего порядка. Общее предложение получило потому впоследствии название „предложения Ньютона"; это название нередко применяется и к игравшему в древности такую большую роль предложению о конических сечениях.

Исследования Ньютона имеют связь и с той группой предложений 3-й книги Аполлония, в которой рассматриваются свойства касательных к коническим сечениям, независимые от точек касания, и следовательно, конические сечения рассматриваются фактически как огибающие („Древние и средние века", стр. 144). Ньютон идет в этом пункте значительно дальше, чем это сделал

Аполлоний в каком-либо из его дошедших до нас сочинений; среди применений предложений Аполлония мы находим у него доказательство следующего предложения: коническое сечение является огибающей системы прямых, отсекающих на двух *любых* касательных, считая от двух заданных на этих касательных точек, отрезки, произведение которых постоянно. Это предложение есть не что иное, как основное предложение о получении конического сечения с помощью прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных рядов точек; только здесь, как и при прежнем определении кривых как геометрических мест (стр. 187), связь между этими рядами устанавливается лишь отдельным частным способом, без введения общего понятия о проективности.

Сверх того, Ньютон применяет свои предложения к построению конических сечений, подчиняющихся данным условиям, в частности, проходящих через данные точки или касающихся данных прямых. Если не говорить об утерянном сочинении Паскаля (стр. 186), то Ньютон здесь впервые решил все задачи, основанные на комбинации этих двух условий. Наряду с этим он рассматривает и отдельные другие условия, например то, что коническое сечение должно быть подобно или конгруэнтно другому, или что фокус должен находиться в данной точке. Благодаря введению этого последнего условия его задачи об определении конических сечений превращаются в задачи об определении планетных орбит и получают, таким образом, связь с основным содержанием „Начал". В этой связи Ньютон их и дает. Надо думать, что Ньютон занимался решением этих вопросов из чисто геометрического интереса, и в „Началах" привел лишь ранее найденные им результаты; трудно предположить, чтобы при быстроте, с которой писались „Начала", он располагал временем для столь обстоятельных побочных геометрических исследований.

Геометрическая глава „Начал", как было упомянуто, находится в теснейшей связи с 3-й книгой Аполлония: ни аналитической геометрией, ни центральной проекцией Ньютон в ней ни в какой мере не пользуется. Оба эти новых средства он применяет в своей работе „Перечисление линий третьего порядка" („Enumeratio linearum tertii ordinis"), опубликованной в 1704 г. в виде добавления к его оптике. Главным образом он пользуется аналитической геометрией, применяемой им здесь в той области, где ее преимущества выступают особенно ясно. Даже те предложения, которые он приводил здесь без доказательства, таковы, что их легче всего получить, пользуясь параллельными координатами и применяя предложения об алгебраических уравнениях. Это относится, например, к упомянутому уже расширенному предложению о степени точки и к определению прямолинейных диаметров кривой как геометрических мест точек ряда параллельных прямых, расстояния которых от точек пересечения прямых с кривою имеют алгебраическую сумму, равную нулю. Что касается до централь-

ной проекции, то мы находим ее применение там, где Ньютон дает имеющий важное значение общий обзор.

При перечислении различных видов кривых 3-го порядка, что и составляет главный предмет сочинения, Ньютон исходит из рассмотрения бесконечных ветвей. Каждая кривая нечетного порядка имеет их по меньшей мере две (проходящих, по современному пониманию, через одну и ту же бесконечно удаленную точку). Если это ветви гиперболического типа, то обычно можно бывает, принимая асимптоту за ось ординат и выбирая надлежащим образом ось абсцисс, привести уравнение к следующему виду:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Существование других асимптот, кроме оси ординат, зависит от знака a. Касательные, параллельные оси ординат, определяются с помощью уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0.$$

Мы получаем различные виды, смотря по тому, имеет ли это уравнение 0, 2 или 4 действительных корня; случаи равных корней дают промежуточные виды. Подобным же образом разбираются случаи, в которых параллели к оси ординат пересекаются только в одной точке, или в которых асимптота, параллельная оси ординат, сама удаляется в бесконечность. Изучение частного случая кривых последнего типа, а именно так называемой полукубической параболы:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

дает Ньютону возможность наилучшим образом обозреть все типы кривых 3-го порядка. Именно, Ньютон замечает, что каждая кривая 3-го порядка может быть представлена как центральная проекция, как „тень“ такой кубической параболы. Пять видов, которые может иметь последняя кривая, дают, таким образом, все проективно различные виды, вообще возможные для кривой 3-го порядка. Принадлежность к одному из этих пяти видов определяется свойствами трех корней уравнения $y^2 = 0$, где y^2 равно вышенаписанному выражению 3-й степени. Возможны следующие случаи: 1) уравнение имеет 3 действительных и различных корня; кривая состоит тогда из 2 отдельных ветвей; 2) уравнение имеет 2 мнимых корня; кривая имеет только одну ветвь; при 2 равных корнях кривая имеет либо 3) двойную точку либо 4) изолированную точку; наконец, 5) уравнение может иметь 3 равных корня; кривая имеет тогда точку возврата.

Ньютон указывает еще простые способы построения точек конических сечений и кривых 3-го порядка с двойной точкой; эти его указания не имеют, однако, проективного характера.

Могло бы казаться, что с содержанием вышеупомянутых геометрических глав „Начал“, в которых конические сечения

определяются по данным точкам, связано одно замечание Ньютона о приближенных квадратурах, содержащееся во втором письме к Лейбницу (стр. 65). Он говорит, что квадратуры могут быть выполнены путем замены кривых простыми кривыми, проходящими через часть точек первых. Однако Ньютон достигает этой цели в своей общей формуле интерполирования другим способом. Эта формула подробно рассматривается в его работе „Разностный метод" („Methodus differentialis"), вышедшей в 1711 г.; в сжатой форме она приведена уже в одном из вспомогательных предложений „Начал" (III, лемма 5).

Применяемые здесь в качестве приближений „параболические" кривые, представляемые уравнениями вида:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

были использованы уже в 1668 г. Джемсом Грегори для вывода известной формулы, называемой формулой Симпсона по имени математика, впоследствии снова нашедшего ее. Ньютон отличается от Грегори и от авторов более ранних формул интерполирования, в частности от Бригга (стр. 141), тем, что он не ограничивается случаем, когда последовательные значения независимого переменного разнятся на постоянную величину, так что ординаты точек, определяющих вспомогательную кривую, отсекают на оси абсцисс равные отрезки. Правда, он начинает с рассмотрения этого случая, но затем он предполагает координаты точек, через которые проводится вспомогательная кривая, совершенно произвольными. Обозначим эти координаты через x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; ... Ньютон последовательно образует отношения разностей

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \Delta y_0, \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \Delta y_1, \ldots$$

$$\frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \Delta^2 y_0, \quad \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 y_1, \ldots$$

и получает, что

$$y = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0 + \ldots$$

Сам Ньютон обозначает отношения Δy_0, $\Delta y_1, \ldots$, взятые с противоположными знаками, через b, $2b$, $3b, \ldots$, отношения $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1, \ldots$ через c, $2c$, $3c, \ldots$ и т. д. Числа, написанные им в виде коэфициентов, в действительности являются, таким образом, индексами.

Мы не будем останавливаться на более подробной работе 1711 г.: заметим только, что Ньютон выводит в ней из своей интерполяционной формулы формулу, получившую впоследствии название формулы Стирлинга

Ко времени появления „Начал" индексы употреблялись уже и Лейбницем, правда, в неопубликованной его работе. У него они служат здесь для различения точек кривой, обозначавшихся

тогда обычно, если речь шла о ряде положений подвижной точки, одною и тою же буквою (черт. 31). Большее значение имеет применение, которое Лейбниц, со свойственной ему зоркостью ко всему, что может способствовать усовершенствованию техники математических вычислений, дал указателям при решении системы уравнений 1-й степени с несколькими неизвестными. Он сопровождает здесь каждый коэфициент двумя индексами (10, 11, 12, 20, 21,...), из которых первый соответствует номеру уравнения, а второй номеру неизвестного, при котором стоит коэфициент. Благодаря этому Лейбниц получает возможность дать наглядное выражение окончательному результату, получаемому путем исключения неизвестных. Даваемое им правило тождественно с правилом образования детерминанта уравнений. Оно имеется как в одном из писем его к Лопиталю, так и в сохранившихся после его смерти бумагах. В последних есть также указание на то, каким образом можно исключение одного неизвестного из двух уравнений высших степеней свести к исключению из нескольких уравнений 1-й степени, т. е. к образованию детерминанта. Его способ совпадает со способом, найденным впоследствии Эйлером и получившим имя последнего. Здесь, как и в других случаях, где Лейбниц имеет дело с несколькими уравнениями или многочленами, содержащими одно неизвестное, он также обозначает коэфициенты с помощью двух индексов, указывающих соответственно на номер многочлена и на показателя степени неизвестного, при которой стоит данный коэфициент.

К подобной же наглядности Лейбниц стремится, когда он в своей „Геометрической характеристике" (стр. 83) символически изображает геометрические операции и выводы. Мы не будем останавливаться на этом, так как эта его идея не получила практических применений.

Постепенно совершенствовавшаяся алгебраическая символика и получавшие все более широкое распространение навыки в овладении ею оказались особенно плодотворными для изучения алгебраических уравнений высших степеней с одним неизвестным. Относящееся сюда определение равных корней и границ, внутри которых лежат один или несколько корней, а также приближенное вычисление корней мы разберем ниже в связи с инфинитезимальными исследованиями, в которых часто применялись подобные алгебраические вспомогательные средства. Естественно, что изучение уравнений шло и по пути попыток найти алгебраическое решение уравнений выше чем 4-й степени; этой задачей занимались, между прочим, Чирнгауз и Лейбниц во время их пребывания в Париже.

Естественным средством для решения этой задачи должны были казаться такие преобразования, которые ведут к уничтожению некоторых членов уравнения. Если бы удалось уничтожить все члены, кроме первого и последнего, то решение уравнения свелось бы к извлечению корня. Чирнгауз опубликовал в „Acta eruditorum" предложенный им прием для такого уничтожения членов.

Пусть дано уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0;$$

если положить

$$y = x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p,$$

где $p < n$, и исключить из обоих уравнений x, то получим уравнение относительно y, которое, как отмечает Чирнгауз, также должно быть n-й степени; это видно из того, что каждому корню данного уравнения соответствует только одно значение y. В выражения коэфициентов нового уравнения входят p произвольных величин $b_1, b_2, \ldots, b_p$; при соответствующем их выборе p коэфициентов преобразованного уравнения можно обратить в нуль Если $p = n - 1$, то можно уничтожить таким образом все $n - 1$ средних членов.

Однако претензии Чирнгауза на то, что его способ дает возможность получать алгебраическое решение уравнений n-й степени, неосновательны. Определение вспомогательных величин b требует, вообще говоря, решения уравнений более высокой степени, чем степень данного уравнения. Уравнения 3-й и 4-й степени могут быть решены его способом; что касается до первых, то он сам дает их решение. В возможности же получить таким путем решение уравнений 5-й степени Лейбниц высказывал сомнения еще до опубликования метода Чирнгауза. В одном из писем к последнему он говорит, что, по его мнению, этот метод не может дать решения уравнений выше 4-й степени, за исключением особых случаев. Более того, Лейбниц полагал даже, что он может это доказать. В XIX в. Абель доказал, что не только методом Чирнгауза, но и вообще невозможно решить алгебраически уравнение 5-й и более высокой степени.

Несмотря на предупреждение Лейбница Чирнгауз опубликовал свой метод без какого-либо замечания о границах его применимости, быть может, в надежде, что общее решение удастся получить в будущем. Что касается до уравнений 5-й степени, то лишь впоследствии удалось использовать метод Чирнгауза для приведения их к виду:

$$x^5 + ax + b = 0.$$

Новые результаты, касающиеся алгебраических уравнений, находим мы также во „Всеобщей арифметике" Ньютона, изданной, правда, лишь в 1707 г. его преемником по кафедре в Кэмбридже, но имеющей в основе лекции, которые Ньютон читал значительно раньше. Эта книга исходит из тех же основанных на учении о пропорциях общих определений операций, какими пользуется и Декарт. Мы уже имели случай касаться этой работы (стр. 209), в дальнейшем нам также придется с ней встретиться. Здесь мы отметим, что Ньютон приводит в ней метод, который дает возможность подстановкой в данный многочлен простых численных значений найти его рациональные множители 1-й или 2-й степени

если последние существуют. Для определения числа мнимых корней уравнения Ньютон дает правило, аналогичное декартову правилу знаков, служащему для определения числа положительных и отрицательных корней. Правило Ньютона, однако, не всегда дает верный результат и является лишь первым шагом в том направлении, в котором лишь Штурму удалось достигнуть цели. В этой же работе мы находим общее правило образования рекуррентных уравнений, с помощью которых суммы степеней корней алгебраического уравнения могут быть выражены через коэфициенты этого уравнения; напомним, что уже Жираром (стр. 112) эти суммы были определены до суммы 4-х степеней включительно. Правило это, которое могло бы быть полезным, например, при выполнении исключения по методу Чирнгауза, Ньютон приводит без доказательства. В книге его мы находим, далее, большое число применений алгебры к решению геометрических и других задач.

III. Возникновение и первоначальное развитие исчисления бесконечно малых.

1. Механика к началу нового времени.

Исследуя происхождение современного, более точного, логически определенного и более общего понятия функции, сложившегося в новейшее время, историки замечали, что в прежней своей форме, исторически подготовлявшейся в течение того периода, которым мы в этой книге занимаемся, это понятие функции строилось бессознательно по образцу тех функций, с которыми приходится иметь дело в механике. Так оно и было на самом деле. И дело здесь не только в том, что многие весьма важные инфинитезимальные исследования (а такие исследования фактически имели дело с функциями даже тогда, когда понятие функции не было еще установлено) возникли под давлением запросов, предъявлявшихся к математике механикой. Дело также в том, что само представление об одновременном изменении величин, из которых одна все время является, по современной терминологии, функцией другой, тесно связано с представлением о движении. Пусть даже это движение стало пониматься в более абстрактном смысле, — первообраз его заключался все же в таких движениях, которые действительно происходят в природе. Представлением, позаимствованным у природы, было представление о непрерывности как функций, так и их производных всех порядков — непрерывности, которая могла нарушаться только в том случае, если для некоторых определенных значений независимых переменных функция становится бесконечной. Это представление заимствовано непосредственно из представления о совершающихся в природе движениях, или изменениях, происходящих во времени. Согласно этому представлению в природе не может произойти никакого конечного изменения, на которое не потребовалось бы времени; никакая частица не может изменить своего места, не пройдя ряда непрерывно следующих друг за другом промежуточных положений. В связи с этим долго, даже в XIX в., исследование функций, не удовлетворяющих условиям непрерывности, считалось делом, вряд ли заслуживающим труда, даже в том случае, если такие функции встречались на пути анализа.

До известной степени эти требования непрерывности стояли в связи также с унаследованным от древних геометрическим изображением величин. Отрезок представляет величину, которая может непрерывно изменяться; когда уже в древности для изображения не вполне определенных точек и линий, а следовательно, косвенным образом, и для изображения связи между взаимно зависимыми величинами пользовались геометрическими местами, то при этом фактически предполагалось, что найденные таким образом кривые или поверхности непрерывны. При этом, однако, как известно, непрерывность не понималась как такое свойство, которое позволяло бы, например, непосредственно переносить предложение, справедливое для всех рациональных величин, на иррациональные или предложение, справедливое для всех вписанных в кривую ломаных, на эту кривую. Нет, хотя и не сомневались в том, что такое перенесение могло приводить к общим предложениям, но эти предложения не считались еще доказанными до тех пор, пока они не были облечены в строгую форму евдоксова учения о пропорциях в первом случае и метода исчерпывания — во втором.

Только такие полные доказательства содержатся в дошедших до нас сочинениях древних [1].

Щепетильность эта, которую мы находим уже у Зенона из Элеи („Древние и средние века", стр. 56) и которую греческие авторы продолжали проявлять, несмотря на то, что Аристотель опроверг софизмы Зенона, лишила античную математику могуще-

[1] Эта книга вышла в 1903 г. Спустя три года ближайшим из сотрудников Цейтена, профессором Копенгагенского университета Гейбергом было открыто неизвестное прежде сочинение Архимеда — его послание к Эратосфену. В этом послании ряд геометрических и механических предложений устанавливается при помощи инфинитезимальных соображений, аналогичных тем, которые в XVII в. применялись Кеплером, Кавальери и другими авторами, работы которых разобраны в этой книге. Архимед, правда, указывает, что приводимые им рассуждения не составляют еще настоящего „геометрического" доказательства, но они, по мнению Архимеда, свидетельствуют о том, что результаты правильны. Остается только доказать их строго. Некоторые из установленных в „Послании" предложений доказаны Архимедом „геометрически" в других дошедших до нас сочинениях. При этом иногда, как, например, в знаменитой „Квадратуре параболы", ход рассуждений остается тот же, что и в „Послании", только вместо прямого доказательства фигурирует характерное для метода исчерпывания доказательство от противного, которое требует гораздо больше места и времени. Иногда же ход рассуждений существенно иной. Так, в „Послании" Архимед определяет объем шара, после чего, представляя этот объем как сумму объемов бесконечно тонких пирамид с вершинами в центре шара, легко найти поверхность шара, что Архимед и делает. В сочинении же „О шаре и цилиндре" Архимед методом исчерпывания вычисляет непосредственно поверхность шара, исходя из поверхности, образованной вращением правильного многоугольника с четным числом сторон вокруг диаметра описанного круга.

Представляется чрезвычайно интересным вопрос, было ли известно „Послание" математикам XVII в. Нет никаких оснований для положительного ответа на него. Ряд соображений делает очень вероятным отрицательный ответ. Однако не исключена возможность, что если не в подлиннике, то через устную традицию ученые XVII в. могли быть знакомы с инфинитезимальными методами Архимеда.

Прим. ред.

ственного средства, позволяющего легко обозревать связь между переменными величинами. Логически эта осторожность была, конечно, оправдана; но фактически многого нечего было бы бояться и при меньшей строгости. Действительно, с одной стороны, в тех случаях, которые исследовались, предположенная непрерывность имела место на самом деле, так что окончательные результаты получались правильные; с другой стороны, с помощью античных приемов доказательства всегда можно было убедиться в этой правильности и задним числом.

Неперово определение логарифмов (стр. 135) уже дало нам пример плодотворности такого механического, или, лучше сказать, кинематического, представления связи между изменениями двух величин. Подобное представление сделалось еще более естественным, когда вскоре после этого Галилей сделал предметом своих исследований само движение точки. Правда, эти исследования касались собственно физического движения и поверялись опытами; но произведены они были на основании математических рассуждений, которые можно было применить и к движениям по произвольно взятому математическому закону и, следовательно, также к любым величинам, изменение которых истолковывалось кинематически. Мы увидим, что работы Галилея действительно оказали в этом направлении влияние на методы исчисления бесконечно малых.

По существу, предметом настоящей книги является история математики в тесном смысле; вышеприведенные замечания показывают, однако, что для правильного понимания ее необходимо коснуться и соседних областей, в частности той, которую мы называем теперь рациональной механикой. Область эта как в древности, так и в рассматриваемые нами века, была тесно связана с математикой и разрабатывалась математиками. Из сказанного ясно, что, прежде чем говорить о развитии исчисления бесконечно малых, следует рассказать о работах Галилея по изучению движения точки. Равным образом здесь уместно будет коснуться и других механических, особенно статических, исследований. Так, например, задача об определении центра тяжести различных тел была источником первых инфинитезимальных построений. В то время как новое учение о движении открывало исследованиям о бесконечно малых новые точки зрения и новые области, статические исследования в более сильной степени были связаны с античной математикой. С них поэтому мы и начнем.

Находящаяся на высокой ступени развития архитектура эпохи Возрождения предполагает знакомство, по крайней мере, с практическими применениями механики и особый интерес к ним. Указания, имеющиеся на этот счет у Герона и Паппа, изучались с большим увлечением, они служили, между прочим, импульсом для попыток воспроизведения различных механических кунштюков. Так, например, знаменитые часы на Страсбургском соборе сконструированы по указаниям и описаниям древних; в частности идея вращающегося небесного глобуса, совершающего свой

оборот в течение 24 часов, почерпнута из описания архимедова планетария. Изучались также и более рациональные вопросы, особенно принадлежавшие к развитой уже в древности статике — части механики, имеющей особое значение для архитектора. Так, великий художник Леонардо да-Винчи, бывший выдающимся архитектором и математиком, снова дал правильное определение центра тяжести пирамиды. Более обстоятельное знакомство с Архимедом дало толчок переводчику Паппа Коммандино и переводчику Архимеда Мавролико к самостоятельному исследованию ряда вопросов, особенно таких, которые могли пополнить оставленное Архимедом наследство. Именно им обязаны мы доказательствами справедливости применявшегося Архимедом предложения, согласно которому центр тяжести сегмента параболоида вращения лежит на оси сегмента в той точке, расстояния которой от вершины и от основания относятся как 2 к 1.

Весьма изящную форму это доказательство имеет у Мавролико, который в приложении к своему изданию сочинения Архимеда о равновесии плоских фигур продолжает его исследования по этому вопросу, а также определяет центры тяжести некоторых тел. Основная мысль его доказательства заключается в том, что в сегменте параболоида площади сечений, параллельных основанию сегмента, относятся как квадраты ординат осевого сечения, т. е. как соответствующие абсциссы. В силу этого центр тяжести определяется так же, как в треугольнике, в котором ось параболоида служит средней линией. Доказательство этого соответствия выполнено строго, причем, с одной стороны, в заключенные между сечениями части параболоида вписаны и около них описаны цилиндры, а с другой, — в получившиеся от соответственного деления треугольника трапеции вписаны и около них описаны параллелограмы.

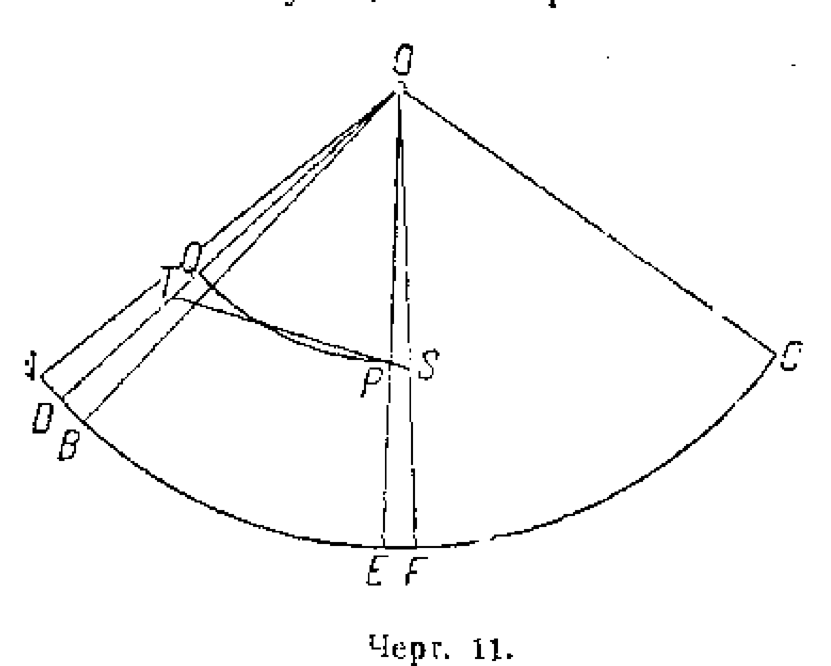
Позже Лука Валерио (Luca Valerio, 1552—1618) в появившемся в 1604 г. сочинении „De centro gravitatis solidorum" подобным же образом нашел центры тяжести сегментов и слоев эллипсоидов и гиперболоидов вращения (около главной оси), отсекаемых плоскостями, перпендикулярными оси вращения. Уже Архимед нашел объем таких тел („Древние и средние века", стр. 128). В качестве примера можно рассмотреть здесь поверхность, образованную вращением гиперболы $y^2 = 2px + \alpha^2x^2$ около оси x. Валерио, знавший от древних о свойстве гиперболы, выражаемом нами этим уравнением, замечает, что плоскость, перпендикулярная оси, пересечет поверхность по кругу, составляющему сумму кругов, по которым эта плоскость пересекает параболоид и конус, образуемые, соответственно, вращением параболы $y^2 = 2px$ и прямой $y = \alpha x$. Отсюда он заключает, что сегмент гиперболоида равновелик сумме сегмента параболоида и конуса. Таким путем можно определить не только объем, как у Архимеда, но и центр тяжести.

Подобно тому как определение центра тяжести сегмента параболоида Мавролико свел к знакомому уже определению

центра тяжести треугольника, Валерио в более позднем сочинении применил знакомое определение центра тяжести полушария к определению центра тяжести плоской фигуры, состоящей из двух конгруэнтных полусегментов параболы $y^2=2px$, симметрично расположенных один возле другого так, что ордината является у них общей. Если принять ее за ось ординат, то уравнение одной из парабол можно написать в виде:

$$x=\frac{b^2-y^2}{2p};$$

отсюда следует, что заключающиеся внутри нашей плоской фигуры отрезки прямых, параллельных оси абсцисс, пропорциональны площадям кругов, по которым плоскости, проведенные через эти параллели перпендикулярно к оси ординат, пересекают шар, образованный вращением круга $x=b^2-y^2$ около оси ординат. Рассматриваемая площадь имеет, следовательно, тот же центр тяжести, что и полушарие. Этот результат Валерио использует затем для построения оригинального решения задачи о квадратуре параболы.



Черт. 11.

Исследования Валерио свидетельствуют как о знакомстве его с инфинитезимальными исследованиями древних, так и о большой личной изобретательности. Они встретили живое признание у Галилея и оказали, вероятно, некоторое влияние на Кавальери; последний, как мы увидим, дал четкую формулировку принципу, бывшему фактически руководящим для Валерио, и применял его в широких размерах.

Заслуживает упоминания здесь также одно несколько более позднее определение центра тяжести, интересное своею формою и своеобразным применением бесконечно малых; мы имеем в виду принадлежащее ла-Файлю определение центра тяжести кругового сектора; вместе с связанным с ним определением центра тяжести эллиптического сектора оно образует тему сочинения, вышедшего в 1632 г. Ход мыслей, на котором оно основано, можно передать, примерно, следующим образом.

Если известен (черт. 11) центр тяжести T кругового сектора AOB, лежащий, очевидно, на средней линии его OD, то можно определить центр тяжости P другого сектора AOC с тем же радиусом, но любым центральным углом. Расположим оба сектора по одну сторону от общего начального радиуса AO. Центр тя-

жести P сектора AOC должен лежать на биссектрисе OE угла AOC, а центр тяжести S сектора BOC — на биссектрисе OF угла BOC. Далее, центры тяжести T, P, S должны быть расположены на одной прямой так, чтобы было:

$$\frac{TP}{PS} = \frac{BOC}{AOB} = \frac{\smile BF}{\smile DB} = \frac{\smile DE}{\smile EF}$$

(вследствие того, что $\angle EOE = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle DOB$). Таким образом если длины дуг известны, то задача сводится к следующей: через точку T провести прямую TPS так, чтобы отрезки TP и PS, отсекаемые данными прямыми OE и OF, находились в данном отношении.

Построением этим, как легко видеть и как позже отмечает при рассмотрении его Гульден, нельзя воспользоваться в том случае, когда сектор AOB составляет целый круг; таким образом, то обстоятельство, что центр тяжести круга лежит в его центре, не может быть использовано. Поэтому ла-Файль, чтобы получить сектор с известным центром тяжести, обращается к такому сектору, в котором, как мы сказали бы теперь, центральный угол AOB бесконечно мал и центр тяжести T делит поэтому радиус OD, совпадающий теперь с OA, так, что $OT = \frac{2}{3} OA$. В этом случае прямая TP должна быть проведена так, чтобы $\triangle OPT$ был равновелик ограниченному OP и OT круговому сектору OPQ с центром в O и радиусом OP. В справедливости этого легко убедиться: действительно, отношение $\frac{TP}{PS}$ равно отношению между высотами, опущенными на PO в треугольниках OPT и SOP. Первая из этих высот, по предположенному построению, равна дуге PQ. Вторая в предельном случае равна отрезку, отсекаемому на той же дуге углом EOE. Таким образом сообразно этому построению в предельном случае имеем:

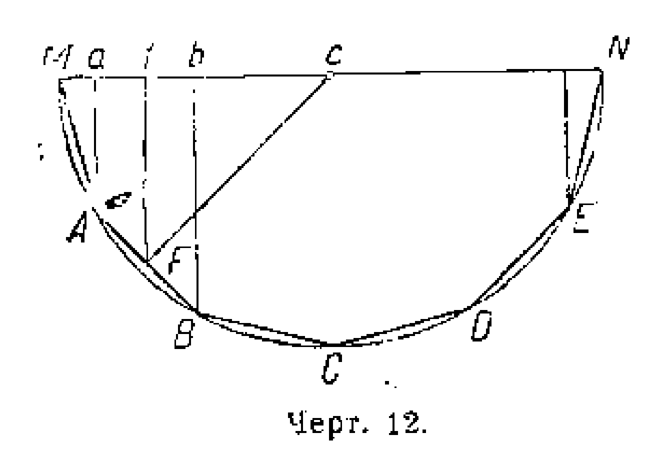
$$\frac{TP}{PS} = \frac{\smile QP}{\smile PS} = \frac{\smile DE}{\smile EF}.$$

Мы не будем останавливаться на том, как выполняется указанное здесь построение; отметим только, что автор самостоятельно и правильно совершает здесь новую предельную операцию и дает построению строгую форму в полном согласии с требованиями античной геометрии. Как далеко идет он в этом отношении, видно из того, что он находит необходимым начать свое определение доказательствами существования применямых им фигур. Так, первое его предложение утверждает, что, когда дан круговой сектор, через конец дуги можно провести прямую, ограничивающую вместе с обоими радиусами (один из которых продолжен) треугольник, равновеликий сектору. 8-е предложение указывает способ определения в данном круге такого сектора, чтобы при построении треугольника, о котором идет речь в пер-

вом предложении, продолженный радиус, образующий одну из сторон треугольника, превосходил радиус на отрезок, меньший любого данного. Требование такого рода как раз представляет материал для точного доказательства методом исчерпывания.

При таком изложении решение отдельной задачи удачным искусственным приемом, приложимым только к ней, может составить содержание целого сочинения. Понятно, что, когда новые идеи, подобные примененной здесь, начали появляться со всех сторон в большом количестве, стало совершенно непосильным придавать каждой такой задаче традиционную форму изложения, строгую, но чрезмерно пространную. Кеплер еще раньше отказался от нее; несколько позже то же сделал Кавальери. Собрат ла-Файля по ордену иезуитов и продолжатель его работ по определению центров тяжести Гульден, в противоположность Кеплеру и Кавальери, придерживался в своем большом труде „О центре тяжести" („Centrobaryca") старых форм, которые, впрочем, как мы увидим, не всегда ограждали его от ошибок; однако, чтобы найти тот же центр тяжести, что и ла-Файль, он применял методы, которые можно было применить к более широкому кругу задач.

Определение центра тяжести кругового сектора связано у Гульдена с определением центра тяжести дуги круга. Чтобы найти последний, он пользуется, по крайней мере, в более полном доказательстве в своей 3-й книге, теоремой о моментах плоской фигуры: произведение величины всей плоской фигуры на расстояние ее центра тяжести от некоторой линии, лежащей в ее плоскости, равно сумме статических моментов отдельных частей фигуры относительно этой линии.



Черт. 12.

Гульден применяет это предложение (черт. 12) к моментам четного числа последовательных сторон правильного многоугольника $ABCDE$ относительно диаметра MN, параллельного AE. Если F есть середина хорды AB, и мы обозначим маленькими буквами проекции на MN, то момент $AB \cdot Ff = ab \cdot cF$. Преобразуя подобным же образом моменты остальных сторон и применяя метод исчерпывания, Гульден легко находит, что дуга круга относится к своей хорде, как радиус к расстоянию между центром тяжести дуги и центром круга.

Примененное здесь преобразование выражения моментов тождественно с употребленным Архимедом при вычислении поверхности шара преобразованием площади кривых поверхностей, образуемых вращением сторон многоугольника около MN. Гульден, нашедший это преобразование, несомненно, у Архимеда, должен был при сравнении своего рассуждения с архимедовым

притти к обобщающему предложению, что плоская дуга, вращаясь около лежащей в ее плоскости оси, образует поверхность, площадь которой измеряется произведением длины образующей дуги на путь ее центра тяжести. Кроме этого предложения Гульден нашел также второе, получаемое из первого заменою дуги площадью плоской фигуры и площади поверхности вращения объемом тела, образованного вращением площади. Повидимому, ни Гульдену, ни его современникам не было известно, что эти предложения, правда, в сжатой форме и без доказательства, имеются уже у Паппа. Гульден неоднократно пользуется ими для измерения поверхностей и объемов тел вращения. Что касается последних, то результаты в большинстве случаев были найдены уже раньше Кеплером и Кавальери [1]. Мы дадим в дальнейшем разбор их работ, несомненно, имевших значительное и плодотворное влияние на Гульдена, что не помешало ему подвергнуть их резкой критике.

Ошибочным является другое общее предложение Гульдена, утверждающее, что центр тяжести поверхности вращения должен совпадать с центром тяжести фигуры, по которой поверхность вращения пересекается плоскостью меридиана. Это предложение справедливо, если поверхность вращения есть полная или усеченная коническая поверхность; но когда Гульден хочет распространить его на любую поверхность вращения, то он упускает из виду, что площади усеченных конических поверхностей, вписанных в поверхность вращения, вообще не пропорциональны площадям соответствующих трапеций плоскости меридиана.

Рассмотрим далее, возвращаясь к несколько более раннему времени, работы по статике Симона Стевина. В произведенных

[1] Трудно сказать, каким образом Гульден пришел к установлению двух предложений, носящих сейчас его имя, но содержащихся, как указано в тексте, уже у Паппа. Столь же вероятным, как и гипотеза Цейтена, является и то предположение, что Гульден обобщил индуктивно целый ряд частных случаев, найденных другими авторами до него. Не вполне исключена и возможность, что Гульден взял эти предложения прямо у Паппа. Во всяком случае, интересно отметить тот факт, что Гульден не был в состоянии доказать эти предложения. Правда, он претендует на доказательство, но его пространные рассуждения носят скорее метафизический, чем математический характер. Любопытно, что это обстоятельство дало в руки Кавальери прекрасный аргумент в его полемике с Гульденом. В том же сочинении „О центре тяжести", в котором Гульден выставил два „своих" предложения, он обрушился на Кеплера и Кавальери с резкими нападками, утверждая, что инфинитезимальные методы, ими употребляемые, ничего общего с математическими методами доказательства не имеют. Кавальери ответил на эти нападки специальной работой, в которой он пространно шаг за шагом анализирует предъявленные ему Гульденом обвинения и, опровергая их, вместе с тем, развивает методы, изложенные им в той работе, которую критикует Гульден. В своем ответе Кавальери, между прочим, указывает на то, что выставленным Гульденом предложениям о поверхности и объеме тел вращения сам Гульден не смог дать вразумительного доказательства; между тем, с помощью тех методов, на которые Гульден нападает, такое доказательство легко дать. Кавальери приводит затем изящное инфинитезимальное доказательство „теоремы Гульдена", принадлежащее, по его словам, одному из его друзей.

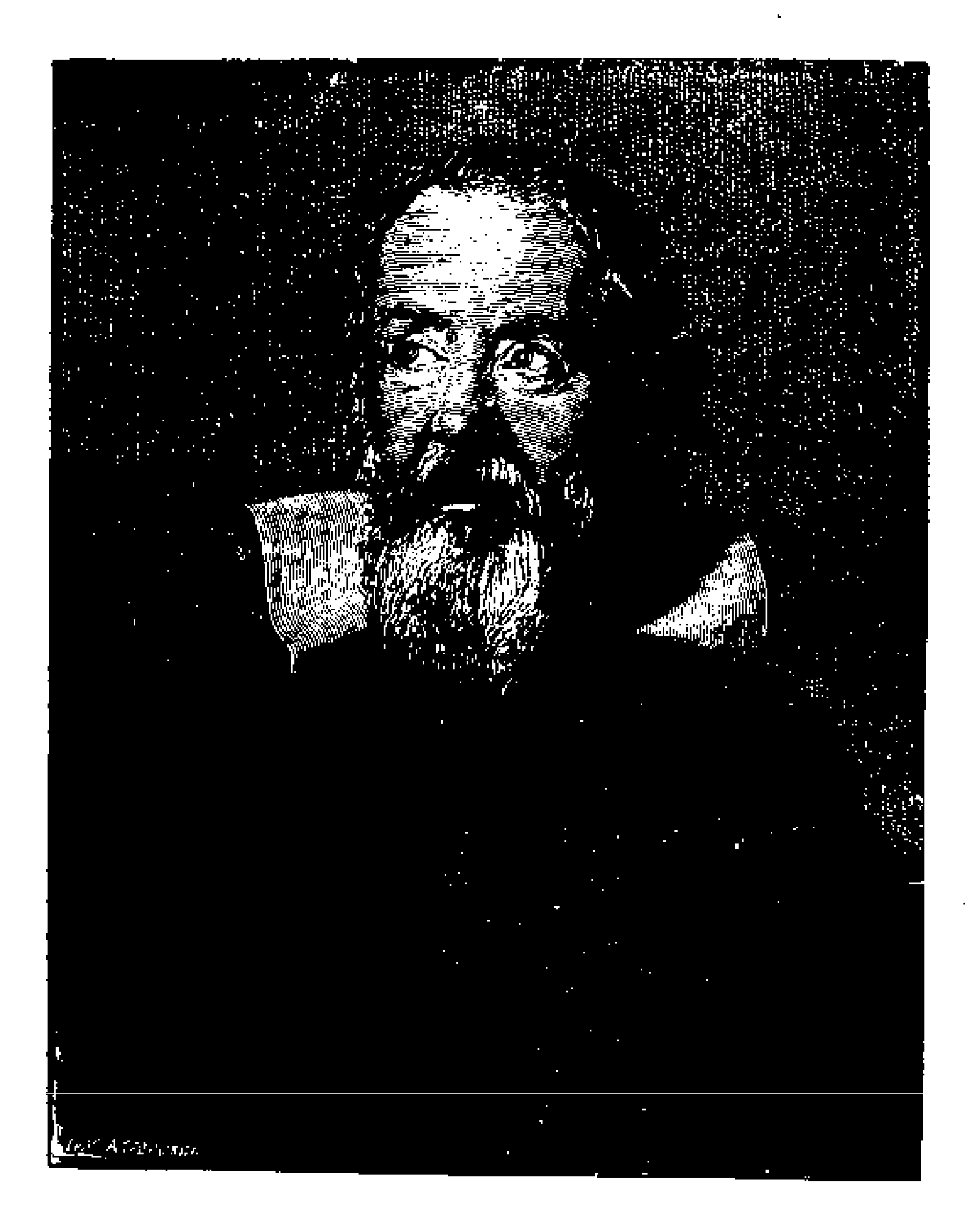
Прим. ред.

им определениях центров тяжести мы не можем отметить ничего существенно нового по сравнению с тем, что имелось уже у Коммандино и Мавролико; зато в „Гидростатике" его, в которой он продолжает работы Архимеда, мы находим новое применение учения о центре тяжести: давление, производимое тяжелой жидкостью на плоскую фигуру, непараллельную свободной поверхности, выражается у него весом жидкости, заполняющей усеченный цилиндр с вертикальной образующей, опирающейся на эту плоскую фигуру; центром давления является проекция центра тяжести цилиндра на испытывающую давление поверхность.

Из содержания работы Стевина по статике, дающей обстоятельное и систематическое изложение предмета, отметим еще его определение условия равновесия на наклонной плоскости. Он рассматривает треугольную призму с нижней горизонтальной и двумя наклонными боковыми гранями. Он представляет себе, что на эту призму надета замкнутая однородная цепь. Очевидно, что цепь эта должна находиться в равновесии, так как, если бы она скользила по одной наклонной плоскости вниз и, следовательно, по другой вверх, то, вследствие ее однородности, это не вызывало бы никаких изменений в ее расположении, и движение должно было бы продолжаться, так что мы имели бы здесь perpetuum mobile. Так как часть, лежащая под горизонтальной гранью, находится сама по себе в равновесии, то и между частями, лежащими на двух других боковых гранях, должно существовать равновесие.

Отсюда Стевин переходит к учению о сложении и разложении сил. Он показывает, что вес P части цепи, лежащей на одной из боковых граней, пропорциональный длине этой наклонной плоскости, в направлении самой цепи действует только как сила, пропорциональная высоте наклонной плоскости, или как $P\cos v$, где v — угол, образованный цепью и вертикалью. Стевин идет, таким образом, путем, противоположным тому, который избираем мы, выводя условие равновесия на наклонной плоскости с помощью разложения сил.

Галилей дает доказательство предложения о равновесии на наклонной плоскости с помощью принципа рычага. Для равновесия безразлично, предположить ли, что тело может беспрепятственно скользить вниз по наклонной плоскости, или вращаться в вертикальной плоскости вокруг некоторой неподвижной точки нормали к наклонной плоскости. Поэтому момент веса тела относительно точки будет равен моменту относительно той же точки силы, вызывающей соскальзывание его по наклонной плоскости. Сила эта и сила веса должны, таким образом, быть обратно пропорциональны расстояниям точки от линий, по которым направлены эти силы; эти расстояния, в свою очередь, относятся как длина наклонной линии к ее высоте. Галилей отмечает дальше, что между телами, лежащими на двух наклонных плоскостях, равновесие существует в том случае, когда высоты,



ГАЛИЛЕЙ

1564 — 1642

Гравюра А. Троицкого с портрета Сустермана

на которые одно тело опускается, а другое одновременно поднимается, обратно пропорциональны весам. Ученик Галилея Торичелли дал этому принципу более общую форму: равновесие существует в том случае, если при сдвиге общий центр тяжести не понижается и не повышается. Это условие равновесия на наклонной плоскости, а также аналогичные принципы, применяемые Стевином в его исследовании сложных блоков, представляют собой первые шаги на пути установления принципа возможных перемещений.

Если расширение существовавшего уже с древних времен учения о равновесии сыграло большую роль в развитии математики, то в еще большей степени это относится к обоснованному Галилеем учению о движении. Единственного предшественника в этой области Галилей имел в XVI в. в лице Бенедетти, который первый высказал закон инерции, утверждая, что действие сил выражается не в том, что они поддерживают то или иное состояние движения, как это раньше думали, а в том, что они изменяют прямолинейное равномерное движение. Это открытие заслуживает быть отмеченным тем более, что старая точка зрения встречается еще в попытках Кеплера объяснить движения небесных тел, с такой точностью описанные им в его законах. Бенедетти, в согласии с законом инерции, объясняет центробежную силу стремлением тел к прямолинейному движению; растущую скорость падения он объясняет так же, как Галилей, но только не использует этого объяснения для получения точных количественных соотношений. Близость к ньютонову пониманию силы Бенедетти проявляет и в другом пункте: он указывает, что ускорение одного и того же тяжелого тела в различных средах пропорционально его различному весу в них, вычисляемому по закону Архимеда. При этом он, однако, не замечает существования сопротивления среды.

Учение Галилея о движении изложено в его знаменитых „Discorsi“ (1638). В третьей беседе он исследует прямолинейное равномерно ускоренное движение. Оно характеризуется тем, что скорость движущейся точки в каждый момент пропорциональна времени, прошедшему от начала движения. Мы можем выразить это соотношением

$$v = gt,$$

где t — время, v — скорость и g — постоянный сомножитель. Галилей доказывает, что путь, пройденный к моменту времени t, имеет величину

$$x = \frac{1}{2} gt^2,$$

или, как он говорит, равен пути, проходимому в то же время при постоянной скорости, равной $\frac{1}{2} v$. В своем геометрическом доказательстве этого он пользуется координатами, применение которых, как мы уже отмечали, отнюдь не было чем-то неизвестным

до Ферма и Декарта. Время t служит абсциссой, скорость v ординатой. Если бы v было постоянно, то конец ординаты пробегал бы параллель к оси абсцисс, и пройденный путь представлялся бы площадью прямоугольника, заключенного между этою параллелью и осью абсцисс. Такого рода определение пройденного пути с помощью площади можно перенести и на другие движения. В рассматриваемом Галилеем случае, когда $v = gt$, конец ординаты пробегает прямую, и в доказательстве Галилея пройденный путь x изображается площадью треугольника, ограниченного этою прямою, абсциссою t и ординатою $v = gt$. Этот треугольник равновелик, как это и утверждалось, прямоугольнику с основанием t и высотою $\frac{1}{2}v$. То обстоятельство, что падение тяжелого тела является (если пренебречь сопротивлением воздуха) таким равноускоренным движением, Галилей доказывает опытами, к которым мы в дальнейшем вернемся.

В 4-й беседе Галилей исследует движение, совершаемое тяжелой точкою, брошенною с некоторою горизонтальною начальной скоростью (назовем ее u). Так как перемещения в горизонтальном направлении (которые мы будем рассматривать здесь как абсциссы x) пропорциональны соответствующим промежуткам времени, а перемещения по вертикали (y) — квадратам этих промежутков, то траектория точки будет параболой. Параметр ее Галилей определяет как учетверенную высоту падения, которая была бы нужна, чтобы сообщить точке скорость, равную начальной горизонтальной скорости. Действительно, уравнения

$$x = ut, \quad y = \frac{1}{2} gt^2$$

для горизонтального и вертикального движения дают

$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{u^2} x^2,$$

где параметр $\frac{2u^2}{g}$ как раз равен учетверенному пути, на котором была бы достигнута скорость падения u. Если обозначить параметр через $2p$, то легко видеть, что отношение вертикальной скорости gt к горизонтальной u равно $\frac{2y}{x}$ или $\frac{x}{p}$. У Галилея приведен и этот результат, применение которого мы позже найдем у Торичелли. Кроме того, Галилей устанавливает и другие предложения относительно движения брошенного тела, например то, что наибольшая дальность полета достигается, если направление начальной скорости, величина которой рассматривается как данная, составляет с своею горизонтальной проекцией угол в 45°. Это утверждал уже и Тарталья, который, однако, не был в состоянии вывести законы падения. Далее, Галилей указывает, что два бросания дают одинаковую дальность, если направления их начальных скоростей образуют с плоскостью горизонта углы, отклоняющиеся на одинаковую величину в ту и другую сторону от 45°.

Чтобы проверить установленный закон падения опытами, Галилей заменил свободное падение падением по наклонной плоскости. Полученные им результаты, касающиеся равновесия на наклонной плоскости (стр. 236), были недостаточны, чтобы сделать из них вывод относительно уменьшения скорости падения, имеющей место при его постановке опыта. Вывод этот Галилей получил, базируясь на следующем принципе: падающее тело, спускающееся различными путями до одного и того же уровня, получает ту же конечную скорость, посредством которой оно снова может быть поднято по другим путям на ту же высоту. Чтобы проверить правильность этого закона, Галилей воспользовался простым нитяным маятником с тяжелым шариком. Когда маятник достигал своего положения равновесия, нить задерживалась гвоздем, заставлявшим шарик двигаться вверх по кругу меньшего радиуса; но и на этом круге он достигал такой же высоты, с какой упал по первому кругу; результат этот подтверждался всякий раз, независимо от того, в какой точке нить задерживалась.

Галилей вывел из своего принципа и из учения о равномерно ускоренном движении предложение, утверждающее, что различные хорды, проходящие через верхнюю или нижнюю точку вертикального круга, пробегаются падающими точками в одинаковое время. Это дало ему возможность получить геометрическое решение задач, подобных следующей: найти наклонную прямую, по которой тяжелая точка упадет из данной точки на данную линию всего быстрее. Галилей нашел также, что не превышающая 90° дуга вертикального круга, оканчивающаяся нижней точкой круга, пробегается в более короткое время, чем ряд последовательных хорд, если конечная скорость на одной из них переносится на следующую как начальная; он ошибался, однако, предполагая в связи с этим, что дуга круга есть вообще кривая, по которой тяжелая точка падает из одного положения в другое всего быстрее.

Галилей пытался также использовать свой принцип для определения продолжительности качания маятника данной длины. Независимость этой продолжительности от величины отклонения (для малых отклонений) была замечена им уже раньше (стр. 21); в теоретическом исследовании этого вопроса он, однако, не имел успеха. Выполнить такое исследование удалось только Гюйгенсу. Гюйгенс нашел, что кривая, у которой изохронность имеет место для отклонений любой величины, есть циклоида, и определил продолжительность колебания циклоидального маятника. (Отсюда, рассматривая соприкасающийся с циклоидой круг, можно найти зависимость между длиной кругового маятника и продолжительностью малых его колебаний.) Исследования Гюйгенса о циклоиде мы разберем в особой главе, специально посвященной этой кривой.

Здесь мы коснемся другой задачи, полное решение которой также принадлежит Гюйгенсу и приведено в его „Маятниковых часах" („Horologium oscillatorium") — задачи о нахождении приве-

денной длины физического маятника, качающегося под действием силы тяжести около горизонтальной оси (т. е. о нахождении длины математического маятника, имеющего тот же период качания, как и данный физический). Гюйгенс исходит из того принципа, что, если бы в то мгновение, когда центр тяжести маятника достигает наинизшего положения, отдельные частицы физического маятника были вдруг освобождены от их связей, и каждая продолжала качаться около той же оси со скоростью, которою она обладала в это мгновение, то общий центр тяжести достиг бы той же высоты, с которой он упал при общем движении. Если мы обозначим через ω угловую скорость в тот момент, когда маятник проходит через свое положение равновесия, то частица m, находящаяся на расстоянии r от оси, имеет в этот момент скорость ωr и может, следовательно, если она будет качаться дальше с этою же скоростью, достичь высоты $\frac{\omega^2 r^2}{2g}$ над тем положением, которое она занимает в этот момент.

Таким образом, если бы все частицы двигались вокруг оси независимо друг от друга, центр тяжести поднялся бы на высоту:

$$\frac{\sum \frac{\omega^2 m r^2}{2g}}{\sum m},$$

где через m обозначена масса, или, как говорит Гюйгенс, вес отдельных частиц. Эта высота должна равняться той, с которой центр тяжести упал при общем движении маятника, т. е. должна равняться $(1 - \cos\alpha)\cdot a$, где α — угол, образованный плоскостью, проходящей через ось и начальное положение центра тяжести, с вертикальною плоскостью, проходящей через ось, а a — расстояние центра тяжести от оси. Мы имеем таким образом:

$$(1 - \cos\alpha) a \Sigma m = \frac{\omega^2}{2g} \Sigma m r^2 .$$

Для соответствующего математического маятника длины l мы должны иметь:

$$1 - \cos\alpha = \frac{\omega^2}{2g} l,$$

отсюда [1]

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{a \Sigma m} .$$

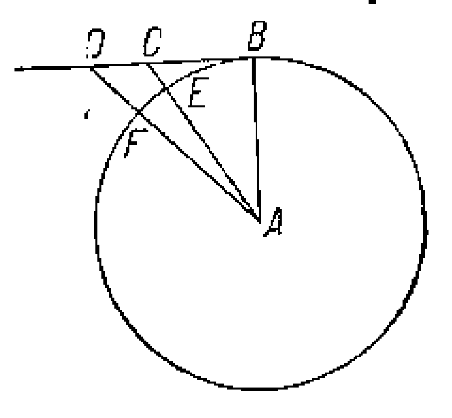
---

[1] В этом выводе предполагается, что два маятника (с различно распределенными массами) имеют один и тот же период, если при одном и том же угле отклонения они имеют одинаковую угловую скорость, проходя через положение равновесия.

Прим. ред.

Если все частицы лежат в одной и той же плоскости, проходящей через ось, то это выражение может быть написано в виде $l = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma mr}$. Это выражение, дающее правильный результат в данном частном случае, было еще раньше дано Декартом. Но Декарт ошибочно считал его общим результатом, за что подвергся нападкам со стороны Роберваля. Роберваль был, несомненно, знаком с правильным разрешением вопроса: в возникшей по этому поводу полемике он правильно указывает, что приведенная длина маятника, имеющего форму кругового сектора (с радиусом a, дугою l и хордою c), качающегося в своей плоскости около центра, равна $\frac{3ab}{4c}$.

Исследование Гюйгенса, изложенное нами для краткости очень свободно и в современных обозначениях, выдвигает новую задачу исчисления бесконечно малых, именно определение величины Σmr^2, получившей позднее название момента инерции. Принципы, примененные Гюйгенсом и Галилеем, содержатся, как легко видеть, в позднейшем лейбницевом принципе живых сил.



Черт. 13.

Подобные же рассуждения мы находим в учении Гюйгенса об ударе абсолютно упругих тел. Скорости до и после удара характеризуются посредством высот падения, которые были бы нужны для их возникновения. Две высоты, которых достиг бы центр тяжести системы, если бы тела были подняты до и после удара на высоты, соответствующие их скоростям, должны быть равны между собою. Из этого делается затем вывод, что сумма произведений масс (весов) на квадраты скоростей должна быть одинакова и до и после удара. В своих доказательствах Гюйгенс пользуется, между прочим, относительными движениями, выставляя предпосылку, что удар совершается одинаково как в том случае, когда пространство, в котором происходит движение, неподвижно, так и в том случае, когда оно движется.

В своем исследовании относительно центробежной силы Гюйгенс также пользуется сравнением с действием силы тяжести. Когда частица движется с равномерною скоростью по кругу, то (бесконечно малые) отрезки CE, DF (черт. 13), на которые движущаяся частица удаляется от касательной, по которой она в силу закона инерции должна была бы двигаться дальше, пропорциональны квадрату времени, как это имеет место и при падении. Таким образом ускоряющую силу, нужную для получения этих отклонений (а следовательно, и противоположную ей центробежную силу), можно измерять, как и силу тяжести, приращением скорости, отнесенным к единице времени.

2. Интегрирование до интегрального исчисления.

а) Кеплер. Как мы видели в предыдущей главе, архимедовы приемы определения центров тяжести и лежащие в их основе принципы, предвосхищающие методы интегрального исчисления, были настолько хорошо усвоены, что стало возможным самостоятельно получать новые результаты в этой области. Быстрому развитию таких исследований мешал, однако, пиетет в отношении к строгим доказательствам древних. Вне областей, рассматривавшихся древними, достичь подобной строгости было делом чрезвычайно трудным уже по одному тому, что точное проведение доказательств по методу древних возможно лишь тогда, когда самое предложение уже найдено и когда та область, из которой берется материал для доказательства, хорошо изучена. Успехи, имевшие действительно серьезное значение, были достигнуты только тогда, когда для завоевания новых областей было применено более легкое, хотя и менее отточенное, оружие и когда были приобретены необходимые для победы навыки в обращении с этим оружием. Эти навыки Кеплер приобрел в процессе своих вычислительных работ. Если они были в его руках средством для индуктивного вывода истинных законов движения планет, то, как мы увидим, они же служили ему для индуктивных расчетов величины интегралов, которые, правда, не всегда были столь же удачными; вероятно, именно в школе вычислительной практики он приобрел умение успешно пользоваться понятием бесконечно малой величины, хотя ничем, кроме самого названия, он и не пояснил этого столь трудного в логическом отношении понятия. Отбрасывание высших степеней малых величин в приближенных числовых выкладках практически научило его тому, какие величины можно отбрасывать и при точных инфинитезимальных расчетах. Во всяком случае в его работах, особенно астрономических, числовые и инфинитезимальные расчеты часто тесно связаны между собой.

В 1615 г. появилась в свет кеплерова „Стереометрия бочек“ („Stereometria doliorum“), главной целью которой является определение наиболее целесообразной формы винных бочек.

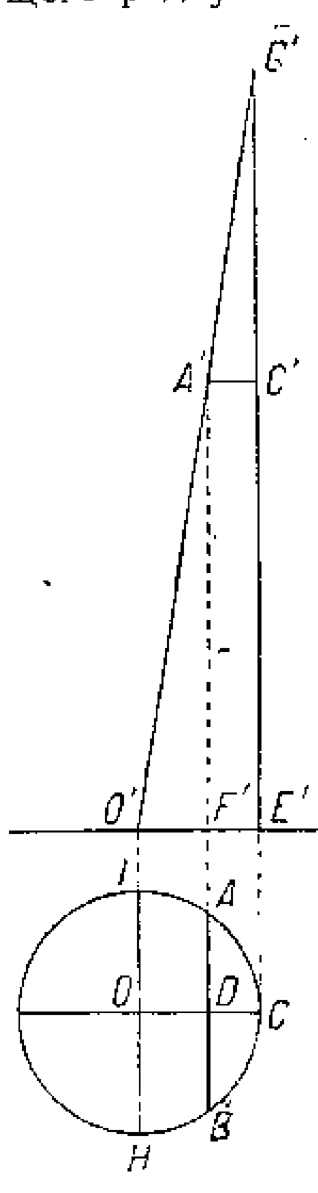
Вступительное теоретическое исследование перерастает, однако, рамки этого частного вопроса. Первая часть работы „Архимедова стереометрия“ („Stereometria Archimedea“) содержит изложение сочинения Архимеда о шаре и цилиндре. Уже здесь бросается в глаза, что Кеплер совершенно оставляет в стороне архимедово доказательство и, вместо того чтобы пользоваться способом исчерпывания, непосредственно вводит бесконечно малые величины. Так, он говорит, что шар „как бы“ (veluti) содержит бесконечно много конусов, вершины которых лежат в центре, а основания на поверхности шара, и находит, таким образом, его объем. Еще раньше определяет он тем же путем площадь круга, рассматривая его как сумму бесконечно большого числа бесконечно малых треугольников. Вообще из его

неоднократного „как бы" (veluti) видно, что он не стремится дать точное доказательство, а апеллирует только к наглядности. В других местах Кеплер отказывается от доказательств Архимеда и Паппа, называя их чрезвычайно глубокими, но трудными для понимания, и вместо них приводит рассуждения, которые устанавливают „вероятность" того или иного предложения из соображений индуктивного и интерполяционного характера. „Вероятно", что поверхность полушария равна удвоенной площади большого круга, так как боковая поверхность вписанного конуса вращения равна произведению площади большого круга на $\sqrt{2}$, а описанного — произведению площади большого круга на $2\sqrt{2}$; величину же лежащей между ними поверхности полушария естественно положить равной среднему пропорциональному между этими величинами.

Такая передача инфинитезимальных методов Архимеда очень далека от архимедовой строгости. Однако в следующей части своей работы, носящей название „Дополнение к Архимеду" („Supplementum ad Archimedem"), Кеплер показывает, что он умеет использовать ту легкость обозрения предмета, которую дает его краткий способ выражения, для получения новых правильных результатов. В этом дополнении он определяет объемы различных форм „желваков", т. е. тел, образуемых вращением круга около оси, не проходящей через его центр. Предварительно он доказывает, что объем усеченного круглого цилиндра зависит только от расстояния между центрами оснований и от величины кругового поперечного сечения. Затем он рассматривает тор; деля его с помощью меридианных плоскостей на бесконечно большое число усеченных цилиндров, он получает, что объем тора равен объему цилиндра, основанием которого служит вращающийся круг, а высота которого равна длине окружности, описываемой центром.

Еще смелее применяет Кеплер метод бесконечно малых при нахождении объема тела, образуемого вращением круглого сегмента около его хорды. Он называет это тело „яблоком" или „лимоном", смотря по тому, больше ли сегмент чем полукруг, или меньше. Он пользуется при этом предложением, для которого он не дает, правда, ни доказательства, ни даже вполне общей формулировки, но которое следует из таких инфинитезимальных соображений, которые он применял уже прежде. Предложение это заключается в следующем: тело, образованное вращением замкнутой плоской фигуры (F) около оси, лежащей в той же плоскости и не пересекающей фигуры, равновелико части прямого цилиндра с основанием F, отсекаемой плоскостью, которая проходит через ось вращения и образует с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 2π (на перпендикулярах к основанию эта плоскость отсекает отрезки, равные окружностям, радиусами которых служат расстояния перпендикуляров от оси). С помощью этого предложения Кеплер доказывает, что

лимон, образованный вращением кругового сегмента ABC (черт. 14) около хорды AB, равен разности между кольцом, образованным вращением сегмента ABC около диаметра HI, параллельного хорде AB, и цилиндром, у которого основанием служит сегмент ABC, а высота равна окружности круга, имеющего радиусом расстояние OD хорды от центра. Для того чтобы убедиться, что этот результат действительно является следствием вышеприведенного вспомогательного предложения, проще всего спроектировать как последнее тело, так и соответствующие телам вращения усеченные цилиндры на плоскость, перпендикулярную оси вращения HI. $O'G'$ есть проекция плоскости, проходящей через диаметр HI и образующей с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 2π. Упомянутое кольцо, образованное вращением сегмента ABC около диаметра HI, равновелико тогда усеченному цилиндру с основанием ABC, проектирующемуся по $F'E'G'A'$, а искомый лимон равновелик усеченному цилиндру, проектирующемуся в $A'C'G'$. Разность их есть прямой цилиндр, проектирующийся в $F'E'C'A'$.



Черт. 14.

Так как объем упомянутого кольца может быть вычислен как разность между объемами шара и тела, составленного из цилиндра вращения и двух шаровых сегментов, то, следовательно, задача решена. Подобным же образом находится и объем яблока.

Кеплер дает этому приему и обратное применение. Так как объем шара известен, то становится возможным и определение объема прямого усеченного цилиндра, имеющего основанием полукруг; сперва Кеплер находит его для рассматриваемого во вспомогательном предложении частного случая, когда плоскость сечения наклонена к основанию под углом с тангенсом 2π, но затем решает задачу и в общем виде, основываясь на том, что объемы цилиндров, усеченных различными проведенными через диаметр плоскостями, пропорциональны отрезкам, которые плоскости отсекают на образующей цилиндра.

В то время как выводы, сделанные Кеплером путем применения бесконечно малых, правильны, это не всегда имеет место для его заключений по „вероятности“. Так, он думает, что объем, образованный вращением половины кругового сегмента ADC (черт. 14) около полухорды AD (половина лимона), относится к объему, образованному вращением около отрезка CD (шаровой сегмент), как $CD : AD$. Он заключает это из того, что его предложение справедливо как в том случае, когда сегмент заменен полукругом, так и в том, когда дуга заменена хордою AC,



Кеплер
1571 — 1630
С гравированного портрета Гейдена

что ведет к уменьшению обоих тел вращения. Кеплер правильно отмечает, что последняя замена непосредственно указывает на справедливость предложения в предельном случае, когда дуга обращается в нуль. Он проверяет, наконец, результат непосредственным вычислением объема лимона, которое он выполняет указанным выше способом. Во взятом им случае отклонение от предложенного им закона слишком незначительно для того, чтобы оно могло сказаться на цифрах, имеющихся в его вычислении. При более точных вычислениях ошибка Кеплера должна была бы обнаружиться, и Гульден вскоре, действительно, обнаружил ее.

Цель работы Кеплера состояла в нахождении такой формы винных бочонков, чтобы они при возможно меньшей затрате материала имели возможно большую вместимость. Это должно было привести его к исследованиям относительно максимальных и минимальных значений. Результаты его в этой области мы разберем ниже, в главе, посвященной задачам, решаемым теперь помощью диференцирования.

Неудивительно, что со стороны ряда ученых, воспитанных на Архимеде, доказательства Кеплера, не говоря уже об его заключениях „по вероятности", встретили недоверчивый прием. Так, ученик Виета Андерсон выступил против Кеплера в своем сочинении „Защита Архимеда" („Vindiciae Archimedis"). Были, однако, среди математиков и такие, которые ясно чувствовали плодотворность кеплерова способа трактовки вопросов, связанных с бесконечно малыми. К числу их принадлежал Бригг, работы которого в вычислительной области дали ему надлежащую подготовку. Некоторые результаты Кеплера Бригг проверил числовыми выкладками.

Инфинитезимальные исследования имеются и в астрономических работах Кеплера. Ему приходилось здесь иметь с ними дело в связи с различными гипотезами относительно движения планет, которые он выдвигал одну за другою, но от которых затем нередко отказывался из-за их несогласия с наблюдениями. Прибегает он к исследованиям такого рода и для подтверждения правильности тех законов, на которых он окончательно остановился.

Чтобы получить представление о том, как Кеплер вводит величины, представляемые теперь с помощью определенных интегралов, мы можем познакомиться, например, с тем, как сформулирован им закон о пропорциональности между площадями, описываемыми радиусами-векторами ($FM = r$, черт. 5 на стр. 175), и соответственными промежутками времени. Кеплер говорит, что при движении планеты по ее эллиптической орбите с Солнцем в фокусе F время, употребляемое планетою для перемещения от конца большой оси C до любого положения M, относится к времени полного оборота, как „сумма радиусов-векторов", проведенных из фокуса F в точки дуги CM, к „сумме радиусов-векторов" всего эллипса.

Смысл этого утверждения, как следует из контекста в этом и других местах, тот, что указанное отношение есть предельное, к которому приближается отношение обеих соответствующих сумм, когда число точек на дуге CM и на всем эллипсе увеличивается до бесконечности. Но и это предельное значение остается неопределенным, пока неизвестен закон распределения точек.

Так, если бы между точками должны были лежать равновеликие дуги (Δs) эллипса, то предельное значение равнялось бы отношению значений интеграла rds, распространенного, с одной стороны, на дугу CM, с другой — на весь эллипс. Здесь, однако, на равные части должна быть разделена не дуга CM и не соответствующая истинная аномалия CFM, а эксцентрическая аномалия CON, или центральный угол, соответствующий дуге CN круга, построенного на большой оси эллипса как на диаметре (N — точка окружности, проекция которой на большую ось совпадает с проекцией на ту же ось точки M эллипса). Если мы обозначим эту эксцентрическую аномалию через ψ, то промежутки времени должны относиться как значения интеграла $\int rd\psi$.

Мы уже видели выше (стр. 176), что Кеплер для установления эллиптической формы орбиты пользуется тем обстоятельством, что радиус-вектор эллипса FM равен расстоянию FP фокуса от касательной к кругу, проведенной в точке N. Произведение FP на элемент дуги круга $ad\psi$ (a — величина большой полуоси) есть двойной элемент площади секторовидной фигуры CFN, ограниченной дугою круга CN и прямыми, соединяющими ее концы с фокусом F. Кеплер пользовался этим уже раньше, когда он пытался объяснить движение как эксцентрическое круговое. Он знал, таким образом, что его утверждение об отношении времен сводится к тому, что это отношение равно отношению площадей сектора CFN и целого круга, а от Архимеда он знал, что это отношение, в свою очередь, равно отношению площадей эллиптического сектора CFM и всего эллипса.

Легко видеть, что кеплерова формулировка в высшей степени удобна для того, чтобы проверить закон площадей на полученном из наблюдений числовом материале. Конечно, Кеплер не может суммировать длины бесконечно большого числа радиусов, но он имеет возможность просуммировать ряд радиусов-векторов, соответствующих близким равноотстоящим значениям ψ, например углам ψ с целым числом градусов до любого угла ψ и до 360°, и определить отношения этих сумм. Вычисления показали, что при уменьшении разности между последовательными значениями ψ это отношение все более приближается к отношению соответствующих времен.

Закон площадей сводит определение положения планеты на ее орбите в данный момент к решению следующей задачи (так называемой проблемы Кеплера): из точки, лежащей на диаметре круга, провести прямую, которая вместе с отрезком диаметра

ограничивала бы сектор данной площади. В аналитической форме задача выражается трансцендентным уравнением:

$$\psi + e \sin \psi = kt$$

(e — эксцентриситет эллипса). Кеплер понимал, что трудность решения задачи коренится в том, что в уравнение входит как самая величина ψ, так и ее синус.

При ближайшем исследовании величин, которые мы обозначили здесь с помощью интегралов и словесное определение которых у Кеплера рассмотрели здесь, он употребляет также графическое изображение в прямоугольной системе координат, принимая независимую переменную за абсциссу и зависимую за ординату. Интегралы определяются тогда как площади, ограниченные осью абсцисс, кривою и двумя ординатами. Так, в рассмотренном здесь случае, где мы теперь написали бы соответствующий интеграл в виде:

$$\int_0^\psi ar\, d\psi = \int_0^\psi a(a + c\cos\psi)\, d\psi$$

(положив $FO = c$), длина дуги круга $CN = a\psi$ выбрана Кеплером за абсциссу, а $r = a + c\cos\psi$ за ординату.

Отношения между интегралами Кеплер вычисляет, таким образом, приближенно как отношения между суммами большого, но все же конечного числа значений зависимой переменной, соответствующих равноотстоящим значениям независимой переменной. Кеплер не только вывел из найденных таким образом результатов законы природы, но и дал пример получения на этом эмпирическом пути чисто математического результата. Он вычисляет в одном месте $\int_0^\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta$ с помощью суммирования значений $\sin\vartheta$, соответствующих значениям ϑ, содержащим целое число градусов. Интеграл получился бы умножением этой суммы на постоянную величину (длину дуги в 1° или $\frac{\pi}{180}$); отношение таких сумм представляет собой, следовательно, отношение соответствующих интегралов. Кеплер находит таким путем, что для значения $\vartheta = 90^\circ$ интеграл равен 1; для нескольких других значений ϑ он находит, что интеграл равен $1 - \cos\vartheta$. Отсюда он делает заключение, что и вообще, как бы мы теперь написали,

$$\int_0^\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 1 - \cos\vartheta.$$

Кеплер увидел впоследствии, что эмпирическое доказательство можно заменить точным геометрическим обоснованием; такое обоснование имеется уже у Архимеда в его определении поверхности шарового сегмента; оно дано там почти в той же форме, в какой Кеплер познакомился с ним у Паппа. Суть этого дока-

зательства заключается в том, что поверхность сегмента могла бы быть разделена на усеченные конические поверхности, из которых каждая в современных обозначениях равна:

$$2\pi r \sin\vartheta\, ds,$$

где r — радиус, ϑ — угол между радиусами, проведенными к соответствующему элементу поверхности и к полюсу сегмента, и, наконец, $s = r\vartheta$ — длина дуги от полюса сегмента до этого элемента. Элемент этот равен, таким образом,

$$2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Архимед преобразовывает это выражение в выражение для соответствующего элемента поверхности описанного цилиндра или в

$$2\pi r\, dh,$$

где dh — высота усеченного конуса. Таким образом вся поверхность сегмента равна:

$$2\pi rh \text{ или } 2\pi r^2 (1 - \cos\vartheta),$$

и

$$\int_0^\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 1 - \cos\vartheta.$$

Кеплер вычисляет тот же интеграл, но в совершенно иной задаче. Таким образом он видел единство метода бесконечно малых. Это единство отчетливо выражается на языке анализа, которым мы здесь пользуемся. Но Кеплер этим языком не владел, и мы должны оценить проявленную им проницательность.

Упомянем еще, что для приближенного значения длины эллипса Кеплер дает выражение $\pi(a+b)$, где a и b — длины полуосей. Это выражение образовано из выражения $2\pi a$ для длины окружности по аналогии с образованием выражения πab для площади эллипса из выражения πa^2 для площади круга. Кеплер, определенно указывающий на это выражение лишь как на приближенное, несомненно, знал, что оно может быть применяемо лишь в том случае, когда величины a и b близки между собою; судя по обычному его приему при попытках угадать „вероятный" вид некоторого выражения, он не мог не рассмотреть, кроме $b = a$, и второго предельного случая $b = 0$, для которого выражение $\pi(a+b)$ является совершенно непригодным.

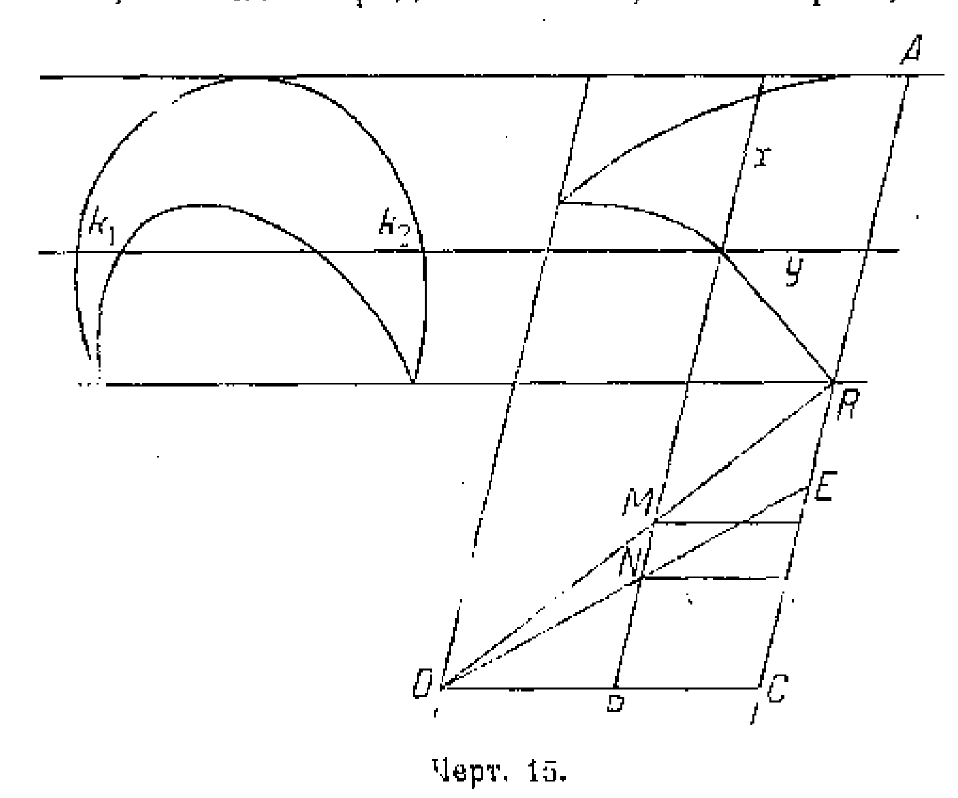
b) Кавальери, Торичелли и Григорий Сен-Винцент. У Кеплера интегрирование — мы вводим для краткости этот позднейший термин — встречается почти исключительно в применениях к таким исследованиям, где это интегрирование непосредственно необходимо. Это не мешало ему, конечно, видеть, что одно и то же интегрирование может быть применено в весьма разнообразных областях. Убедительный пример этого был нами только что приведен; проявляется это и тогда, когда, при определении объема тела вращения, Кеплер заменяет последнее усеченным цилиндром.

И все же, то обстоятельство, что Кавальери трактует интегрирование абстрактнее и делает его предметом особых исследований, результаты которых могут быть затем применены в самых разнообразных областях, знаменует собою существенный успех. Из переписки Кавальери с Галилеем можно заключить, что мысль об этом занимала не одного Кавальери, но и Галилей намеревался выпустить работу о „неделимых" величинах. Такая работа, однако, никогда не увидела света, и мы можем говорить поэтому лишь о работах Кавальери, имевших тем большее значение, что они получили широкое распространение и долгое время служили основным источником для ознакомления с новым учением. При изложении содержания этого учения мы будем пользоваться обеими работами Кавальери. Первая из них — „Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин" („Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota")—вышла впервые в 1635 г., а затем была переиздана в 1653 г. Вторая — „Шесть геометрических этюдов" („Exercitationes geometricae sex") — появилась в 1647 г. Она является ответом на очень резкую критику, которой Гульден подверг выдвинутые Кавальери понятия; поэтому здесь, по сравнению с первой работой, дается более четкое определение этих понятий.

В чисто геометрической форме, развивая метод, которым пользуется Кеплер для представления тех интегралов, с которыми он имеет дело, Кавальери устанавливает, однако, абстрактное и общее понятие, точно совпадающее с позднейшим аналитическим понятием определенного интеграла; это понятие является затем предметом общих исследований. Основное понятие, которым пользуется Кавальери, — это „сумма всех параллельных хорд в замкнутой площади", или, короче, „все" эти хорды. Он знает, что эта сумма бесконечна и что отношение между двумя такими суммами, вообще, неопределенно; но это отношение имеет определенный предел, когда обе площади заключены между одними и теми же двумя параллельными и когда параллельные хорды, сумма которых рассматривается, принадлежат одним и тем же прямым, параллельным этим пограничным прямым и находящимся на равном расстоянии друг от друга. Отношение становится тогда равным отношению между двумя площадями, внутри которых проведены хорды. Таким образом получается, например, что площади эллипса и круга, имеющих общую ось, относятся как вторая ось эллипса к их общей оси. Кавальери довольно часто выбирает за одну из фигур параллелограм, а хорды проводит параллельно одной из сторон его. Отношение сумм равно тогда отношению между площадью некоторой данной фигуры и площадью параллелограма и представляет собою взятую в соответствующих единицах площадь данной фигуры. Это отношение дает, таким образом, то же, что и определенный интеграл современной математики.

Даже после более точных разъяснений в „Шести упражнениях" данные Кавальери определения продолжали вызывать воз-

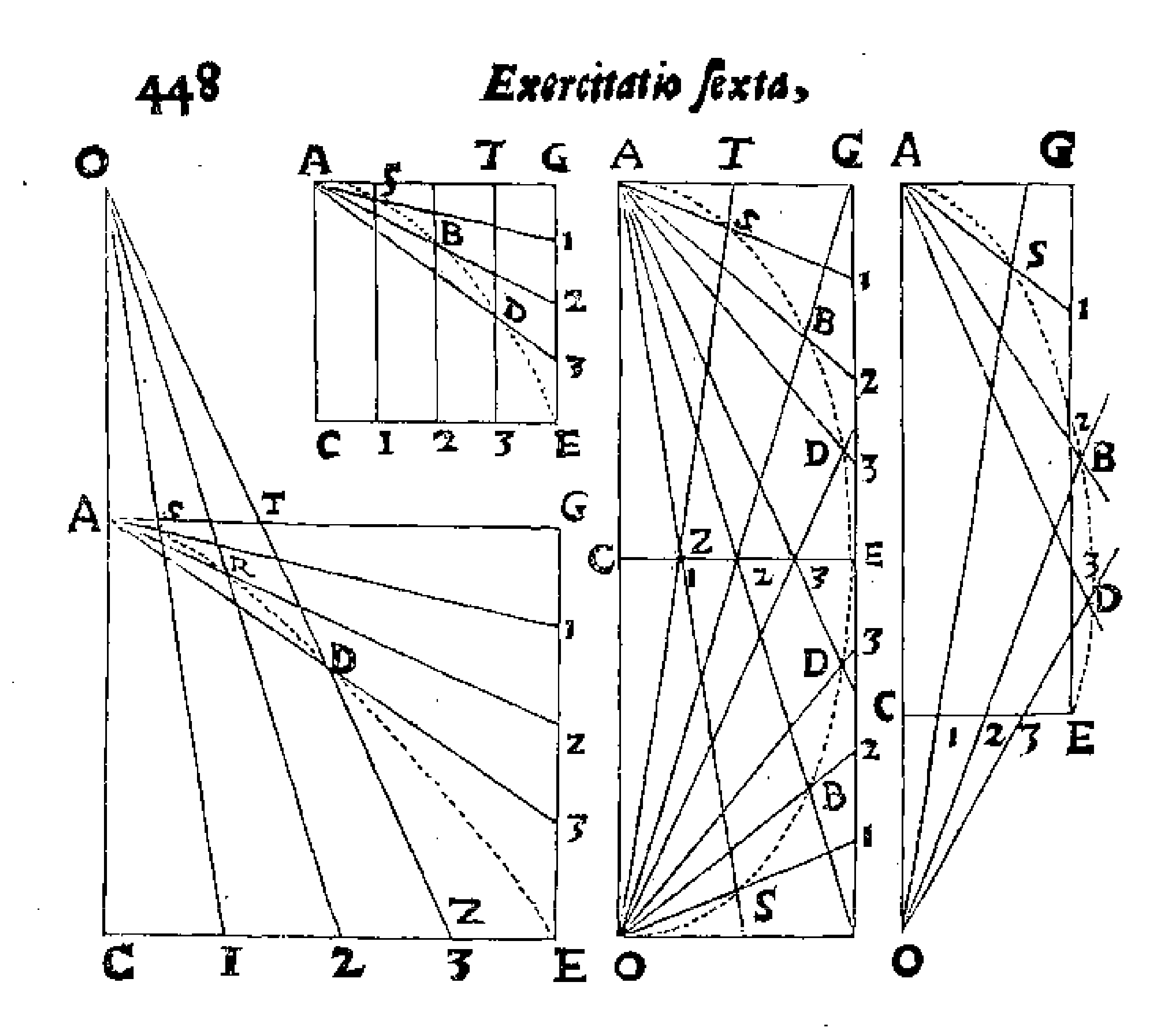
ражения. Роберваль и другие понимали его так, что, по его утверждению, сами площади должны представлять суммы бесконечно большого количества параллелей, словно бы величина двух измерений состояла из бесконечно большого числа величин одного измерения. Кавальери, правда, не говорит этого, но все же он сам дает повод к недоразумениям, так как, присваивая параллельным хордам название „неделимых", он дает основание считать, что эти хорды он рассматривает как бесконечно малые части площадей. В „Шести этюдах" содержится, правда, доказательство того, что суммы бесконечно большого числа хорд относятся как площади; но оно дано в довольно общих выражениях. Так, важное предположение, что хорды, число которых растет до бесконечности, должны повсюду иметь равные расстояния, содержится там лишь в скрытом виде.



Черт. 15.

Пока что, однако, столь общие рассуждения могли проводиться лишь в таких формах, какие дал Кавальери; формы доказательства, унаследованные от древних, применимы были лишь к отдельным частным предложениям.

Соответствие с определенным интегралом непосредственно имеет место только тогда, когда площадь ограничена столь простым образом, что она сама может быть выражена с помощью одного такого интеграла, а не составляется из нескольких. В случае, когда некоторые из параллельных пересекают контур более чем в двух точках, Кавальери преобразует фигуру в более простую. Если, например, контур отсекает на одной из параллелей несколько хорд k_1, k_2, ..., то он откладывает на ней от некоторой определенной прямой отрезок $y = k_1 + k_2 + \ldots$ Данная площадь преобразуется тогда в другую, ограниченную прямою и кривою линиями, причем последняя пересекает каждую из параллельных лишь в одной точке. Хорды, параллельные взятой нами прямой AR (на черт. 15 передвинутой одновременно в положение RC), можно подобным же образом передвинуть в положение PM. Положим $CR = a$, $CD = b$ и $PM = x$; x и y являются координатами точек кривой RD, ограничивающей вместе с осями CR и CD площадь, полученную в результате преобразования.



PROPOSITIO II.

Iiſdem ſuppoſitis Sectiones Conicas deſcribere.

SIt vertex, A, diameter, AC, latus tranſuerſum, AO, punctum in ſectione, E, tangenſq; ipſam in, A, nempè, AG, quæ cum, AC, efficiat quemcumque angulum, ſitque ipſa ſectio, AE, deſcribenda. Complebimus ergo parallelogrammum, ACEG, cuius latera ab, A, remotiora, nempè, CE, EG, in quotcumque partes æquales (vtrobique tamen eiuſdem numeri) vt ex. gr. in quatuor diuidemus, puncta diuiſionum notantes numeris 1.2.3.&c. à, C, G, verſus, E. Deinde in omnibus ſectionibus ducemus ab, A, ad puncta notata in, GE, occultas rectas lineas. Rurſus in parabola extendemus per puncta notata in, CE, indefinitas occultas parallelas ipſi, AC, ſed in reliquis ab, O, ad eadem puncta

Страница из «Этюдов» Кавальери: второе предложение шестого этюда.

Площадь эта равна, таким образом, в современных обозначениях, $s\int\limits_0^a y\,dx$ или $s\int\limits_0^b x\,dy$, причем множитель s, равный синусу угла между осями, в изложении Кавальери, где речь идет всегда лишь об отношении площадей (сумм хорд), не играет никакой роли.

Вышеприведенное преобразование применено Кавальери в его совершенно общем доказательстве того, что площади двух подобных плоских фигур относятся как квадраты двух соответствующих линий. Кавальери преобразует указанным образом обе подобные фигуры, после чего дело сводится к доказательству предложения для фигуры CRD и подобной ей фигуры $C_1R_1D_1$. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ будет точка второй фигуры, соответствующая точке $M(x, y)$ первой. Тогда:

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{RC}{R_1C_1}.$$

Для доказательства Кавальери строит вспомогательную фигуру, в которой точке $M(x, y)$ соответствует точка $N(x_1, y)$. Очевидно, что

$$\frac{CRD}{CED}=\frac{x}{x_1},$$

и так как точка (x_1, y) фигуры CDE соответствует точке (x_1, y_1) фигуры $C_1R_1D_1$, то

$$\frac{CED}{C_1R_1D_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{x}{x_1},$$

следовательно,

$$\frac{CRD}{C_1R_1D_1}=\left(\frac{x}{x_1}\right)^2.$$

Очевидно, что доказательство в нашем изложении с обычным теперь употреблением координатных обозначений проще, чем у самого Кавальери; он обозначает еще каждый отрезок двумя буквами и, вообще, ведет все операции геометрически. Но самый ход мыслей его передан нами без всяких изменений.

Кроме описанного здесь определения площадей, Кавальери производит подобное же определение объемов. Отношение между объемами двух тел представляется как отношение между суммами „всех" плоских сечений, которые на обоих телах образуются рядом параллельных плоскостей. В то время как число этих плоскостей растет до бесконечности, их бесконечно уменьшающиеся расстояния друг от друга должны все время оставаться равными между собою. Если любая из этих плоскостей дает в сечении с обоими телами площади, равные одна другой или находящиеся в данном постоянном отношении, то и объемы обоих тел соответственно либо равны либо имеют то же данное отношение. Предложение это, впервые высказанное Кавальери

во всей его общности (стр. 232), и поныне носит его имя. Пользуясь им Кавальери доказывает, что объемы двух подобных тел относятся как кубы соответствующих линий; доказательство это совершенно аналогично рассмотренному нами выше доказательству предложения об отношении площадей подобных плоских фигур.

Вообще при определении объемов Кавальери ограничивается большей частью такими случаями, в которых параллельные сечения тел подобны друг другу и, следовательно, относятся как квадраты хорд, отсекаемых параллельными плоскостями на некоторой плоской фигуре (параллельные круги в случае поверхности вращения). Вычисление сводится, таким образом, к вычислению отношений между суммами квадратов хорд, отсекаемых системой параллельных прямых на двух фигурах, лежащих в одной плоскости. Нахождение этого отношения соответствует вычислению отношения между двумя интегралами вида $\int_a^b y^2\,dx$ с одними и теми же пределами, где y есть функция переменной x, выражающая ординату через абсциссу. Это отношение вычисляется сперва в абстрактной форме, и затем результат получает частные применения. К последним принадлежит нахождение объемов, которые умел выполнять уже Архимед, и наряду с ними вычисление объемов многих тел вращения. Среди них есть такие, которые Кеплер вычислял путем разбиения их плоскостями, проходящими через ось вращения; Кавальери же пользуется сечениями, перпендикулярными к оси. Есть много таких, меридианные кривые которых составлены различным образом из конических сечений. Отметим, в частности, что Кавальери рассматривает и ту поверхность вращения второго порядка, которая ускользнула от внимания не только Архимеда, но даже Ферма (стр. 197),—эллиптический гиперболоид, который он называет гиперболическим тимпаном. Кавальери вычисляет объем, заключенный между таким гиперболоидом и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси.

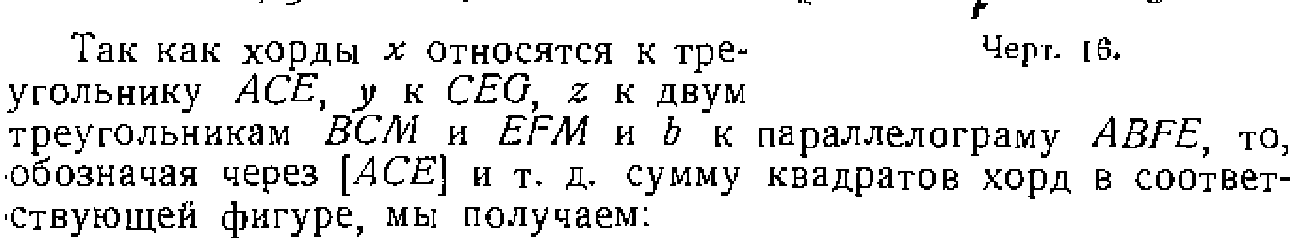
В первом своем сочинении Кавальери сводит эти вычисления к интегрированиям, которые фактически знал уже Архимед и которые в современной форме представляются интегралами $\int_0^a x\,dx$ и $\int_0^a x^2\,dx$ („Древние и средние века", стр. 126), а в тех случаях, когда приходится иметь дело с интегралом $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ — к квадратуре круга. Первый из этих трех интегралов, изображаемый площадью треугольника, применялся, как мы видели, также Галилеем при определении пути, проходимого при падении (стр. 237). Что касается до $\int_0^a x^2\,dx$, то Кавальери находит его, или, вернее, отношение его к a^3, следующим образом: он ищет (черт. 16) отношение между суммою квадратов „всех" (стр. 249) хорд (или

трансверсалей) RT, параллельных стороне AC, в треугольнике AEC и суммою квадратов „всех" хорд RV, отсекаемых на тех же прямых параллелограмом AG. Пусть будет FB прямая, делящая пополам все хорды RV параллелограма; если мы положим:

$$RT = x, \quad TV = y,$$
$$RS = b \left(= \frac{1}{2} a\right) \quad \text{и} \quad ST = z,$$

то

$$x = b + z, \quad y = b - z,$$
$$x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2.$$



Черт. 16.

Так как хорды x относятся к треугольнику ACE, y к CEG, z к двум треугольникам BCM и EFM и b к параллелограму $ABFE$, то, обозначая через $[ACE]$ и т. д. сумму квадратов хорд в соответствующей фигуре, мы получаем:

$$[ACE] + [GEC] = 2\,[ABFE] + 2\,[BCM] + 2\,[FEM].$$

Здесь, очевидно,

$$[ACE] = [GEC],$$

и так как суммы квадратов в подобных треугольниках относятся как кубы сходственных сторон, то

$$[BCM] = [FEM] = \frac{1}{8}[ACE].$$

Далее,

$$[ABFE] = \frac{1}{4}[ACGE].$$

Делая подстановку, получаем:

$$[ACE] = \frac{1}{3}[ACGE],$$

или

$$\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{3}a^3.$$

Впоследствии, при вычислении объема тела, образованного вращением параболического сегмента с хордою, перпендикулярной оси, вокруг этой хорды, Кавальери имел случай определить $\int_0^a x^4\,dx$ и увидел, что этот интеграл может быть вычислен тем же способом и что тот же метод можно применить, вообще, к вычислению интеграла $\int_0^a x^n\,dx$. Это вычисление и результат его $\frac{1}{n+1}a^{n+1}$ он приводит в своих „Шести этюдах", однако лишь

после того, как по поводу нескольких задач, предложенных им на эту тему, он получил сообщение об идущих еще дальше результатах, к которым уже тогда пришел Ферма. Эти результаты Ферма соответствуют современной формуле для определения интеграла $\int\limits_0^a x^{\frac{p}{q}}\,dx$.

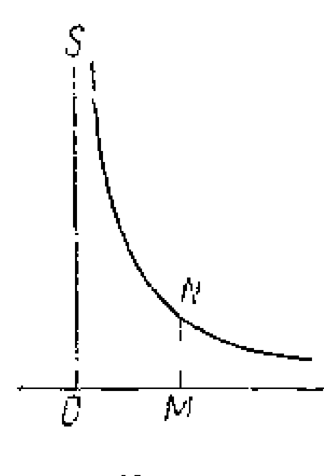
Покажем вкратце, что метод Кавальери действительно можно применить к нахождению интеграла $\int\limits_0^a x^n dx$; сам он выполняет это определение последовательно до $n=9$. При сохранении прежних обозначений имеем:

$$x^n + y^n = 2b^n + 2\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,b^{n-2}z^2 + \ldots + \begin{cases} 2z^n \\ 2n\cdot bz^{n-1}, \end{cases}$$

смотря по тому, четно или нечетно n. Если сложить теперь все значения x^n в треугольнике ACE и все значения y^n в треугольнике GEC, то получается выражение, члены которого содержат суммы величин z^r, в которых z принадлежат треугольникам BCM и FEM, и r не превышает n. Для $r<n$ эти суммы уже вычислены; сумма же величин z^n для каждого из указанных треугольников составляет $\frac{1}{2^{n+1}}$ искомой суммы величин x^n в треугольнике ACE.

Некоторые другие применения метода Кавальери мы разберем в п. е (стр. 281 и след.).

Торичелли, примыкая к Кавальери и, быть может, в еще более значительной степени к не увидевшим света исследованиям Галилея, также решал задачи, сводимые теперь к интегрированию. Так, в одной главе своих „Сочинений по геометрии" („Opera geometrica") он показывает нам 20 способов выполнения квадратуры параболического сегмента, некоторые из которых, однако (в том числе один, принадлежащий Архимеду), нельзя уподобить интегрированию. Другое исследование интересно тем, что в нем определяется объем тела, простирающегося в бесконечность, а именно, тела, ограниченного поверхностью, образованною вращением равносторонней гиперболы около одной из ее асимптот, цилиндром, образованным вращением около этой асимптоты параллельной ей прямой, и плоскостью, образованной вращением другой асимптоты (иными словами, тела, ограниченного поверхностью, образуемой на черт. 17 вращением $OMNS$ около OS). Торичелли находит этот объем пользуясь тем, что величина цилиндрической поверхности, образуемой вращением MN, не зависит от расстояния между MN и OS. Прием его ближе всего можно было бы срав-



Черт. 17.

нить с таким интегрированием: если уравнение гиперболы есть $xy=k$, то объем

$$\int_0^x 2\pi xy\,dx = \int_0^x 2\pi k\,dx = 2\pi kx.$$

В том же 1647 г., когда появились „Этюды" Кавальери, вышло сочинение, имевшее еще больший объем, чем оба сочинения Кавальери, и также содержавшее многие такие задачи, которые теперь решаются путем интегрирования. Это была „Геометрия" („Opus geometricum") — буквально „Геометрический труд" Григория Сен-Винцента. Доказательства в ней проводятся в соответствии с античными требованиями, однако мы не находим здесь ни той широты взглядов, ни той значительности результатов, как у Кавальери, хотя Григорий и старается разнообразить приложения общих принципов, которыми он пользуется.

К этим приложениям принадлежит его „перемножение площадей двух плоских фигур" („Ductus plani in planum") — буквально „умножение плоскости на плоскость". Суть этой операции проще всего передать с помощью обозначений аналитической геометрии, которых сам Григорий, однако, не употребляет. Примем линию пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей за ось x. Пусть в плоскостях этих лежат кривые $y=f(x)$ и $z=\varphi(x)$. Григорий рассматривает объем $\int_b^a yz\,dx$ тела, ограниченного координатными плоскостями, цилиндрическими поверхностями $y=f(x)$ и $z=\varphi(x)$ и плоскостями $x=a$ и $x=b$. Исследования его ограничиваются, однако, такими преобразованиями, которые получаются при замене yz равным ему произведением двух сомножителей. Если $yz=uv$, то

$$\int_a^b yz\,dx = \int_a^b uv\,dx,$$

результат, содержащийся в так называемом предложении Кавальери (стр. 252). Так, объем, заключенный между плоскостью xy, плоскостью zx и полуцилиндрами $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2}$ равен объему тетраэдра, ограниченного плоскостью xy, плоскостью xz и плоскостями $y=a-x$, $z=a+x$. Этот результат сам по себе интересен. Но примененный здесь прием представляет гораздо больший интерес с чисто геометрической точки зрения, чем с точки зрения развития интегрирования. Здесь, как и во многих других случаях, Григорий фактически задает пространственную кривую, служащую пересечением двух цилиндров, ее проекциями на две плоскости. Что же касается употребленного здесь стереометрического представления интеграла, то, как мы скоро увидим, Ферма и Паскаль, применяя его, получили результаты, имеющие большое значение для развития самих методов

интегрирования. Однако нет никаких оснований утверждать, что здесь было налицо влияние Григория.

Из дальнейшего содержания работы Григория отметим исследования его относительно цилиндров с непараллельными основаниями.

Наконец, в его труде впервые появляется предложение о равенстве площадей, ограниченных гиперболою, одною из ее асимптот и парами прямых, параллельных другой асимптоте и находящихся от нее на расстояниях, соответственно пропорциональных. О значении, которое это предложение имело в дальнейшем для развития интегрирования, и о применении его к вычислению логарифмов мы будем говорить ниже, — в частности, при рассмотрении интегрирований Ферма.

с) **Ферма, Паскаль и др.** Ферма, начавший заниматься теми же вопросами несколько позже Кавальери и независимо от него, во многих отношениях отличается от Кавальери. Различие между ними выражается уже в том внешнем обстоятельстве, что исследования Ферма известны только из небольших статей и писем, напечатанных лишь после его смерти, тогда как Кавальери написал большие сочинения. Вследствие этого работы Ферма не сделались источником, из которого позже почерпалось знакомство с теми методами интегрирования, которые предшествовали появлению интегрального исчисления. Однако части наиболее крупных современных Ферма математиков они все же были известны, так что нельзя сказать, чтобы они вовсе не оказали никакого влияния. Так, мы уже указывали, что Кавальери, приводя в „Шести этюдах" свое вычисление интегралов $\int_0^a x^n\,dx$, знал о совпадавших с ним результатах Ферма.

Отличие Ферма от Кавальери заключается, далее, в том, что Ферма, не чувствовавший ни в какой области математики потребности в новых формах, но умевший пользоваться уже существующими так, что они охватывали все его широкие и новые по существу исследования, не заботится, в противоположность Кавальери, о новом абстрактном и общем выражении своих предложений и доказательств. Благодаря этому он избегает опасностей, связанных с применением новых и непроверенных еще форм; всюду он ступает по неоспоримо твердой и надежной почве и умеет, как мы скоро увидим, извлекать существенные выгоды из традиционных способов рассуждения. То обстоятельство, что доказательство его проводится в применении к предложению, имеющему частный характер, по сути дела не уменьшает его общности: Ферма умеет выполнять доказательство для отдельного случая (например, для определенного числового значения показателя, который мог бы быть произвольным целым числом) таким образом, что вполне очевидна применимость этого доказательства и ко всякому другому случаю.

Мы отнюдь не хотим сказать этим, что Ферма всегда дает

Мы отнюдь не хотим сказать этим, что Ферма всегда дает своим утверждениям полные доказательства. Напротив, он часто выражается столь сжато, что мы узнаем только результат и, может быть, некоторые главные пункты обоснования; однако ясность и определенность его утверждений свидетельствуют о том, что он обладал материалом для полного доказательства; и в некоторых местах он, действительно, дает такое полностью проведенное доказательство методом исчерпывания.

Формой, в которой всего естественнее было представить интегрирование в связи с античным геометрическим изображением величин (в частности произведений), являлась квадратура. То, что мы называем $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, для Ферма было площадью, ограниченной осью абсцисс, кривою $y=f(x)$ и ординатами $x=a$ и $x=b$. К таким квадратурам Ферма и другие современные ему математики сводили вопросы, решаемые нами теперь с помощью соответствующего интегрирования; еще и теперь мы называем такое интегрирование квадратурой и говорим, например, о сведении диференциального уравнения к квадратурам. Вычисление интеграла $\int\limits_0^a x^n\,dx$ представляло для Ферма квадратуру „параболы" $y=x^n$ (мы опускаем здесь и в дальнейшем постоянный множитель 1-й степени, присоединяемый Ферма для геометрической однородности). Название „параболы" он распространял не только на кривые вида $y=x^n$, где n — целое число, но и на кривые вида $\frac{y^q}{x^p}=\text{const}$. Выполняя квадратуру последних, он получал то, что мы назвали бы теперь значением интегралов вида $\int x^n\,dx$ при дробном n. Далее, Ферма выполнял квадратуру „гипербол высшего порядка", т. е. кривых вида $x^p y^q=\text{const}$, и вычислял таким образом интегралы указанной формы для отрицательных значений n.

Из относящихся к 1636 г. писем Ферма к Робервалю явствует, что при более ранних своих квадратурах парабол, охватывающих только параболы вида $y=x^n$, где n — целое число, Ферма следовал тому же приему, с помощью которого Архимед вычислил $\int\limits_0^x x^n\,dx$ для $n=1$ и 2 („Древние и средние века", стр. 127). Когда Ферма сообщил, что обладает общим методом, и дал результат для $n=3$, Роберваль ответил ему, что сам он выполняет то же интегрирование с помощью неравенств:

$$1^n+2^n+\ldots+m^n>\frac{m^{n+1}}{n+1}>1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n,$$

и высказал предположение, что Ферма пользуется тем же методом. Ферма подтвердил это, но выразил сомнение в том, что Роберваль обладает общим доказательством этого предложения.

Письмо Ферма указывает, что вычисление сумм степеней стояло у него в связи с суммированием разностных рядов любого порядка (стр. 167).

Совершенно иным приемом Ферма получил впоследствии те же результаты для дробных и отрицательных значений n. Результат, относящийся к дробным степеням, Ферма сообщил Кавальери еще в 1644 г., самый же метод указан им лишь в сочинении о квадратурах („De aequationum localium transmutatione... in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus"), окончательно отредактированном после 1657 г.

Во введении к этой работе Ферма указывает на отличие своего метода от архимедова: в то время как Архимед (если не считать его так называемой геометрической квадратуры параболы, основанной не на интегрировании, а на суммировании бесконечного ряда) применяет арифметические ряды, Ферма пользуется геометрическими. Арифметические ряды получаются у Архимеда (а также у Кавальери и самого Ферма при его прежних квадратурах) при делении площади на бесконечно малые полоски равноотстоящими параллелями к оси ординат. Ферма же в разбираемой работе производит разделение при помощи параллелей к оси ординат, абсциссы которых образуют геометрический ряд.

Начнем с применения этого метода к определению интеграла $\int_0^x x^{\frac{p}{q}}\,dx$, где p и q положительны. У Ферма это представляется как квадратура параболы $x^p = y^q$. Он начинает с разделения площади, представляемой нашим интегралом, на полоски, ограничиваемые ординатами с абсциссами

$$x,\ \alpha x,\ \alpha^2 x, \ldots,$$

где $\alpha < 1$, так что абсциссы бесконечно уменьшаются до 0. Основаниями полосок служат разности (Δx) между абсциссами, т. е.

$$(1-\alpha)x,\ \alpha(1-\alpha)x,\ \alpha^2(1-\alpha)x, \ldots,$$

высотами полосок служат ординаты $y = x^{\frac{p}{q}}$, т. е.

$$x^{\frac{p}{q}},\ \alpha^{\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}},\ \alpha^{\frac{2p}{q}} x^{\frac{p}{q}}, \ldots$$

Если вместо полосок взять прямоугольники $y\Delta x$, то дело сводится к нахождению суммы бесконечного геометрического ряда:

$$(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}},\ (1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}},\ (1-\alpha)\alpha^{2\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}} \ldots$$

Она равна:

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} \cdot x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Искомый интеграл или искомая площадь есть предел, к которому стремится эта величина, когда все полоски становятся бесконечно узкими, т. е. при $\alpha = 1$. Чтобы найти этот предел, Ферма, следуя обыкновению древних, заменяет извлечение корня $\sqrt[q]{\alpha}$ определением $q-1$ средних пропорциональных. Если β есть первая из этих средних пропорциональных между 1 и α, то $\alpha = \beta^q$. Преобразование, выполняемое Ферма, совпадает, таким образом, с тем, которое мы получаем с помощью этой подстановки. Имеем:

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p+q-1})}.$$

Предельное значение при $\beta = 1$ равно $\frac{q}{p+q}$.

Чтобы получить соответствующую квадратуру гиперболы или площадь $\int\limits_x^\infty \frac{dx}{x^m}$, Ферма делит ее ординатами с абсциссами

$$x,\ \alpha x,\ \alpha^2 x$$

на полоски, причем теперь $\alpha > 1$. Прямоугольники $\frac{\Delta x}{x^m}$ образуют тогда геометрический ряд, первый член которого есть $\frac{\alpha-1}{x^{m-1}}$, а знаменатель $\frac{1}{\alpha^{m-1}}$. Сумма для $m > 1$ равна:

$$\frac{\alpha^{m-1}}{x^{m-1}} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha^{m-1}-1}.$$

Отсюда предельное значение для $\alpha = 1$, как в том случае, когда m есть целое число, так и в том, когда m — дробь, равно $\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}}$, что получается тем же способом, как при квадратуре парабол. Чтобы показать простоту хода мыслей Ферма и общий характер как самого доказательства, так и результата, мы пользовались здесь современной символикой, вплоть до дробных показателей, и вели рассуждение для общего случая; сам Ферма излагает все с помощью чертежа и связанных с ним обозначений и прием свой он применяет лишь к гиперболе $y = \frac{a^3}{x^2}$ и параболам $y^2 = ax$ и $y^3 = ax^2$. Однако он определенно указывает, что это лишь примеры, доказывающие правильность его общих результатов. Мы видим, что применяемое Ферма представление интеграла $\int y\,dx$ имеет перед представлением, применяемым Кавальери, то преимущество, что становящиеся бесконечно малыми сомножители (Δx или dx) в явном виде входят в вычисления. Поэтому они не должны быть, как у Кавальери, вовсе не вводящего их в вычисления, обязательно равными. Это, как мы скоро увидим, облегчает замену переменных. Позже

мы увидим, что Лейбниц долгое время не мог справиться с этой задачей именно потому, что придерживался способа представления Кавальерп.

Указанный Ферма способ получения квадратуры гиперболы $y=\frac{a}{x^m}$ непосредственно применим только тогда, когда $m>1$. При $m<1$ квадратура гиперболы находится с помощью перемены роли осей. Относительно случая $m=1$ (простой гиперболы) Ферма замечает, что все полоски становятся тогда равновеликими. На это указал уже в 1647 г. Григорий Сен-Винцент. Вероятно, однако, что Ферма скорее испытал здесь влияние другого автора, именно Непера, и что рассмотренный нами метод получения квадратур парабол и гипербол был найден именно под этим влиянием. Действительно, сам Ферма называет этот метод своим логарифмическим методом; это, несомненно, должно служить указанием на аналогию между геометрическим рядом его абсцисс и применяемым Непером геометрическим рядом чисел, логарифмы которых определяются им с помощью равномерно движущейся точки (стр. 135). Ферма, вероятно, дал этому неперову определению, которое мы могли бы выразить теперь с помощью диференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{r},$$

геометрическую форму (приняв величину y за абсциссу, $\frac{r}{y}$ за ординату) и увидел отсюда, что логарифмы представляются геометрически площадями, ограниченными гиперболой [1]. Затем, он мог получить квадратуру остальных „гипербол" простым перенесением на них того же приема. Отсюда прием этот мог быть перенесен и на нахождение квадратуры парабол (которая рассматривается у Ферма лишь после соответствующего исследования гипербол).

Читателя не должно удивлять, что Ферма не говорит прямо, что площади, ограниченные дугою гиперболы, одною из асимптот и двумя параллелями к другой, представляют собой лога-

---

[1] Если через x обозначить площадь кривой, а через y абсциссу ее точки, то уравнение $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{r}$ или $\frac{dx}{dy}=-\frac{r}{y}$ выражает, что ордината кривой $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ по абсолютной величине равна $\frac{r}{y}$, т. е. обратно пропорциональна абсциссе, так что кривая является гиперболой. С другой стороны, величина x является, по Неперу (стр. 135), логарифмом величины y, а основным свойством логарифма является как раз то, что он растет в арифметической прогрессии, когда число растет в геометрической прогрессии. Таким образом получается, что площадь гиперболы растет в арифметической прогрессии, когда абсцисса одного конца ее дуги (при неизменной абсциссе другого конца) растет в геометрической прогрессии. Отсюда, по гипотезе Цейтена, Ферма и приведен был к мысли о целесообразности использовать для выполнения квадратуры не арифметический, а геометрический ряд абсцисс. Эта гипотеза представляется очень правдоподобной.

Прим. ред.

рифмы (или пропорциональны логарифмам). Такое указание было бы несвойственным тому времени, так как логарифмы были тогда чем-то новым, а гипербола вещью старой и хорошо знакомой, и площади, ограниченные гиперболою, независимо от того, существовали или нет средства для их числового определения, естественно, рассматривались в геометрической форме, дававшей надежное основание для общих исследований. Из общей связи, правда, ясно видно, что, имея таблицы логарифмов, можно было бы пользоваться ими и для нахождения, в случае надобности, площадей гиперболы; мы увидим, однако, что, наоборот, такими площадями пользовались для изображения, исследования и вычисления логарифмов.

Нахождение квадратуры других кривых, бывшее для Ферма тем, что мы назвали бы интегрированием новых функций, состояло для него в сведении, — помощью тех или иных преобразований, — этих новых квадратур к квадратурам прямолинейных фигур, парабол, гипербол (включая сюда простую гиперболу) и кругов. Сведение к квадратуре простой гиперболы соответствует, как мы только что видели, теперешнему сведению интеграла к логарифмическим функциям, а сведение к квадратуре круга или частей его — сведению интеграла к круговым функциям. Числовые значения последних можно было брать из тригонометрических таблиц.

Из преобразований, ведших к этой цели, Ферма знал, прежде всего, те, которые соответствуют почленному интегрированию многочлена; их применял уже Архимед при нахождении квадратуры гиперболоида. Наряду с этим Ферма пользовался приемом, который представляет с нашей теперешней точки зрения некоторую комбинацию методов подстановки и интегрирования по частям.

Интегрирование по частям или, по крайней мере, достигаемое с помощью его преобразование интеграла осуществляется путем перемены ролей обеих переменных. Геометрическое изложение Ферма как раз позволяет осуществить такую перемену, хотя ему и недостает средств полностью использовать ее. Предположим, что кривая дана уравнением $y=\varphi(x)$, что эта кривая пересекает ось абсцисс в точке с абсциссою a, а ось ординат в точке с ординатою b, и что на пути от последней из этих точек к первой y с увеличением x уменьшается. Площадь, лежащую между осями и кривой, можно выразить двояко, что дает:

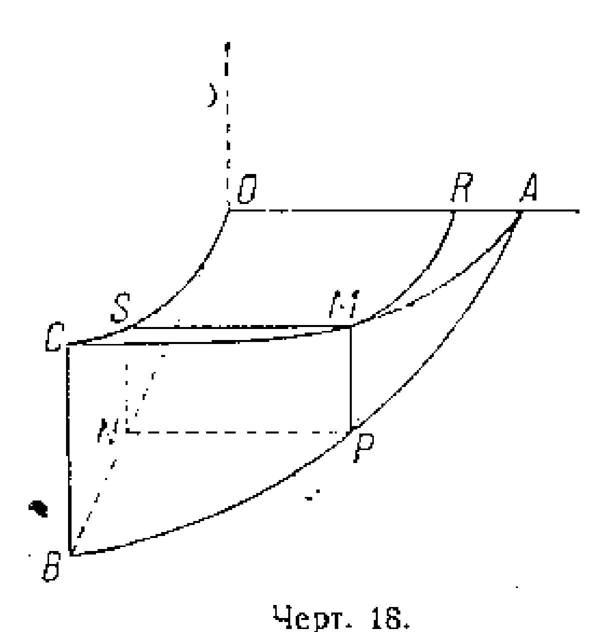
$$\int_0^a y\,dx=\int_0^b x\,dy.$$

Для того чтобы извлечь из этой замены то, что дает интегрирование по частям, надо было уметь диференцировать функцию $y=\varphi(x)$ и догадаться произвести эту операцию внутри интеграла. Ферма, как мы увидим, раньше, чем кто-либо другой, выполнял диференцирования; однако связь между ними и интегрированием не была еще для него ясна в такой степени, чтобы

он мог сделать из нее нужное здесь применение. Ему приходится поэтому ограничить свое интегрирование по частям тем случаем, в котором он может получить результат, получаемый нами диференцированием $\varphi(x)$, другим путем. Вследствие этого его интегрирование по частям ограничено случаем, который в современной форме представляется в следующем виде:

$$\int_0^a y^n dx = n\int_0^b y^{n-1}x\,dy.$$

Это соотношение, которое у Ферма принимает форму зависимости между площадями различных кривых, Ферма применяет к совершенно произвольным значениям n, хотя доказательство ее приводится лишь для $n=1$ и $n=2$. В этих случаях его доказательство содержится в доказательстве, данном Паскалем для более общего преобразования; надо думать, что тем же доказательством Ферма пользовался и при других значениях n. Мы приведем здесь поэтому общее предложение Паскаля и его доказательство, которое он дает в своем сочинении „Трактат о прямоугольных трилинейниках и их вырезках“[1] („Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets“, 1659).



Черт. 18.

На языке более позднего интегрального исчисления паскалево предложение о квадратурах можно выразить следующим образом: если $y=f(x)$, $z=\varphi(y)$ суть уравнения двух кривых, из которых первая соединяет указанным выше образом точки $(0, b)$ и $(a, 0)$, то

$$\int_0^b zx\,dy = \int_0^a\left(\int_0^y z\,dy\right)dx.$$

Доказательство Паскаля имеет стереометрический характер и вкратце может быть передано следующим образом: zx представляет собою площадь прямоугольника (черт. 18), образованного значениями z и x, соответствующими на каждой из обеих кри-

[1] Трудно найти подходящий русский термин для перевода французского слова „onglet“. Оно происходит от слова „ongle“ — ноготь и имеет очень много различных значений; например, зарубка на лезвии перочинного ножика называется „onglet“ (очевидно потому, что она захватывается ногтем). В геометрии термином „onglet“ называют часть тела, вырезаемую плоскостями, например этим термином обозначается тело, вырезываемое из тела вращения двумя проходящими через ось плоскостями. Из дальнейшего текста видно, в каком смысле слово „onglet“ употребляется Паскалем. Я перевожу здесь „onglet“ словом „вырезок“, не особенно хорошо звучащим по-русски, но, как мне кажется, наиболее подходящим в данном случае. *Прим. ред.*

вых одному и тому же значению y, или, если рассматривать x, y и z как прямоугольные координаты в пространстве, zx есть площадь прямоугольника, образованного координатами z и x точки M кривой AMC, по которой пересекаются две цилиндрические поверхности, имеющие своими проекциями на плоскости xy и zy наши кривые. Следовательно

$$\int_0^b zx\,dy$$

есть объем тела, ограниченного координатными плоскостями и обеими этими цилиндрическими поверхностями. Плоскость, соответствующая некоторому определенному значению x, даст в сечении с этим телом фигуру PRM, конгруэнтную NOS, площадь которой равна $\int_0^y z\,dy$. Отсюда следует, что объем нашего тела равен также $\int_0^a\left(\int_0^y z\,dy\right)dx$.

Григорий в своем „Умножении площади на площадь" (стр. 255) тоже посвятил рассмотренному сейчас телу ряд исследований, не имеющих, однако, большого значения. Когда цилиндр $z=\varphi(y)$ есть плоскость, проходящая через ось x, Паскаль называет тело „вырезком" (onglet).

Полагая $z=y^{n-1}$ и применяя уже известную квадратуру этой параболы, получаем формулу, которую, как было упомянуто, применял Ферма. Методы у него те же, но у Паскаля они имеют бо́льшую общность. Ничего неизвестно о том, кто из обоих ученых впервые применил этот метод, и сообщал ли о нем что-нибудь один другому.

Ферма показывает на ряде примеров, с какою свободою он может пользоваться своею формулою. То он дает ей синтетическое применение, чтобы из знакомых квадратур вывести новые, то аналитическое, чтобы свести квадратуру данной кривой к знакомым квадратурам. В обоих случаях вместо y^n или xy^{n-1} подставляются постепенно новые выражения того же вида, дающие возможность новых применений этого рода интегрирования по частям.

Так как Ферма хочет только доказать, что возможно выполнить квадратуру тех или иных кривых, то для него не интересно, какими именно ординатами ограничена площадь. Он выполняет поэтому фактически те операции, которые мы назвали бы теперь неопределенными интегрированиями.

В одном из примеров Ферма выполняет квадратуру кривой, получившей название декартова листа. Он исходит из того, что, если $y^3=\frac{a^5x-a^6}{x^3}$, то $\int y^3dx$ непосредственно получается с помощью квадратуры двух гипербол. Отсюда, путем его интегриро-

вания по частям, можно найти $\int y^2x\,dy$, или, полагая $y^2x = a^2t$, $\int t\,dy$. Уравнение между y и t, являющееся результатом исключения x, есть $t^3+y^3 = a\,ty$, т. е. уравнение декартова листа; последний из найденных интегралов и дает, следовательно, его квадратуру. Результат этот, вероятно, был получен аналитически, т. е. применением тех же преобразований в обратном порядке. Применение к кривой, некоторые свойства которой были уже тогда исследованы другими математиками, показывает, что Ферма умел прилагать этот метод не только к специально подобранным примерам.

О том же свидетельствует и применение метода к задаче, предложенной Ферма „одним ученым геометром". Эту задачу мы приведем как пример сведения квадратур к квадратуре круга, т. е. сведения интегралов к круговым функциям. Задача касалась квадратуры кривой $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$; в частности, речь шла об определении площади, ограниченной кривою, осью y и осью x, служащей асимптотой кривой. Для нахождения этой квадратуры Ферма производит следующий анализ. С помощью подстановки $z^2 = ay$ интеграл $\int y\,dx$ преобразовывается в $\frac{1}{a}\int z^2\,dx$. Последняя квадратура применением метода Ферма сводится к определению интеграла $\int xz\,dz$ или, полагая $xz = at$, к определению интеграла $\int t\,dz$. Исключая из данного уравнения и уравнений подстановок величины x и y, получаем уравнение окружности $t^2 = a^2 - z^2$; следовательно, $\int t\,dz$ будет представлять собою площадь, ограниченную дугой окружности. В упомянутом частном случае различные указанные здесь квадратуры в современных обозначениях выразятся так:

$$\int\limits_0^\infty \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty z^2\,dx = \frac{2}{a}\int xz\,dz = 2\int\limits_0^a t\,dz = \frac{\pi}{2}a^2.$$

Ферма применял свой метод также к выводу более общих результатов, например к последовательному выполнению интегрирования $\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$, где n — нечетное целое число. Его редукция, которую вследствие недостаточности его метода он должен был получить, не прибегая к диференцированию $(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}$, не вполне совпадает с той, которая применяется теперь к указанному интегралу или к по существу равнозначащему с ним $\int \sin^{n+1}x\,dx$. Ферма сперва показывает свой прием для случая $n = 3$. Если положить $a^2 - x^2 = y^2$, то с помощью его метода

и последовательных подстановок $xy = at$, $y^2 = ax$, интеграл $\int y^3\,dx$ последовательно сводится к $\int xy^2dy$; $\int ty\,dy$, $\int y^2\,dt$, $\int z\,dt$.

Так как исключение x и y дает уравнение $t^2 + z^2 = az$, то последний интеграл представляет собою круговую функцию и путем перенесения начала может быть приведен к указанному выше общему виду (причем теперь $n = 1$). Для больших нечетных значений n, как замечает Ферма, надо только повторить этот прием несколько раз. Тогда данный интеграл $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ выражается через несколько интегралов того же вида, в которых n заменено через $\frac{n-1}{2}$ и низшие значения.

Из других французских математиков, занимавшихся теми же исследованиями, мы уже назвали Роберваля и Паскаля. Оба они находились в близких сношениях с Ферма. Первый занимался одновременно с Ферма квадратурою парабол любого целого порядка и, кажется, пришел к полному обоснованию своих результатов только благодаря Ферма. Выполнял он, сверх того, различные частные случаи квадратур. О наиболее интересном из них — квадратуре циклоиды — мы будем говорить позже, в главе, посвященной сопоставлению многочисленных и разнообразных исследований, касающихся этой замечательной кривой. Из других квадратур Роберваля упомянем о квадратуре конхоиды, содержащей, между прочим, определение интеграла $\int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \operatorname{tg}\vartheta$.

Последнее основано на применении полярных координат к получению квадратуры прямоугольного треугольника с основанием a и высотою $a \operatorname{tg}\vartheta$. Площади бесконечно малых треугольников равны тогда (в современных обозначениях):

$$\frac{1}{2}\,\frac{a^2}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta.$$

Исследования Паскаля в области интегрирования находятся в его появившихся в 1659 г. „Письмах А. Деттонвилля о некоторых его геометрических открытиях" („Lettres de A. Dettonville sur quelques-unes de ses Inventions en Géométrie"). В них ставилась, между прочим, задача создания средств, необходимых для различных квадратур, кубатур и определения центров тяжести, связанных с циклоидою и образуемыми ею телами вращения; однако служащие для этого подготовительные работы проведены так систематически, что они знаменуют собою существенные успехи в самых методах интегрирования. Так, общее предложение, рассмотренное нами на стр. 262, раскрывает суть преобразования, достигаемого теперь интегрированием по частям, яснее, чем это было сделано у Ферма. У Ферма значение, которое имеет этот прием, выявляется благодаря тому, что именно этим приемом

ему удается получить крупные результаты. Задачи, которые решает Паскаль, правда, более просты, но зато ему удается установить раз навсегда результаты, достигаемые на каждом отдельном шагу, так что затем эти результаты он имеет в своем распоряжении; точно так же и другие, кому эти результаты могли бы понадобиться, имели бы возможность непосредственно их применить.

Интеграл у Паскаля выступает в форме, близкой к той, которой пользуется Кавальери. При этом, однако, у Паскаля мы находим более точный способ выражения.

Так, под суммой бесконечно большого количества ординат кривой он определенно понимает сумму площадей прямоугольников, образуемых ординатами, отсекающими на оси абсцисс равные бесконечно малые отрезки, и самими этими отрезками (т. е. то, что мы обозначаем теперь через $\int y\,dx$). Когда же он называет ординату кривой синусом ее дуги, он понимает под суммою бесконечно большого количества таких синусов сумму произведений ординат, отсекающих равные бесконечно малые дуги, на эту бесконечно малую дугу, т. е. теперешний $\int y\,ds$ или, если дуга есть дуга круга радиуса 1, $\int \sin\vartheta\,d\vartheta$. Там, где независимая переменная интегрирования не является, как здесь, „естественной", которую нет надобности указывать, Паскаль определенно отмечает, какая из величин играет эту роль, определенно говоря, какую величину надо разделить на бесконечно, точнее, на неопределенно (indéfiniment) большое количество *равных* частей. Убедиться в том, что мы получаем действительную величину искомой площади, объема или статического момента, мы можем, по словам Паскаля, путем доказательства того, что „разность становится меньше любой данной величины" („moindre qu'aucune donnée"); выражение это, употреблявшееся уже другими, обозначает по существу лишь то, что уже заключается в античном доказательстве методом исчерпывания.

Паскаль применяет несколько шире, чем Ферма, арифметические приемы к вычислению интегралов и установлению некоторых их свойств. Так, например, аналогично тому, как он поступает в учении об арифметическом треугольнике (стр. 167). Паскаль образует из сумм:

$$\sum_{1}^{n} y_r = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

где $y_1, y_2, \dots$ — значения y, соответствующие равноотстоящим значениям $x_1, x_2, \dots$ — аргумента x, треугольную сумму:

$$\sum_{1}^{n} y_r + \sum_{2}^{n} y_r + \dots + \sum_{n-1}^{n} y_r + y_n,$$



Паскаль

1623 — 1662

Факсимильная гравюра с современной гравюры Сент-Обэна

которая, очевидно, равна:

$$\sum_{1}^{n} r y_r.$$

Сумму таких треугольных сумм:

$$\sum_{1}^{n} r y_r + \sum_{2}^{n} (r-1) y_r + \ldots + \sum_{n-1}^{n} (r-n+2) y_r + y_n$$

Паскаль называет „пирамидальной суммой"; она, очевидно, равна:

$$\sum_{1}^{n} \frac{r(r+1)}{2} y_r.$$

Образуя каждую новую сумму, Паскаль умножает ее на постоянную разность последовательных значений аргумента и рассматривает бесконечно большое число значений аргумента, так что $x_1 = 0$ и $x_n = a$. Таким образом он не только получает интегралы вида $\int xy\,dx$ (из треугольных сумм) и $\int x^2 y\,dx$ (из удвоенных пирамидальных сумм), но одновременно арифметически доказывает предложения, которые на современном языке анализа представляются формулами:

$$\int_0^a dx \left(\int_x^a y\,dx \right) = \int_0^a xy\,dx, \tag{1a}$$

$$\int_0^a dx_1 \left(\int_{x_1}^a (x - x_1) y\,dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^a x^2 y\,dx. \tag{1b}$$

Первый из этих интегралов Паскаль применяет при нахождении центров тяжести для того, чтобы выразить сумму статических моментов элементов $y\,dx$ относительно оси y; тем обстоятельством, что эта сумма равна $\xi \int_0^a y\,dx$, где ξ — абсцисса центра тяжести, он пользуется для определения последнего.

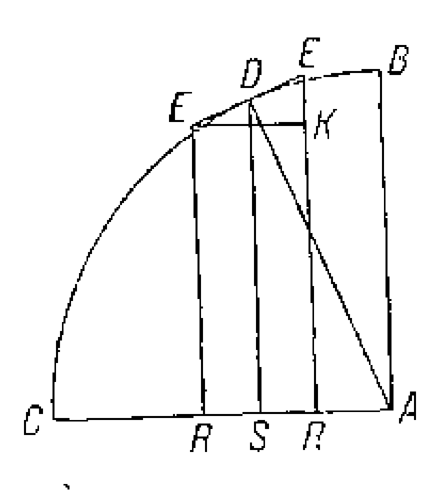
Результаты, выражаемые равенствами (1a) и (1b), мы отнесли бы теперь к интегрированию по частям. Общую формулу такого интегрирования, к которой Паскаль пришел стереометрическим путем, мы уже рассмотрели (стр. 262) в связи с применениями того же метода у Ферма. В частности Паскаль применяет и относящуюся сюда формулу:

$$\int_0^a y^n dx = n \int_0^b y^{n-1} x\,dy, \tag{2}$$

которой пользуется Ферма. Паскаль комбинирует применение этой формулы с преобразованиями, эквивалентными замене y на $y + c$. Приложения этой формулы разнообразятся также тем, что Пас-

каль за одну из переменных принимает дугу кривой, а за другую — соответствующую ей абсциссу.

В той же работе Паскаля мы находим очень интересную главу, посвященную интегрированию тригонометрических функций. Выводы этой главы опираются на следующее вспомогательное предложение: если (черт. 19) две произвольные точки *EE* касательной к окружности, проведенной через любую ее точку *D*, сделать вершинами прямоугольного треугольника *EKE*, катеты которого параллельны двум определенным взаимно перпендикулярным радиусам *AB* и *AC*, то прямоугольник, построенный на *EE* и на линии синуса угла *CAD*, т. е. на *DS*, равновелик прямоугольнику, построенному на радиусе *DA* и проекции *EE* на радиус *AC*, т. е. *RR*. С помощью применяемого здесь подобия треугольников *EKE* и *ASD* достигается, правда, только то, что Архимед при своем вычислении поверхности шара получает с помощью других подобных треугольников; правда также, что применимость этого подобия к определению величин, выражаемых теперь с помощью $\int \sin \vartheta \, d\vartheta$, была известна также Кеплеру, Гульдену и др. (стр. 247 и 234). Если мы, однако, указываем здесь место, которое Паскаль отводит этому предложению, и форму, которую он дает ему, то делаем это, с одной стороны, из-за дальнейших приложений, имеющихся у Паскаля, а с другой — из-за крупной исторической роли, которую сыграло это предложение. Паскаль тут же рассматривает случай, когда *RR* и *EE*, могущие, как было упомянуто, иметь произвольную величину, становятся бесконечно малыми, благодаря чему бесконечно малым становится и треугольник *EEK*. Этот бесконечно малый треугольник Паскаля, как впоследствии указывал сам Лейбниц, послужил образцом для так называемого лейбницева „характеристического треугольника". Последний образуется для любой кривой таким же образом, как паскалев треугольник для окружности; сторонами его, по введенным Лейбницем обозначениям, служат диференциалы dx, dy и ds. Подобием этого характеристического треугольника с треугольниками, сторонами которых служат подкасательная, ордината и касательная или ордината, поднормаль и нормаль, пользовались как для квадратур, так и для определения касательных и другие авторы, в частности Барроу и Ньютон; но лейбницева ссылка на Паскаля указывает нам на прямую историческую связь между их инфинитезимальными исследованиями.



Черт. 19.

В то время как Лейбниц так широко пользуется своим треугольником в задачах, принадлежащих диференциальному исчислению, Паскаль применяет свое предложение только к пре-

образованию сумм, которые в полном согласии с его точными пояснениями можно представить как интегралы. Если положить радиус круга равным 1, то предложение, приведенное выше, можно написать (если ввести еще знак минус) в виде $d\cos\vartheta = -\sin\vartheta\,d\vartheta$ или, меняя роли двух осей, к которым Паскаль попеременно относит свой синус, в виде $d\sin\vartheta = \cos\vartheta\,d\vartheta$. Результат этот непосредственно применяется не только к нахождению $\int\sin\vartheta\,d\vartheta$ или $\int\cos\vartheta\,d\vartheta$, но и, например, к преобразованию

$$\int\sin^n\vartheta\,d\vartheta = (-)\int\sin^{n-1}\vartheta\,d(\cos\vartheta).$$

Пользуясь этим преобразованием, Паскаль замечает, что в случае $n=2$ интеграл $\int\limits_0^\alpha\sin^2\vartheta\,d\vartheta$ представляет площадь половины кругового сегмента, соответствующего дуге 2α, т. е. равен $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$; точно так же при $n=3$ нахождение интеграла $\int\limits_0^\alpha\sin^3\vartheta\,d\vartheta$ он сводит к соответствующему вычислению объема шарового сегмента. Вычисление $\int\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta$ производится у Паскаля не непосредственно с помощью указанного преобразования, а в связи с некоторыми соображениями из области статики. Пусть каждый отдельный синус занимает на чертеже свое естественное место (как DS на черт. 19); в таком случае величина, выражающаяся через $\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta$, распределяется, как явствует из указанного в вспомогательном предложении преобразования отдельных членов суммы, на равные весовые части при таком делении дуги, при котором проекция ее на прямую AC делится на равные части. Следовательно, центр тяжести ее равноудален от обоих крайних синусов, и проекция его на ось находится от центра на расстоянии $\frac{1}{2}\cos\alpha$. Таким образом, применяя установленное Паскалем правило для определения центра тяжести, получаем:

$$\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta}{\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta},$$

что дает, так как знаменатель равен $\cos\alpha$,

$$\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\cos^2\alpha.$$

Результаты, соответствующие другим пределам, легко выводятся отсюда.

Из дальнейших результатов Паскаля отметим те, которые можно выразить равенствами:

$$\int_0^\alpha \cos(\alpha-\vartheta)\cdot\vartheta\, d\vartheta = \int_0^\alpha \sin(\alpha-\vartheta)\, d\vartheta = 1-\cos\alpha, \tag{3a}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha \cos(\alpha-\vartheta)\cdot\vartheta^2 d\vartheta = \int_0^\alpha [1-\cos(\alpha-\vartheta)]\, d\vartheta = \alpha-\sin\alpha. \tag{3b}$$

Формула (3а) получается непосредственно из общей формулы (1а) (стр. 267), если x, y и a заменить через ϑ, $\cos(\alpha-\vartheta)$ и α; формула (3b) получается из формулы (1b), если использовать результат формулы (3а).

Приведем еще результат, выражающийся формулой:

$$4\int_0^\alpha \cos^2(\alpha-\vartheta)\cdot\vartheta d\vartheta = \alpha^2-\sin^2\alpha.$$

С помощью своих правил преобразования Паскаль выводит отсюда новые интегралы, например,

$$\int \vartheta\, d(\cos\vartheta),\quad \int \vartheta^2 d(\cos\vartheta),\quad \int \vartheta^3 d(\cos\vartheta),$$

$$\int \vartheta\cos\vartheta\, d(\cos\vartheta),\quad \int \vartheta^2\cos\vartheta\, d(\cos\vartheta),\quad \int \vartheta\cos^2\vartheta\, d(\cos\vartheta)$$

и много других. Записывая в этих интегралах $\cos\vartheta$ как независимую переменную, мы хотим этим выразить, что это та переменная, которую Паскаль представляет себе разделенной на бесконечно большое количество равных частей.

Дальше он применяет различные свои методы к вычислению интегралов:

$$\int_x^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx,\quad \int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^3 dx,\quad \int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx.$$

Первый из этих интегралов он выводит, связывая с ним задачу о нахождении центра тяжести половины шарового сегмента, так как этот центр тяжести может быть найден и другим путем. Третий интеграл выводится из первого с помощью формулы (2).

В то время как три рассмотренных нами здесь французских математика находились в оживленных дружеских сношениях друг с другом, Декарт получил свои результаты в области интегрирования самостоятельно и, несомненно, без всякого влияния с их стороны. Результаты эти, связанные с нахождением площадей и центров тяжести, Декарт приводит в одном из своих писем, относящемся к 1638 г. (написанном, следовательно, задолго до выхода „Этюдов“ Кавальери). Так

как он не дает никаких пояснений относительно способа, которым они найдены, то мы должны ограничиться указанием на то, что все они могут быть сведены к интегралам вида $\int x^n dx$, где n — целое положительное число. Гюйгенс также самостоятельно нашел некоторые из квадратур, которые он применяет в различных исследованиях; но именно в силу связи их с отдельными приложениями они знаменуют не столько развитие методов интегрирования, сколько успехи в деле его применения; заслуги его в этой области мы разберем поэтому более подробно лишь в пункте е.

d) **Валлис.** Со времен классической древности до наших дней, для того чтобы выставить некоторое математическое предложение, считается необходимым обладать полным его доказательством. В древности требования этого рода простирались так далеко, что для полной уверенности в их выполнении были выработаны формальные требования, предъявлявшиеся к доказательству. В большинстве случаев в литературе, дошедшей до нас от древних, мы сталкиваемся с тем фактом, что автор заботится только о выполнении этих требований. Он не считает нужным указывать, каким образом были впервые найдены те или иные результаты, часто очень важные и всегда хорошо обоснованные. Возможно, поэтому, что математики того времени получали и другие результаты, от опубликования которых, однако, они воздерживались по той причине, что не могли дать доказательствам требуемую строгую форму. Лишь в виде исключения древние авторы сообщают предложение без доказательства. Писатели нового времени, напротив, часто позволяют себе эту вольность, когда их вызывает на нее пространность доказательства или другие причины. Сам автор должен, однако, обладать доказательством предложения, если речь идет не просто о более или менее обоснованной догадке.

Античные правила относительно доказательства были в XVII в. хорошо усвоены. Однако в эпохи, когда математические знания развиваются столь пышно, доказательство будет всегда тесно связано с догадками, основанными на неполной индукции и аналогии, и являющимися обычно, по крайней мере в голове автора, предвестниками положительных успехов. В XVII в. эти догадки и их результаты получили доступ и в литературу. Какие бы основания ни имел Ферма уверять, что он действительно обладал доказательствами многих утверждений, относящихся к теории чисел и предложенных им другим ученым, все же некоторые из его утверждений, как мы указывали, основывались на неполной индукции, в одном случае склонившей его даже к неправильному утверждению. Мы видели также, что в эпоху нового оживления инфинитезимальных исследований доказательства и форма изложения не могли поспевать за открытием новых результатов. Как мы видели (стр. 247), Кеплер первоначально построил одно из своих предложений, доказательство которого он лишь позже

нашел у Архимеда, на неполной индукции; как он, так и Кавальери излагают свои инфинитезимальные исследования в такой форме, которою современники их, принадлежавшие к ученикам греков, могли быть удовлетворены в еще меньшей мере, чем теперь мы; действительно, мы пользуемся теперь инфинитезимальными понятиями, но в более развитом и обоснованном виде, так что мы можем сами устранить недостатки способа выражения Кеплера и Кавальери. Но благодаря практике математики XVII в. овладели областью новых исследований в такой степени, что скоро стали в состоянии давать доказательствам своих утверждений совершенно точную форму, вполне соответствовавшую требованиям древних. Было бы, однако, слишком долго проводить доказательства таким образом для каждого из многочисленных новых предложений в отдельности. Пришлось поэтому ограничиться приведением доказательства лишь для некоторых отдельных предложений; этим намечалось, как нужно вести доказательство в остальных случаях. Так поступали Ферма и Паскаль.

Совершенную противоположность как таким доказательствам, так и полной индукции Паскаля (стр. 167) представляет метод рассуждения Валлиса. Валлис совершенно сознательно и систематически применяет неполную индукцию, т. е. такую индукцию, которая довольствуется демонстрированием правильности предложения для большого, но конечного числа случаев, хотя утверждается справедливость его для всех случаев; часто Валлис довольствуется простыми заключениями по аналогии. Необходимо, однако, тут же заметить, что результаты, получаемые Валлисом этими методами, обладают степенью достоверности гораздо большей, чем та, которой можно было бы ожидать, если бы такое же число рассматриваемых случаев было выбрано наудачу. Действительно, при рассмотрении отдельных случаев, приводимых Валлисом, напрашивается догадка, что и в остальных случаях положение дела не изменится и предложение останется справедливым, хотя эта догадка и не выражается в виде полного доказательства. О том, насколько тонко было развито в этом отношении чутье самого Валлиса, говорит справедливость наиболее существенных его результатов. Отдельным из них, которые в обычном значении слов являются неправильными, — например утверждению, что отрицательные величины больше бесконечных, — он сам, несомненно, придавал лишь формальное значение.

Валлис, хорошо знакомый как с древней, так и с современной ему литературой и обладавший, сверх того, точным логическим умом, видел логическое несовершенство своих приемов, конечно, в неменьшей степени, чем его современники. Он сам говорит, что он, быть может, поступил бы умнее, если бы, подобно древним (он, несомненно, имеет здесь в виду Архимеда, на что указывает и позже в другом месте), он просто выставил и доказал отдельные предложения, вместо того чтобы излагать весь свой метод. Конечно, он избежал бы тогда замечаний, которые

мы сделали по его адресу, но тогда он не мог бы в такой же мере, как он это сделал, подготовить почву для дальнейших успехов математики.

В то же время он, как мы сказали, ясно видел недостаточность тех путей, которые его приводили к открытию новых предложений и которыми, несомненно, шли и другие математики, проявлявшие только бо́льшую осторожность с опубликованием сообщений о них.

В своей „Арифметике бесконечных величин" („Arithmetica infinitorum") Валлис придает задаче ознакомления читателя с своими индуктивными путями открытий настолько самодовлеющее значение, что он применяет эти пути и к получению таких результатов, для которых тогда существовали уже полные доказательства; из доказательств этих те, которые имеются у Кавальери, были ему во всяком случае знакомы[1], а те, которые были сообщены широкому кругу математиков Робервалем и Ферма, тоже вряд ли были совершенно неизвестны. Вычисление $\frac{\int_0^x x^n dx}{x^{n+1}}$ представляет собою для Валлиса, как и для Кавальери, то же, что вычисление

$$\lim \frac{0^n + 1^n + 2^n + \ldots + m^n}{m^n + m^n + m^n + \ldots + m^n}$$

при неограниченном увеличении числа m, остающегося все время на 1 меньшим числа членов знаменателя. Для $n = 1$ Валлис, как и Архимед, основывает результат на суммировании разностной прогрессии. Для $n = 2$ и $n = 3$ он берет постепенно все большие значения m и показывает индуктивным способом, не пользуясь, как это делал Ферма, точным выражением суммы в числителе, что дробь равна $\frac{1}{n+1}$ плюс величина, которая при увеличении m становится меньше любой данной величины. Распространение предложения на большие значения показателя n производится затем путем подобной же индукции.

Валлисово распространение этого результата на дробные и отрицательные значения n особенно замечательно тем, что он провел его, не применяя в своих обозначениях дробных и отрицательных показателей. В основу им положен не только результат, уже полученный для целых положительных значений n и говорящий, что при $y = x^n$

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} xy,$$

---

[1] Следует заметить, что сам Валлис говорит в начале работы, о которой идет речь, что работ Кавальери он не читал, а знает о них из сообщения Торичелли.
Прим. ред.

но и другой результат, точно выводимый им из первого и могущий быть представленным формулой:

$$\int_0^y x\,dy = \int_0^y y^{\frac{1}{n}}\,dy = \frac{n}{n+1}\,y^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\,xy.$$

Действительно, два вышенаписанных интеграла представляют собою две площади, на которые парабола $y = x^n$ делит прямоугольник xy; вторую можно, таким образом, найти, вычитая первую из xy.

Валлис начинает с того, что располагает коэфициенты при xy в интегралах $\int y\,dx$, (где $y^q = x^p$), в виде таблицы, столбцы которой соответствуют значениям 0, 1, 2, 3, ... показателя p, а строки значениям 1, 2, 3,... показателя q. Таблица начинается так:

	0	1	2	3	4	... p ...
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	.
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$		
3	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	.		
4	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	.			
5	$\frac{5}{5}$	.				
:	.					
q						
:						

Первая строка и первые два столбца здесь известны; остальные элементы определяются затем по бросающемуся в глаза закону с помощью соответствующих вставок. Вставки эти Валлис называет интерполяциями; но основаны они, в сущности, только на заключениях по аналогии. Валлис определенно поясняет, как величина $\frac{q}{p+q}$ образуется из отношения $\frac{p}{q}$ показателей при x и y, т. е. из того, что мы называем теперь дробным показателем; он сам называет его индексом, не вводя его, однако, в обозначение степени.

При определении интеграла $\int_0^x \frac{x^m}{x^n}\,dx$ для $m \geqq n$ индекс есть $m-n$. Валлис распространяет это определение с помощью аналогии на случай $m<n$ и получает таким образом результат:

$$\int_0^x x^{-n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\,xy,$$

где $y = \frac{1}{x^n}$. Когда $n<1$, то этот интеграл, как он говорит, положителен и конечен, хотя соответствующая площадь простирается в бесконечность. Когда $n = 1$, т. е. при квадратуре обыкновенной гиперболы, площадь становится бесконечной; когда $n > 1$, она, очевидно, заключает в себе (при $x < 1$) обычную ги-

перболическую площадь, т. е. она больше ее. Верный применяемым в исследовании аналогиям, Валлис в согласии с этим утверждает, что отрицательная величина, которую представляет собой здесь интеграл, больше бесконечности. Этот результат, найденный на пути аналогии, не является, однако, лишенным значения, так как при помощи его конечная площадь $\int_a^b x^{-n}\,dx$ (где a и b положительны) может быть представлена как положительная разность между двумя отрицательными величинами.

Так как найденные здесь результаты были тогда уже все известны, хотя сам Валлис не все их знал, то примененные им в качестве доказательства аналогии легко могли быть выведены из действительно доказанных предложений. Более интересно поэтому рассмотреть, как он применяет подобный прием, чтобы найти что-нибудь новое, например его определение π. Он сводит вопрос к вычислению $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$, т. е. интеграла, представляющего площадь полукруга с диаметром 1 и равного поэтому $\frac{\pi}{8}$. Чтобы найти его, Валлис начинает с вычисления $\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx$, где n — целое положительное число. Он находит:

$$\int_0^1 (x-x^2)^0\,dx = 1,$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^1\,dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3},$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^2\,dx = \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5},$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^3\,dx = \frac{1}{4}-\frac{3}{5}+\frac{3}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{140}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5}\cdot\frac{9}{6\cdot 7}$$

и т. д. и заключает помощью своей обычной индукции, что вообще, когда n — целое положительное число,

$$\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

где через $n!$ мы обозначаем произведение $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$, или то, что Эйлер называет $\Gamma(n+1)$. Валлис правильно понимает, что $0!$ надо здесь считать равным 1; это явствует из первого из написанных интегралов, а также из употребляемого в дальнейшем способа образования. Так как задача состоит в вычислении интеграла

$$\int_0^1 (x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

то Валлис должен для определения его значения (т. е. $\frac{\pi}{8}$), зная величины $\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ для целых положительных n, найти при $n=\frac{1}{2}$ интерполированное значение:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)!}=\frac{\pi}{8},$$

или

$$\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}=\frac{4}{\pi}.$$

Этой величине $\frac{4}{\pi}$ Валлис дает особое обозначение □ (обозначение π принадлежит более позднему времени и впервые введено Эйлером).

Величины $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, между которыми надо произвести интерполяцию, являются биномиальными коэфициентами, а именно коэфициентами среднего члена, когда показатель равен $2n$. Более обширный материал для интерполяций можно получить, рассматривая все биномиальные коэфициенты, т. е. числа, записываемые теперь в виде $\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$. Эти числа имеются уже у Штифеля и Тартальи в их таблицах для разностных рядов различных порядков, а образование их путем умножения составляет основное содержание сочинения Паскаля об арифметическом треугольнике (стр. 167). Эти таблицы Валлис расширяет, вставляя между строками и столбцами с целыми положительными значениями p и q строки и столбцы, соответствующие значениям $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... и расширяет их даже в обратную сторону, добавляя строку $p=-\frac{1}{2}$ и столбец $q=-\frac{1}{2}$. Новые рубрики расширенной таблицы заполняются при этом постепенно числами, которые Валлис образует по законам, основанным на обобщении законов, содержащихся в первоначальной таблице.

Так как при целых и положительных p и q:

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!}=\frac{(p+q)\,(p+q-1)\ldots(p+1)}{q\,(q-1)\ldots2\cdot1},$$

то мы имеем уже здесь закон, который можно применить в случаях, в которых целым является только одно из двух чисел p и q. Таким образом Валлис смог заполнить все рубрики строк и столбцов таблицы, соответствующих целым значениям p или q, а следовательно, каждую вторую рубрику строк и столбцов, со-

ответствующих вставленным дробям с знаменателем 2. Так, в строке, соответствующей $p=\frac{1}{2}$, значениям

$$q=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

соответствуют числа:

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4},\quad \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6},\quad \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\ldots$$

Из примененного здесь способа образования явствует, что

$$\frac{(p+q+1)!}{p!\,(q+1)!}=\frac{p+q+1}{q+1}\cdot\frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

Результат этот справедлив не только для строк таблицы, соответствующих целым значениям p и составленных полностью, но, как мы видим из только что приведенных чисел, и для уже составленной части строки, соответствующей $p=\frac{1}{2}$. Валлис распространяет его также на члены этой строки, соответствующие дробным значениям q. Так как $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ дают искомую величину $\square$, то, следовательно, для

$$q=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ldots$$

получаем величины:

$$\frac{1}{2}\square,\ \square,\ \frac{4}{3}\square,\ \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\square,\ \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\square,\ldots$$

Члены эти занимают в строке, соответствующей $p=\frac{1}{2}$, места между членами, соответствующими целым значениям q.

Далее, Валлис пользуется тем обстоятельством, что отношение двух последовательных членов уменьшается, стремясь к пределу 1. То, что это имеет место в каждом из двух рядов на которые мы разделили строку, соответствующую $p=\frac{1}{2}$, сразу бросается в глаза, так как каждый член образуется из предшествующего умножением на число вида $\frac{n+1}{n}$. Валлис выводит заключение, что это тем более должно иметь место для полной строки. Если x, y, z, u — четыре последовательных члена этой строки, то сообразно с этим,

$$\frac{y}{x}>\frac{z}{y}>\frac{u}{z},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{z}{x}}>\frac{z}{y}>\sqrt{\frac{u}{y}}.$$

Приняв, например, здесь за x, y, z, u члены, соответствующие

$$q=\frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,$$

получим:

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{8}{7}}>\square>\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Если итти по строке дальше и дальше, то квадратные корни в обоих выражениях, между которыми заключается $\square$, оба стремятся к пределу 1. Таким образом бесконечное произведение

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ \ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\ldots}$$

стремится к пределу $\square$ или $\frac{4}{\pi}$.

Так как мы взяли здесь у Валлиса лишь то, что непосредственно относится к вычислению π, то мы изобразили с помощью интегралов только те значения $\frac{p!\,q!}{(p+q)!}$, которые соответствуют случаю $p=q$. Валлис между тем указал также интегралы, представляющие те же величины для других значений p и q. Именно, он нашел, что для всех целых и положительных значений p и q

$$\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{q}}\right)^p dx=\frac{p!\,q!}{(p+q)!}.$$

Развернув степень по формуле бинома, он смог выполнить это интегрирование почленно и, начав с малых значений p, он нашел результат с помощью своей обычной индукции. Только что составленная таблица содержит обратные величины этих интегралов. О том, что рубрика таблицы, соответствующая $p=q=\frac{1}{2}$, должна содержать значение $\frac{4}{\pi}$, можно было бы заключить также из того, что $\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{\pi}{4}$, и этот способ определения сразу привел бы величину $\frac{4}{\pi}$ в связь со всеми остальными членами, а не только, как у Валлиса, с теми, где $p=q$.

Примененный здесь Валлисом интеграл отличается только множителем от эйлеровой B-функции. Действительно, если положить $x=y^q$, то он переходит в

$$q\int_0^1(1-y)^p\,y^{q-1}\,dy,$$

а это есть не что иное, как $qB(p+1,\ q)$. Оба ученых, однако, совершенно различно пользуются тем обстоятельством, что при

целых p и q этот интеграл равен $\frac{p!q!}{(p+q)!}$, — выражению, которое само по себе имеет смысл только в этом случае. У Эйлера обобщенные величины определяются с помощью интегралов; Валлис же определяет их с помощью значений, соответствующих целым и положительным p и q; он предполагает, что связь, существующая между этими значениями, имеет место и при всевозможных действительных p и q, хотя, с точки зрения строгой логики, он не имеет права на такое заключение. Тем же путем, как $\frac{\pi}{4}$, он мог бы вычислить и другие значения эйлеровой функции $B(p, q)$, соответствующие действительным и рациональным значениям p и q. Его таблица содержит их в тех случаях, когда p и q имеют знаменатель 2.

Как хорошо Валлис умел пользоваться своим „арифметическим" методом, видно из того, что он тотчас же смог применить его, когда Гюйгенс предложил ему вычислить площадь, ограниченную циссоидою и ее асимптотою, центр тяжести ее и объем, образованный ее вращением около асимптоты; самим Гюйгенсом эти задачи уже были решены более точным путем с помощью применения полярных координат. В первой из этих задач дело идет о вычислении интеграла $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\,dx$. Валлис начинает с несколько более легкого вычисления $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$. Сначала он вычисляет $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^n\,dx$ для $n=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ и находит с помощью арифметических пре бразований результатов и обычной своей индукции, что

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{2n+3}{2n}\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^n\,dx.$$

Применяя эту формулу также к случаю $n=\frac{1}{2}$, он находит

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Площадь, которую ищет Валлис, может быть подобным же образом сведена к интегралу $\int_0^1 x\sqrt{x-x^2}\,dx$; интеграл этот представляет собою момент взятого здесь полукруга относительно касательной в конце диаметра и, следовательно, равен $\frac{\pi}{16}$.

Исходя из значений $\int_0^1 \sqrt{x^3}(1-x)^n dx$, вычисленных для $n = 0, 1, 2, 3, 4$, Валлис находит с помощью обыкновенной индукции, что

$$\int_0^1 \sqrt{x^3}(1-x)^{n-1} dx = \frac{2n+5}{2n} \int_0^1 \sqrt{x^3}(1-x)^n dx.$$

В применении к случаю $n = \frac{1}{2}$ это дает, что

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\, dx = \frac{3}{8}\pi,$$

или что искомая площадь в 3 раза больше площади взятого при построении циссоиды круга.

Понятно, что Гюйгенс предпочитает старые методы доказательства и что Валлис должен признать неполноту своего доказательства, особенно в отношении перехода к иррациональным величинам; однако и Гюйгенс удивляется тому, сколь многого можно достичь методом Валлиса. В ту пору такие приемы были действительно нужны. В методах интегрирования, указанных Паскалем и Ферма, особенно в их интегрировании по частям, а также в менее известных методах, принадлежащих Гюйгенсу, можно было найти средства для точного доказательства рекуррентных формул, полученных Валлисом путем смелой индукции и заключений по аналогии; однако точные методы были тогда еще слишком тяжеловесным орудием, и простые рекогносцировки, подобные тем, которые предпринимал Валлис, должны были играть весьма крупную роль при исследовании истин, о более обстоятельном обосновании которых можно было подумать лишь позже.

Но и для дальнейшего развития математики работы Валлиса имели большое значение, и в математике XVIII в. сильно сказывается их влияние. Влияние это проявляется не только в том, что математики XVIII в. подражают его недостоверным способам заключения. Как раз это подражание далеко не всегда было похвальным, так как в XVIII в. не только алгебраическая символика была более развита, чем во времена Валлиса, но и операции с бесконечно-малыми и учение о функциях были уже приведены в систему, обладавшую собственной символикой. Когда математики XVIII в. заметили все преимущества этой системы и этого языка, то они почувствовали такое доверие к ним, что смело стали применять те же операции в областях, где справедливость их еще не была доказана; так, например, правила алгебраических действий с конечным числом действительных величин стали применять как к мнимым величинам, так и к бесконечным рядам, не заботясь даже о сходимости последних. Нечто подобное, как указывалось выше (стр. 215), встречается

у Валлиса при его алгебраической трактовке иррациональных величин; но при исследованиях, касавшихся бесконечно-малых, положение вещей было иным уже по той причине, что здесь система или символика во время Валлиса не были еще разработаны. Мы применяли, правда, при рассмотрении исследований Валлиса как степени с дробными и отрицательными показателями, так и обозначение факториала $n!$, причем говорили о замене n дробными и отрицательными числами; сам Валлис, однако, еще не знал таких обозначений. Его обобщения поэтому не только являются более смелыми, но и имеют гораздо большее значение, чем те, которые в XVIII в. имели исходным пунктом уже развитую математическую систему с соответствующей символикой. Ведя к результатам, правильность которых уже тогда могла быть проверена другими путями (например, правильность выражения для π могла быть подтверждена числовыми подсчетами), валлисовы обобщения указывали пути дальнейшего развития математической символики. Именно, они выясняли, что символически выраженные операции не должны терять своего значения и тогда, когда соответствующим величинам придается более широкий смысл, чем первоначально. Осуществление этих требований произошло, таким образом, не без влияния Валлиса. В частности, он вполне подготовил почву для расширения понятия степени, которое вскоре было выполнено Ньютоном, введшим дробные и отрицательные показатели, и которое позволило установить надлежащую связь между степенью и логарифмом. Ньютоново расширение формулы бинома, как указывает сам Ньютон, связано с исследованиями Валлиса, хотя сам Ньютон никогда не рассматривал заключений по аналогии как доказательства. Как мы уже упоминали, Валлис является также предшественником Эйлера в его расширении понятия факториала. Вообще, мысль о том, что всякую вводимую в математику величину, даже такую, которая по своему первоначальному определению может быть лишь целым положительным числом, можно с помощью расширения понятия заменить непрерывно изменяющеюся величиною, восходит к Валлису. Подготовленные им расширения понятий напоминают те, которые Декарт осуществил в алгебре.

e) **Применение интегрирования; спрямление;** приведенные длины маятников. Как мы видели из предыдущего, на первых порах операция, которую мы называли интегрированием, так как она ведет к тому же, что и последнее, была связана с частными ее применениями. Сперва отыскивались площади, объемы, центры тяжести; старания найти их совпадали, по существу, со стремлением найти интегралы, выражающие на языке современной математики решения поставленных задач. При этом нельзя было не заметить совпадения, существовавшего между решениями различных задач, которые мы теперь сводим к одному интегралу, и не увидеть, что все эти задачи можно было решить сразу, преодолев только одну общую для всех трудность. Таким образом появи-

лось, правда, в несколько ином виде, понятие, соответствующее нашему понятию интеграла. Понятие это можно было установить, связывая его с каким-либо одним определенным применением; всего естественнее было — в согласии с унаследованным от древних изображением произведений в виде прямоугольников — представлять то, что мы называем интегралом $\int_a^b y\,dx$, как площадь, ограниченную осью абсцисс, ординатами $x=a$ и $x=b$ и самою кривою, изображающею изменение ординаты. Ферма весьма последовательно представляет интегралы в этой геометрической форме. Но можно представить тот же процесс и в арифметической форме, рассматривая интеграл как сумму бесконечно большого числа бесконечно малых величин, или, другими словами, как предел, к которому сумма, могущая быть вычисленной в случае конечного числа членов, стремится при бесконечном возрастании этого числа. Такое представление мы находим уже у Кеплера; оно же, хотя и в полугеометрической форме, положено Кавальери в основу его рассуждений; наконец, у Паскаля оно выступает в столь определенном виде, что, можно сказать, почти вполне совпадает с нашим понятием определенного интеграла.

Необходимым следствием установления абстрактного понятия интеграла явилась возможность применять раз вычисленные интегралы к разнообразным величинам, определяемым с помощью этих интегралов. Во многих случаях этим обстоятельством пользовались также, идя обратным путем. А именно, когда некоторые приложения интеграла касались области, в которой можно было применить особенно простые соображения, то сперва прибегали к ним, чтобы решить частные задачи, относившиеся к этой области; таким образом определялся тогда и служащий для решения этой задачи интеграл. Мы видели, например, как Паскаль и Валлис применяли соображения из области статики, чтобы сперва найти центр тяжести, а затем с его помощью и соответствующий интеграл; подобным же образом поступал и Гюйгенс. Это тот же путь, который был избран еще Архимедом при его первом вычислении площади параболического сегмента („Древние и средние века", стр. 125).

Мы уже имели дело с примерами такого применения интегрирования, которое непосредственно соответствует абстрактному способу представления интеграла. Именно, мы встречались неоднократно с вычислением площадей таких фигур, форма которых допускает удобное разбиение их на полосы параллельными прямыми; мы встречались с вычислением объемов тел, допускающих удобное разбиение на слои параллельными плоскостями; точно так же мы имели дело с определением центра тяжести таких тел и фигур. Предложение о моментах, с помощью которого определение центров тяжести сводится к интегрированию, имеется, как мы видели (стр. 234), уже у Гульдена. Кавальери так хорошо владел этим способом вычисления, что применял

его даже к телам, удельный вес которых меняется по некоторому простому закону. Очень ясно выступает этот способ у Паскаля. Это, однако, нисколько не мешало, как мы увидим в дальнейшем, еще Ферма при определении некоторых центров тяжести применять совсем другое средство. Здесь мы рассмотрим постепенно развивавшиеся приемы, при помощи которых к интегрированию сводился ряд других задач. Часто это достигалось тем, что задача сводилась к квадратуре кривой, заданной в прямоугольных координатах. Предварительно мы хотим, однако, отметить, что отыскание пригодных для этого способов разбиения представляло далеко не столь большие трудности, как само интегрирование. Это явствует из обилия геометрических форм, которые применялись при проведении вычислений, соответствующих нашему интегрированию. Так, мы уже встречали ряд различных разбиений тел вращения, объем которых отыскивался: у Кеплера (стр. 243) и после него у Гульдена (стр. 235)—на секторы, образованные плоскостями, проходящими через ось, у Кавальери (стр. 252)—на слои, ограниченные плоскостями, перпендикулярными к оси, у Торичелли (стр. 254)—на имеющие общую ось цилиндрические трубки.

Начнем с рассмотрения квадратур кривых, заданных в полярных координатах. В этом пункте надо было только следовать за Архимедом, который („Древние и средние века", стр. 128) во вступлении к своему сочинению о спиралях фактически рассматривает интегралы $\int_0^x x\,dx$ и $\int_0^x x^2\,dx$, чтобы воспользоваться последним интегралом, позже получившим у него также другие применения, для квадратуры спиралей. Когда математики XVII в. вернулись к этому, то для них было естественно обнаружить и выразить в геометрической форме соответствие между спиралями и параболами, квадратуры которых определяются помощью тех же интегралов. Это было сделано даже двумя различными способами. Одним из них, как мы уже говорили (стр. 197), Григорий воспользовался также для перенесения чисто геометрических свойств спирали на параболу и обратно. К определению площадей его применил еще раньше Кавальери. В этом способе применяется разбиение концентрическими окружностями площади, ограниченной: 1) полярной осью, 2) дугой спирали и 3) дугой окружности, имеющей центр в полюсе и проходящей через конец дуги спирали. Если совершить преобразование, выражаемое формулами:

$$r = x; \qquad r\vartheta = y,$$

то спираль обращается в параболу, и вышеназванная фигура, площадь которой представляется интегралом $\int_0^a r\vartheta\,dr$, преобразуется в параболическую фигуру, площадь которой сохраняет прежнюю величину и представляется теперь интегралом $\int_0^a y\,dx$.

В другом способе, которым пользуются французские математики, применяется разбиение радиусами-векторами площади, ограниченной дугой спирали и радиусом-вектором, проведенным к ее концу. Между архимедовой спиралью

$$\frac{r}{a}=\frac{\vartheta}{2\pi}$$

и параболой устанавливается соответствие уравнениями:

$$y=r, \qquad x=\frac{r\vartheta}{2}.$$

Оно дает для параболы уравнение:

$$\frac{x}{\pi a}=\left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

Принимая во внимание свойство архимедовой спирали, выраженное нами ее уравнениями, легко видеть, что двойная площадь секториального элемента спирали $r^2 d\vartheta$ представляется в новых переменных выражением $y dx$, т. е. равна элементу параболической площади. Эта связь была обобщена Ферма, который применил ее к спирали

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m=\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^n$$

и параболе

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{m+n}=\left(\frac{x}{\frac{m}{m+n}2\pi a}\right)^n.$$

Переход совершается здесь при помощи уравнений:

$$y=r, \quad \left(\frac{(m+n)x}{m\cdot 2\pi a}\right)^m=\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^{m+n}.$$

Как и в вышерассмотренном частном случае, мы получаем результат, который можно записать в современной форме так:

$$\int r^2 d\vartheta=\int y\,dx.$$

Точно так же выражение длины дуги (мы вскоре будем говорить о спрямлении дуг) $\int\sqrt{dr^2+r^2 d\vartheta^2}$ преобразуется в $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$, т. е. при этом преобразовании сохраняется длина дуги кривой. Эти результаты Ферма дает без доказательства.

Пример такого одновременного выполнения одного и того же интегрирования в различных формах мы находим уже в переписке Ферма, относящейся к тому периоду, когда он впервые нашел квадратуры любой параболы целочисленного порядка (стр. 257). В то время предметом внимания была так называемая галилеева спираль $r=a-k\vartheta^2$, которая представляла бы собой кажущуюся траекторию тела, свободно падающего на экваторе, если бы это тело в начале падения не обладало на-

чальной скоростью, сообщенной ему вращением Земли. Ферма искал квадратуру этой кривой и одновременно кубатуру тела, которое он впоследствии часто рассматривает, называя его: „мой коноид", и которое образуется вращением сегмента параболы вокруг ограничивающей его хорды, перпендикулярной к оси. Уравнение этой параболы, отнесенной к хорде и к оси как к координатным осям, есть $y = a - kx^2$. Вычисление площади $\frac{1}{2}\int r^2 d\vartheta$ и объема $\pi\int y^2 dx$ сводится, таким образом, к одной и той же квадратуре, которая требует только знания квадратур парабол до $\int x^4 dx$.

Как только что было указано, установленное французскими математиками соответствие между спиралями и параболами было использовано для определения длин дуг этих кривых. Более ранняя попытка получить спрямление других дуг, помимо дуги окружности, также была связана с представлением кривой ее уравнением в полярной системе координат. Попытка эта принадлежит Гульдену, который, однако, в начале отнюдь не имел в ней успеха. Именно, он пришел к результату, что длина архимедовой спирали от полюса до точки (ϑ, r) равна $\frac{1}{2} r\vartheta$ или длине дуги окружности с тем же центральным углом и радиусом $\frac{1}{2} r$. Этому неправильному результату Гульден, в противоположность Кеплеру и Кавальери, которых он обвиняет в недостатке точности, дает полное доказательство в традиционных формах. Неправильной в этом доказательстве является одна из делаемых в нем предпосылок, утверждающая, что дуга спирали Δs между точками (ϑ, r) и $(\vartheta + \Delta\vartheta, r + \Delta r)$ меньше дуги окружности $(r + \Delta r)\Delta\vartheta$ с тем же центральным углом и радиусом, равным радиусу-вектору, проведенному в конечную точку дуги. Это утверждение, в связи с правильным утверждением, что $\Delta s > r\Delta\vartheta$, привело его к вычислению дуги s, эквивалентному определению величины интеграла $\int r d\vartheta$. Когда ему было указано, что его предложение неверно, он смог сам опровергнуть его, вписав в дугу спирали, идущую от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = 2\pi$, двенадцатиугольник и вычислив, что его периметр больше полуокружности с радиусом, равным радиусу-вектору, соответствующему значению $\vartheta = 2\pi$. При доказательстве этого он пользовался неравенством $\Delta s > \sqrt{\Delta r^2 + r^2 \Delta\vartheta^2}$. В связи с этим он получил приближенное значение для длины дуги спирали, которое мы могли бы выразить формулой $\sum \sqrt{\Delta r^2 + r^2 \Delta\vartheta^2}$. Равным образом формула $\sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ дала ему приближенное значение длины дуги конических сечений.

Способ, которым Гульден вскрыл ошибочность своего предложения, показывает нам, что в то время сведение ректификации кривых к квадратурам или другим употребительным тогда формам интегрирования не представляло значительных трудно-

стей. Успехи должны были состоять в получении на этом пути новых результатов. Если такой результат достигался, то точное проведение доказательства хотя и могло быть громоздким и утомительным, но при знакомстве с сильно развитой техникой доказательств методом исчерпывания не представляло никаких серьезных затруднений. Необходимые при этом границы, между которыми должна была быть заключена длина дуги, находились различными способами, как мы покажем ниже на нескольких примерах. Во многих случаях довольствовались, однако, тем, что без такой точной постановки вопроса рассматривали длину дуги кривой как предел длины либо вписанной либо описанной ломаной.

Наиболее ранним и известным результатом в этой области (не считая, конечно, измерения дуги окружности), является принадлежащее Торичелли спрямление логарифмической спирали. Торичелли называл эту спираль геометрической; он знал ее квадратуру и свойство ее пересекать все радиусы-векторы под постоянным углом. Он упоминает об этих результатах в ненапечатанном еще сообщении о своих научных сношениях с французскими математиками; логарифмическая спираль была предметом их обсуждения в 1640 г., когда, как мы увидим ниже, Декарт также начал заниматься этой замечательной кривой. Упомянутое сообщение указывает на некоторое знакомство ее автора с зависимостью между длинами парабол и спиралей — вопросом, который впоследствии исследовали французские математики.

Среди последних надо назвать Роберваля, нашедшего в 1643 г., что соответствующие друг другу длины дуг архимедовой спирали и параболы, связанных друг с другом упомянутыми уже соотношениями $y = r$, $x = \frac{1}{2} r\vartheta$, равны между собою. Паскаль дал в 1658 г. этому предложению полное доказательство, в котором он пользуется вписанными ломаными как нижними границами дуг обеих кривых. За верхнюю границу дуги параболы он берет ломаную линию, составленную из отрезков касательных и диаметров, лежащих между кривою и этими касательными. Как верхнюю границу дуги спирали он рассматривает описанную около кривой линию, составленную из отрезков касательных и дуг окружностей, центр которых лежит в полюсе кривой.

Полученные результаты были обобщены Ферма, установившим равенство соответствующих друг другу дуг других спиралей и парабол, о взаимной связи между которыми мы уже говорили. В то же время он установил различные соотношения не только между длинами некоторых кривых, но и между некоторыми длинами дуг и площадями. Упомянем, например, об изображении длины дуги параболы $y^2 = 2px$ с помощью площади, ограниченной гиперболою $x^2 = y^2 + p^2$, осью ординат и двумя параллелями к оси абсцисс. В переводе на современные обозна-

чения полученный результат состоит в том, что длина дуги параболы s, считая от вершины, равна:

$$\frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{y^2+p^2}\,dy.$$

Результат этот отнюдь не являлся лишенным значения, так как, как мы видели, сведение к площади гиперболы обозначало нечто подобное тому, что для нас выражение с помощью логарифмических и алгебраических функций. В связи с этим Ферма установил соотношения между длинами дуг ряда кривых, из которых первая — обыкновенная парабола, а каждая следующая образована из предыдущей таким образом, что любая ордината ее равна длине дуги предыдущей, соответствующей той же абсциссе.

Указанное спрямление простой параболы было найдено не одним только Ферма. Прежде чем оно было опубликовано (в виде дополнения к одной работе), оно уже было сообщено Гюйгенсом в письмах к ряду математиков; при этом обнаружилось, что как эта ректификация, так и некоторые обобщения ее были найдены также астрономом Озу (Ausout).

Примеры эти показывают, что Ферма в то время вполне умел сводить ректификацию к квадратурам. Если бы ему попалась такая кривая, спрямление которой сводилось бы к знакомой ему *алгебраической* квадратуре, то он тотчас бы смог выполнить это спрямление и найти алгебраическое выражение для длины дуги. Однако такой случай не встречался ни ему, ни другим. Так как дуга окружности также не может быть выражена алгебраически, то возникло мнение, что длины дуг, вообще, не выражаются алгебраически. Как раз это мнение свидетельствует, между прочим, о том, что вопрос о ректификации интересовал не только названных здесь ученых: Декарт на стр. 32[1] своей „Геометрии" высказывает предположение, что мы, люди, не можем найти соотношения между прямыми и кривыми; в связи с предыдущим это обозначает, что соотношение это не может быть выражено алгебраически. Такому мнению не нанесло существенного удара и то обстоятельство, что Врену удалось спрямить циклоиду, а Ферма тотчас же дал доказательство этого и несколько предложений о ректификации других трансцендентных кривых. Из этого был сделан только тот вывод, что алгебраическая ректификация невозможна для алгебраических кривых.

При таких обстоятельствах нахождение первой алгебраически ректифицируемой алгебраической кривой было крупным событием. Такой кривой оказалась полукубическая парабола $ay^2 = x^3$. Алгебраическую ректификацию ее открыли независимо друг от друга три математика — Нейль (ректификация которого была получена раньше, чем вренова ректификация циклоиды, хотя стала известна лишь позже ее), Гейрат (Heuraet) и Ферма. Ферма нашел ее последним; о том, как ее открытие обрадовало

[1] Франц. изд. 1886 г. (A. Hermann).

его, можно судить по тому, что он в виде исключения дал для нее полное доказательство методом исчерпывания; доказательство это, между прочим, является образцом того, как он мог доказать и многие другие свои результаты в области инфинитезимальных исследований. Границами, между которыми Ферма заключает длину дуг, которые в методе исчерпывания берутся достаточно малыми, являются длины отрезков касательных в концах дуги A и B. Касательная в точке A продолжается до пересечения ее с ординатой точки B; касательная в точке B продолжается до пересечения ее с ординатой точки A. То, что один из этих отрезков больше, а другой меньше длины дуги, Ферма выводит из общих архимедовых постулатов о длинах дуг („Древние и средние века“, стр. 124). После того как открыта была первая кривая с алгебраическим выражением длины ее дуги, Ферма нашел в связи с ней несколько других. Вскоре после этого Гюйгенс дал общий прием для нахождения ректифицируемых кривых, а именно, определение эволют данных кривых (см. ниже, III, 5).

Когда было найдено средство для вычисления длин дуг, то не представляло больше трудностей и нахождение поверхности вращения, ограниченной двумя параллельными кругами. Выражение ее $2\pi\int y\,ds$, где ds — элемент меридианной кривой, а y — его расстояние от оси, содержится по существу уже в теореме о поверхностях Паппа-Гульдена; вполне определенно выдвинуто оно, однако, лишь в появившихся в 1659 г. „Письмах“ Паскаля, в которых интеграл $\int y\,ds$ представлен в той форме, которая была указана выше (стр. 266). Прообразом такого представления является, впрочем, архимедово определение поверхности шара и связанное с ним определение интеграла $\int \sin\vartheta\,d\vartheta$. Других примеров не дает и Паскаль. Его способ представления является, однако, вполне общим; целью же, которую он имеет в виду, является вычисление поверхности тела, образованного вращением циклоиды.

Почти в то же время Гюйгенс в письмах к различным математикам, в том числе и парижским, сообщил об алгебраической квадратуре параболоида вращения и о том, что квадратура эллипсоида вращения сводится к квадратуре круга и гиперболы, т. е. на языке современной математики, к круговым и логарифмическим функциям. Впоследствии он поместил эти квадратуры в своем сочинении о маятнике.

Сообщения Гюйгенса о квадратуре параболоида дали Паскалю прекрасный случай проверить свои методы интегрирования на чужой задаче; решение его, посланное им в письме к Каркави для передачи Гюйгенсу, представляет хорошее средство для того, чтобы убедиться в их пригодности. Действительно, оказывается, что он решает задачу, пользуясь только преобразованиями, точно им указываемыми, и приведенным выше выраже-



Гюйгенс

1629 — 1695

Гравюра И. Павлова

нием для длины параболы. Последнее он приписывает уже упомянутому Озу. Отвлекаясь от некоторых ошибок в сохранившейся копии Каркави, мы можем выразить примененные Паскалем преобразования на языке современного интегрального исчисления (принимая, что значения $s = l$ и $s = 0$ соответствуют значениям $y = 0$ и $y = b$) следующим образом:

$$\int_0^l y\,ds = \int_0^b s\,dy = \frac{1}{p}\int_0^b dy\left(\int_y^b \sqrt{y^2+p^2}\,dy\right) = \frac{1}{p}\int_0^b y\sqrt{y^2+p^2}\,dy.$$

Первое преобразование представляет собою только встречающуюся у Ферма и Паскаля форму интегрирования по частям. В результат его вставлено выражение Озу для s. Второе преобразование есть то, которое указано нами в формуле (1) на стр. 267. Последнее выражение, как мы видим, совпадает с тем, которое можно было бы получить непосредственно, выражая ds через dy. Надо думать, что Гюйгенс не делал этого окольного пути, который Паскалю пришлось пройти, потому что он хотел применить свои собственные готовые методы, выработанные им для других целей. Относительно выражения, получившегося после преобразований, Паскаль говорит, что его можно вычислить помощью кубатуры тела, образованного вращением гиперболы $x^2 = y^2 + p^2$ около оси x.

Ферма также слышал о гюйгенсовой квадратуре параболоида вращения, не видев, однако, сам его сообщения. Это дало ему повод обойти в упомянутом выше, изданном Лалувером, сочинении своем эту уже решенную другими задачу молчанием и продемонстрировать свое уменье находить квадратуры поверхностей вращения на других примерах. А именно, он пользуется для этого своим „коноидом“, образуемым вращением параболы около хорды, перпендикулярной к оси; поверхность его он выражает с помощью длины параболы и другой логарифмической функции, которую он задает как площадь гиперболы.

Поверхности вращения, ограниченные параллельными кругами, были не единственными поверхностями, квадратуры которых определялись. Так, Роберваль в своем „Трактате о неделимых“ („Traité des indivisibles“) находит, что часть кривой поверхности цилиндра, отсекаемая поверхностью шара, центр которого лежит на поверхности цилиндра и радиус которого равен диаметру основания цилиндра (или, как он выражается, поверхность „круга на цилиндре“), равна учетверенному квадрату радиуса шара. Такую же величину, как известно, имеет часть поверхности пересекающего цилиндр полушария, лежащая вне цилиндра. Результат этот был найден Вивиани в самом конце столетия (1692), но без применения вошедшей в то время в употребление техники интегрального исчисления. Вивиани послал ряду математиков задачу, решаемую как раз с помощью этого предложения и состоящую в требовании построить имеющий форму полушария купол с двумя одинаковыми и одинаково расположен-

ными окнами, так чтобы остальная часть его равнялась полному квадрату; Лейбниц тотчас же решил эту задачу с помощью интегрального исчисления.

Особенно хорошие примеры того, какие широкие применения могло иметь интегрирование в тогдашнем его виде, дает нам Гюйгенс, определяя длины приведенных маятников, соответствующих физическим маятникам той или иной формы. Как мы уже упоминали (стр. 241), он свел в своей работе „Маятниковые часы“ эту задачу к вычислению величины, которую мы называем теперь моментом инерции и обозначаем через $\int r^2 dm$ (dm здесь — бесконечно малая частица массы, а r — ее расстояние от оси). Гюйгенс, по примеру Кавальери, определяет отношение этой величины к массе $\left(\int dm\right)$ как сумму квадратов расстояний от оси всех равновеликих друг другу частиц массы, деленную на число этих частиц. Он дает общие правила для вычисления этой величины, когда маятник представляет собою однородную плоскую фигуру, вращающуюся около лежащей в ее плоскости прямой или параллели к ней, или же однородное тело. Особенно интересны здесь для нас два пункта: во-первых, тот способ, каким Гюйгенс, не располагавший еще отвлеченным понятием интеграла, сводит нужные ему интегрирования к известным в его время формам — определению объемов и центров тяжести; во-вторых, сведение требуемого вычислениями кратного интегрирования к нескольким простым.

Первое из этих преобразований мы находим уже при определении момента инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости. Обозначим элемент площади через df, а его расстояние от оси через x. Гюйгенс пользуется соотношением:

$$\frac{\int x^2\,df}{\int df} = \frac{\int x\cdot x\,df}{\int x\,df}\cdot\frac{\int x\,df}{\int df}$$

и сводит вопрос к вычислению произведения расстояний от оси следующих двух точек: 1) проекции центра тяжести клина, вырезанного данной плоскостью и другой плоскостью, проходящей через ось, из прямого цилиндра, имеющего основанием данную фигуру; 2) центра тяжести данной фигуры. Такое определение применяется Гюйгенсом непосредственно лишь в том случае, когда ось касается контура фигуры. Однако так как он знает и для плоских фигур и для пространственных тел соотношения между моментами инерции относительно параллельных осей, находящихся на разных расстояниях от центра тяжести, то и другие случаи нахождения моментов инерции легко сводятся к указанному.

Момент инерции тела (или плоской фигуры относительно перпендикулярной к ней оси) находится через сложение двух

интегралов $\int x^2 dv, \int y^2 dv$, где x и y обозначают расстояния элемента dv от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через ось. Дальнейшее вычисление каждого из них, например $\int x^2 dv$, сводится на указанное выше вычисление момента инерции плоской фигуры. Действительно, если положить здесь $dv = u\,dx$, то u обозначает площадь определенного для каждого значения x плоского сечения тела; если же представить себе те же значения и как ординаты плоской кривой, то $\int x^2 u\,dx$ будет означать момент инерции плоской фигуры относительно оси ординат.

Вычисление можно выполнить проще, если сечения, перпендикулярные к оси, подобны между собою и ось пересекает эти сечения в сходственных точках. Действительно, если площадь такого сечения равна u, то его момент инерции относительно оси равен ku^2, где k — постоянная, которую можно найти, вычислив момент инерции какого-нибудь одного сечения. Момент инерции тела $J = k\int u^2 dz$, где z — отрезок, отсекаемый сечением u на оси. Гюйгенс и здесь сводит вычисление к определению центра тяжести. Принимая z за абсциссу, u за ординату движущейся точки плоской кривой, он представляет объем с помощью площади плоской фигуры $\int u\,dz$. Если координата u центра тяжести этой площади равна u_1, то

$$J = k\int u^2 dz = 2ku_1\int u\,dz,$$

и, таким образом, $2ku_1$ есть множитель, на который надо помножить объем $\int u\,dz$, чтобы получить искомый момент инерции.

Гюйгенс пользуется своими методами, чтобы найти длины приведенных маятников, соответствующих кругу, прямоугольнику, равнобедренному треугольнику, параболическому сегменту, круговому сектору, окружности, правильному многоугольнику, пирамиде, конусу, шару, цилиндру, сегменту параболоида вращения и половине конуса, колеблющимся около надлежаще выбранных осей.

Как видно из переписки Гюйгенса, подобного рода применения интегрирования возбуждали большой интерес в довольно широких кругах; математики того времени старались найти новые случаи, в которых можно было произвести интегрирование и получить конкретные результаты. В эту пору очень хорошо представляли себе, где и как можно применить интегрирование; это сказывается уже в той уверенности, с какой одно применение ставилось в связь с другим. Наоборот, самое интегрирование умели тогда выполнять только в довольно ограниченном числе случаев, и притом часто лишь с большим трудом. Дальнейшее развитие его требовало овладения новыми и более ши-

рокими методами. Эти методы появились вскоре как результат, с одной стороны, применения бесконечных рядов, с другой — связи с диференцированием. В настоящее время эта связь чрезвычайно существенна для развития интегрального исчисления, и самый термин „интегральное исчисление", который мы употребляли здесь для большей ясности, появился лишь позднее, в связи с понятием диференцирования. Но прежде чем говорить о новых приемах решения задач интегрального исчисления, мы должны остановиться на тех исследованиях, которые лежат в их основе и которые представляют также большой интерес и сами по себе.

3. Методы бесконечного приближения; ряды.

Во встречавшихся нам выше интегрированиях мы видим повсюду стремление выразить искомую величину, там где это возможно, алгебраически через данные. Когда это оказывалось невозможным, то приходилось довольствоваться сведением ее определения к квадратуре круга или гиперболы, что равносильно теперешнему выражению соответствующего интеграла через круговые или логарифмические функции. В совершенно единичных случаях дело сводилось к еще более сложным интегралам. Тогда исследование могло быть направлено только на сравнение величин, выражающихся помощью одного и того же интеграла, например на сравнение дуги спирали высшего порядка с дугой параболы высшего порядка (стр. 286). Для того чтобы это могло дать какой-нибудь существенный результат, надо было знать одну из двух сравниваемых величин, или обладать средством для вычисления этой величины или самого интеграла.

Если интеграл сводился к площади круга, то средство для его вычисления давалось знанием значения π и тригонометрическими таблицами. Точно так же, когда интеграл сводился к квадратуре гиперболы, то можно было бы воспользоваться уже имевшимися таблицами логарифмов. Однако, как мы уже говорили, в то время были склонны видеть скорее, наоборот, выгоду в том, чтобы логарифмы, представлявшие собою нечто еще новое, привести в связь с уже давно известною кривою. В представлении их в виде ограниченных гиперболою площадей, т. е. интегралов, видели поэтому прежде всего новый путь для вычисления логарифмов.

Первым средством, позволяющим воспользоваться изображением величины в виде интеграла для ее вычисления, является рассмотрение интеграла как предела суммы. Вследствие этого интеграл можно вычислять со все большею точностью, составляя его из все более и более мелких частей. Таким образом уже Кеплер вычислял приближенные значения $\int_0^\theta \sin\theta\, d\theta$, приведшие его к его индуктивному определению точного значения этого

интеграла (стр. 247); тот же прием применяет Роберваль к интегралам, точного выражения для которых он не может найти. Сюда же относится вычисление длины кривой, состоящее в определении периметров вписанных многоугольников со все большим и большим количеством сторон. Математики от Гульдена до Валлиса применяют этот прием, уже в давнюю пору употреблявшийся для вычисления π, также и к длинам других кривых.

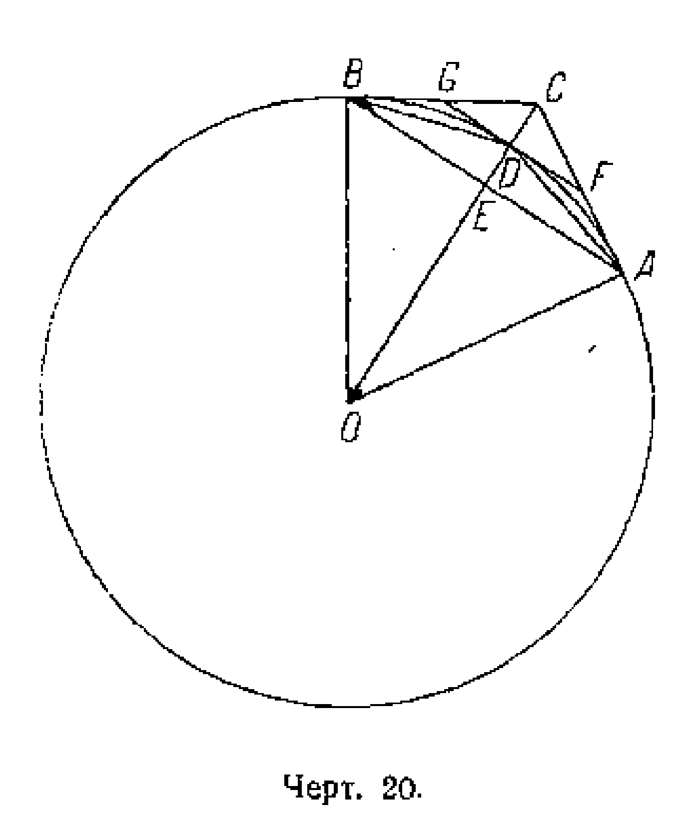
В конце периода, рассматриваемого в настоящей книге, входит в употребление, особенно при вычислении логарифмов, другой прием, а именно изображение интегралов в виде бесконечных рядов. Прежде чем заняться ближайшим рассмотрением этого метода, получившего вскоре более общее значение, бросим взгляд на применение бесконечных рядов и других бесконечных приближений в прежние времена.

Уже в древности как Евклид, так и Архимед („Древние и средние века“, стр. 119 и 126) применяли в своих доказательствах такие изображения величин, которые, в сущности, совпадают с теперешними бесконечными рядами; в частности, Архимед пользовался суммированием бесконечной геометрической прогрессии. Древние математики следили с помощью доказательства методом исчерпывания за тем, чтобы суммы этих рядов действительно приближались к величинам, которые они должны были выражать. Основою при этом служила предпосылка, которая устанавливается в 4-м определении 5-й книги Евклида, или более непосредственно в выводимом из него 1-м предложении 10-й книги. Предложение это утверждает, что если отнимать от величины половину или больше половины ее и повторять этот прием достаточно долго, то можно достичь величины, которая меньше любой заданной наперед величины, однородной с исходной, — критерий, который на современном языке может быть выражен так: $\lim \alpha\beta\gamma\ldots = 0$, если все величины $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ меньше или равны $\frac{1}{2}$ („Древние и средние века“, стр. 117). Мы повторяем это здесь потому, что, как мы увидим, еще Ньютон основывает на этом свои исследования относительно сходимости.

Бесконечные ряды, однако, не являются единственной формой приближений, которая встречается нам на более ранних этапах развития математики. Бесконечное приближение имеется налицо всякий раз, когда иррациональное число — будь это радикал, корень уравнения, тригонометрическая функция, π или логарифм — определяется со все большей точностью с помощью приема, который можно продолжать, пока отклонение от вычисляемой величины не станет меньше любого наперед заданного числа. С такими процессами мы уже встречались во всех тех предыдущих главах, где дело шло о числовых расчетах. Если вопрос о сходимости там еще не поднимался, то это происходило либо потому, что при определении каждого нового десятичного знака было с достоверностью установлено, что он ни слишком велик, ни слишком мал, либо потому, что сходимость была столь силь-

ной, что в ней не приходилось сомневаться. Действительно, для числовых расчетов годится только такая сильная сходимость.

Из вопросов, рассмотренных нами в предыдущих главах, напомним здесь только о тех случаях, в которых сходимостью обладает некоторая определенная формула бесконечного приближения. Сюда относится принадлежащее Бомбелли и Катальди изображение квадратных корней из данных чисел с помощью непрерывных дробей (стр. 152); как мы видели, оно было связано с точными исследованиями относительно степени приближения, даваемой каждым шагом. В данном Виета определении π как бесконечного произведения (стр. 123) приближение произведения к π является непосредственным следствием того, что отклонение площади правильных вписанных многоугольников от площади круга может быть сделано, как доказал Евклид, меньше любой наперед заданной величины. Что касается до валлисова определения π (стр. 275), то, как ни смелы аналогии, на которых оно построено, сходимость там совершенно ясна, так как π заключено между двумя величинами, предел отношения которых равен 1. Броункер (Brouncker) представил валлисово выражение для π в виде бесконечной непрерывной дроби:



Черт. 20.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}$$

Мы, однако, не знаем, как он нашел этот замечательный результат.

В то время как валлисов процесс бесконечного приближения касался числа π, или целого круга, Джемсу Грегори мы обязаны таким приемом, который может быть применен к любому сектору с вершиной в центре — не только круговому, но также эллиптическому или гиперболическому. Обозначим (черт. 20) площадь такого сектора $OADB$ через s, площадь соответствующего ему центрального треугольника OAB через i_1 и площадь четырехугольника $OACB$, ограниченного радиусами OA и OB и касательными в A и B, через u_1. Если D есть точка касания касательной, параллельной AB, то OD делит сектор на два равные сектора; обозначим сумму площадей вписанных в них треугольников OAD и ODB через i_2, а сумму площадей четырехугольников $OAFD$ и $ODGB$ через u_2. Далее, получаем с помощью подобного же деления новых секторов сумму i_3, состоящую из площадей четырех треугольников, и сумму u_3, составленную

площадями четырех четырехугольников и т. д. Чертеж показывает, что если центральный угол сектора меньше двух прямых, то $u_n \gtrless s \gtrless i_n$, где верхние знаки неравенств соответствуют эллипсам (кругам), а нижние — гиперболам. Что касается до кругов, то уже в евклидовом доказательстве пропорциональности их площадей квадратам радиусов доказывается, что, при бесконечном возрастании n, предел i_n равен s; подобным же образом получается это и для эллипсов и гипербол. Вопрос о сходимости не представляет здесь поэтому собственно ничего нового, кроме того только, что Грегори впервые употребил слово „сходимость", причем он, однако, прежде всего выражает этим термином процесс постепенного образования ряда сходящихся величин.

Способ образования, который Грегори устанавливает для величин

$$i_1,\ u_1;\quad i_2,\ u_2;\quad i_3,\ u_3;\ \ldots,$$

таков:

$$i_n = \sqrt{i_{n-1} u_{n-1}},\qquad u_n = \frac{2 i_n u_{n-1}}{i_n + u_{n-1}},$$

т. е. определение всех величин по двум первым сводится к двум операциям — нахождению среднего геометрического и среднего гармонического. Грегори не употребляет индексов, но выражаемое ими единообразие последовательного образования он отмечает очень определенно; о том, как он пользуется им, речь будет ниже.

Вследствие единообразия и однородности достаточно доказать эти предложения для $n = 2$, что легко сделать с помощью нашего чертежа; легко усмотреть далее, что они, как указывает Грегори, имеют силу не только для кругов, но и для эллипсов и гипербол.

Найденные результаты можно использовать как для вычисления площади целого круга (а следовательно, для определения значения π), так и для вычисления площади кругового сектора, по данным тригонометрическим функциям его центрального угла (т. е. для вычисления круговых функций). Грегори применяет их также к вычислению гиперболических площадей и, при посредстве этих площадей, к вычислению логарифмов. Однако повторное извлечение квадратных корней делает выкладки несколько громоздкими.

Весьма большой интерес формулам Грегори сообщают данные им их автором теоретические применения: Грегори доказывает с помощью их, что, как мы сказали бы теперь, круговые и логарифмические функции не принадлежат к алгебраическим. А именно, он утверждает, что предел s, к которому стремятся выражения i и u, нельзя выразить аналитически с помощью двух приближенных значений i и u, т. е. что его нельзя выразить через i_1 и u_1 помощью обычных алгебраических операций — сложения, вычитания умножения, деления и извлечения корня.

Основные черты доказательства сводятся к следующему. Так как s получается лишь путем бесконечного повторения одного и того же приема, то зависимость этой величины от i_2 и u_2 должна быть такова же, как и от i_1 и u_1, или, в современных обозначениях, должно иметь место равенство:

$$s = f(i_1, u_1) = f(i_2, u_2).$$

Надо доказать, что эта функция не может быть алгебраической, если i_2 и u_2 выражаются через i_1 и u_1 указанным выше образом. Так как эти выражения иррациональны, то Грегори вводит новые переменные, полагая

$$i_1 = a^2(a+b), \quad u_1 = b^2(a+b),$$

откуда

$$i_2 = ab(a+b, \quad u_2 = 2ab^2.$$

Дальнейшее доказательство заключается в обнаружении того, что $f(i_1, u_1)$ и $f(i_2, u_2)$ не могут быть выражениями одной и той же степени относительно a, если f обозначает алгебраическую функцию. Желательно было бы, конечно, более точное пояснение, как должна вычисляться степень, когда функция иррациональна; но на указанном пути действительно можно выполнить точное доказательство, откуда следует, что s не может быть алгебраической функцией a и b или двух, соответствующих друг другу, i и u. Так как при $i < u$ мы получаем, рассматривая круговой сектор и фигуры i_1 и u_1, что

$$s = u\sqrt{\frac{i}{u-i}} \arccos\sqrt{\frac{i}{u}},$$

а при $i > u$, рассматривая равностороннюю гиперболу, видим, что s выражается через i и u алгебраически и логарифмически, то, следовательно, является доказанным, что круговые и логарифмические функции не принадлежат к числу алгебраических.

Как заметил уже Лейбниц, отсюда еще не следует, что для отдельных определенных значений i и u, s не может быть выражено алгебраически через данные рациональные числа. Это могло бы иметь место и в том случае, когда i и u имеют такие значения, что s находится в рациональном отношении к площади всего круга. Таким образом Грегори не доказал, что π есть, как мы говорим теперь, трансцендентное число, и, следовательно, не доказал, — как, быть может, он думал сам, — что квадратуру круга нельзя выполнить посредством линейки и циркуля. Доказать это удалось только в новейшее время, идя совсем иными путями, Линдеману, а за ним и другим.

Быть может, как раз предположение, что доказательство Грегори относится к только что указанной проблеме, помешало Гюйгенсу оценить то, чего Грегори в действительности достиг. В рецензии в „Journal des Savants“ (1668) Гюйгенс старается показать на примере, что, когда i_1 и u_1, i_2 и u_2 выражаются вышеуказанным образом через a и b, то можно составить из

i и u алгебраическое выражение, принимающее при подстановке как i_1 и u_1, так и i_2 и u_2 одно и то же значение; при этом, однако, Гюйгенс ставит самые константы этих выражений в зависимость от a и b и не замечает, таким образом, предположения Грегори, что a и b являются величинами переменными или, как он выражается, неопределенными (indefinitae), на что Грегори и указывает ему в своем ответе в „Philosophical Transactions".

Впоследствии Грегори заменил свои малоудобные методы приближений применением бесконечных рядов. Что касается до логарифмов, то это произошло лишь после того, как он познакомился с меркаторовым разложением в ряды, которому он дал геометрическое обоснование; круговые же функции он стал вычислять, пользуясь рядами, лишь познакомившись с применением общего метода Ньютона. Ввиду того, что в этой области его работы не пролагают новых путей, мы отметим только наиболее важные результаты, которыми мы ему обязаны. Это — разложения:

$$\log \frac{y}{z} = k\left[\frac{y-z}{y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^5 + \ldots\right],$$

где k — постоянная, для натуральных логарифмов равная 2, и

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

где мы даем его формуле вид, который она получает, если воспользоваться современным обозначением арктангенса и положить радиус равным 1. Первая формула по существу совпадает с формулой

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Мы указываем эти результаты уже здесь, так как они находятся в соответствии с прежними исследованиями Грегори. Они дают общий метод для приближенного вычисления площадей круга и равносторонних гипербол, а следовательно, также круговых и логарифмических функций. Ряды Грегори для вычисления этих двух классов функций совершенно совпадают друг с другом, за исключением знаков перед членами, стоящими на четных местах.

Обратимся теперь к другим более ранним применениям бесконечных рядов к вычислению круговых и логарифмических функций. Впервые встречаются они нам у Гюйгенса и Броункера, у которых они имеют форму, ясно говорящую о влиянии архимедовой геометрической квадратуры сегмента параболы („Древние и средние века", стр. 126). Архимедова квадратура состоит в том, что в сегмент вписывается треугольник, вершиною которого служит точка касания касательной, параллельной хорде сегмента; затем в каждый из обоих оставшихся сегментов таким же образом вписываются треугольники, сумма площадей которых составляет четверть площади первого треугольника; далее, в четыре новых сегмента опять вписываются треугольники, и т. д. Площадь

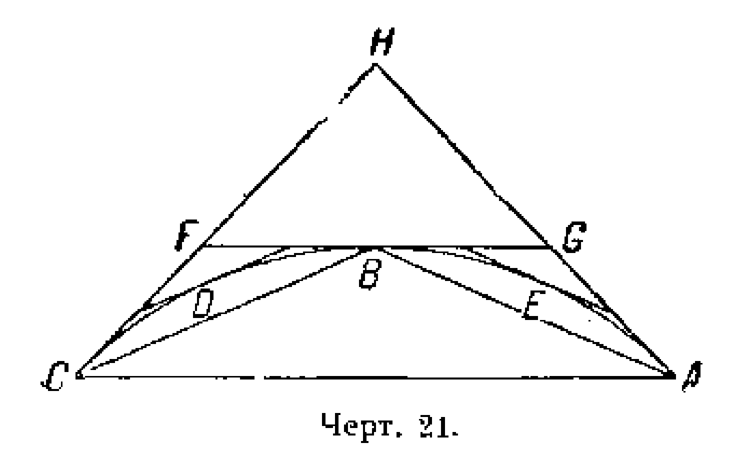
данного сегмента оказывается равной произведению площади первого треугольника на сумму бесконечного ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{4}{3}.$$

Гюйгенс применил тот же прием для определения границ, в которых должна лежать площадь кругового сегмента. В сегмент $AEBDC$ (черт. 21), меньший полукруга, сперва вписывается треугольник ABC с вершиною B в середине дуги, затем таким же образом в оставшиеся сегменты вписываются треугольники AEB и BDC и т. д. Гюйгенс доказывает, что

$$\triangle AEB+\triangle BDC>\frac{1}{4}\triangle ABC.$$

Вписывая в новые сегменты все время новые треугольники, мы, сколько ни будем продолжать этот прием, никогда не заполним всю площадь сегмента. Поэтому



Черт. 21.

$$\text{сегм. } AEBDC>\triangle ABC\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right),\text{т. е.}>\frac{4}{3}\triangle ABC.$$

Гюйгенс доказывает дальше, что, если AH и CH суть касательные в A и C, а F и G — точки их пересечения с касательной, параллельной AC, то $\triangle FHG>\frac{1}{2}\triangle ABC$. Подобным же образом внешние треугольники, отсеченные касательными в E и D, больше $\frac{1}{2}\triangle AEB$ и $\frac{1}{2}\triangle BDC$ и т. д. Так как внешняя площадь $AEBDCH$ составляет предел суммы внешних треугольников, а сегмент $AEBDC$ — предел суммы внутренних, то

$$2\times\text{площ. } AEBDCH>\text{сегм. } AEBDC.$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства площадь $AEBDCH$, мы получим:

$$\text{площ. } AEBDCH>\frac{1}{3}\triangle AHC.$$

Гюйгенс может теперь существенно упростить вычисление π и основанное на нем вычисление тригонометрических величин. Действительно, раньше оно базировалось на том, что площадь круга и длина окружности больше соответственных величин для вписанного многоугольника и меньше тех же величин для многоугольника описанного. Указанные здесь результаты дают Гюйгенсу возможность, вычислив площади I_n и U_n вписанного и описанного многоугольников, сразу дать для площади круга или,

беря радиус равный 1, для π более тесные границы. Именно, если AB и BC — стороны вписанного n-угольника, то разность $\pi - I_n$ равна сумме таких пар сегментов, как AEB и BDC, т. е. больше чем $\frac{4}{3}$ суммы пар соответствующих треугольников AEB и BDC. А так как $\triangle AEB + \triangle BDC > \frac{1}{4} \triangle ABC$, то

$$\pi - I_n > \frac{1}{3} \sum \triangle ABC$$

или

$$\pi - I_n > \frac{1}{3}\left(I_n - I_{\frac{n}{2}}\right),$$

что дает для π нижнюю границу:

$$I_n + \frac{1}{3}\left(I_n - I_{\frac{n}{2}}\right).$$

Для верхней границы мы получим выражение:

$$U_n - \frac{1}{3}(U_n - I_n),$$

если примем во внимание, что разность $U_n - \pi$ равна сумме площадей вида $AEBDCH$, каждая из которых больше $\frac{1}{3} \triangle AHC$.

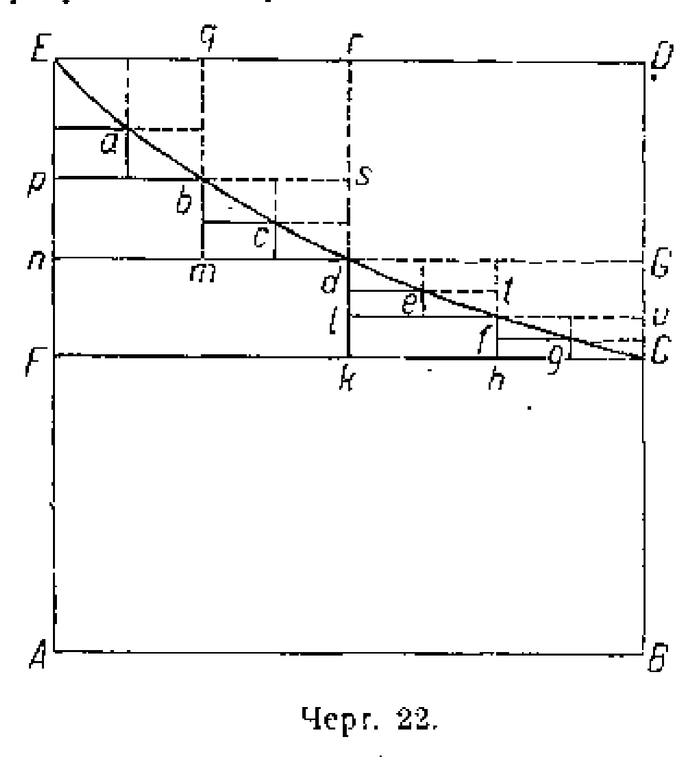
Пользование этими границами дает нам возможность при одном и том же числе сторон многоугольника получать для π почти вдвое большее число правильных десятичных знаков, чем если бы мы, следуя Архимеду, пользовались в качестве пределов лишь самими вписанными и описанными многоугольниками.

Гюйгенс применяет также другие средства для того, чтобы, не увеличивая числа сторон многоугольников, еще теснее сомкнуть границы, между которыми должно лежать π. Относительно них мы заметим только, что, подобно тому как изложенное сейчас вычисление основано на сравнении площадей кругового и параболического сегментов, другие приемы связаны с исследованием относительно взаимного расположения центров тяжести этих сегментов.

Как мы видим, Гюйгенс представлял площадь кругового сегмента как сумму ряда, первым членом которого служит площадь вписанного треугольника, вторым сумма площадей двух треугольников, третьим сумма площадей четырех треугольников и т. д. Он сопоставлял этот ряд с геометрической прогрессией, которой Архимед пользовался для определения площади параболического сегмента. В результате у Гюйгенса получаются вышеприведенные неравенства. Броункер поступил совершенно таким же образом с сегментом равносторонней гиперболы („Philosophical Transactions“, 1668). Но здесь для площадей отдельных треугольников получаются простые выражения, так что бесконечный ряд непосредственно дает арифметическое выражение искомой площади. Броункер начинает, однако, с вывода подобных рядов для

определения других площадей, связанных с гиперболой, — в частности тех, которые непосредственно изображают логарифмы.

Броункер отыскивает, собственно, только $\ln 2$; но его прием, как он сам указывает, можно применить к нахождению логарифмов всех рациональных чисел. Вот ход его рассуждений. EdC (черт. 22) — дуга равносторонней гиперболы, уравнение которой, отнесенное к асимптотам, есть $xy = 1$. AB есть одна из этих асимптот, E — вершина гиперболы, обе координаты которой равны 1; если мы положим $AB = 1$, то точка C будет иметь координаты 2 и $\frac{1}{2}$, а фигура $AEdCB$ — площадь, равную $\ln 2$. Отрезок AB оси абсцисс делится сперва на 2, затем на 4, 8 и т. д. равных частей. На чертеже буквами a, b, c, d, e, f, g обозначены точки гиперболы, имеющие абсциссы:



Черт. 22.

$$1\frac{1}{8},\quad 1\frac{2}{8},\quad 1\frac{3}{8},\quad 1\frac{4}{8},\quad 1\frac{5}{8},\quad 1\frac{6}{8},\quad 1\frac{7}{8}.$$

Прямые чертежа проведены параллельно осям координат (асимптотам). Внутри площади $EDCd$ находятся прямоугольники следующей величины:

$$dD = \frac{1}{2\cdot 3},\quad br = \frac{1}{4\cdot 5},\quad fG = \frac{1}{6\cdot 7},$$

$$aq = \frac{1}{8\cdot 9},\quad cs = \frac{1}{10\cdot 11},\quad et = \frac{1}{12\cdot 13},\quad gu = \frac{1}{14\cdot 15},$$

а внутри самой искомой площади $ABCdE$ прямоугольники:

$$CA = \frac{1}{1\cdot 2},\quad dE = \frac{1}{3\cdot 4},\quad bn = \frac{1}{5\cdot 6},\quad fk = \frac{1}{7\cdot 8},$$

$$ap = \frac{1}{9\cdot 10},\quad cm = \frac{1}{11\cdot 12},\quad el = \frac{1}{13\cdot 14},\quad gh = \frac{1}{15\cdot 16}.$$

В этом легко убедиться, так как горизонтальные стороны прямоугольников представляют собою разности между данными абсциссами, а вертикальные стороны — разности между соответствующими ординатами точек гиперболы $xy = 1$. Если разделить AB на 16, 32, ... части, то с обеих сторон прибавляется по 8, 16, ... новых прямоугольников, площади которых выражаются по тому же уже ясно обозначившемуся закону. Броункер был вполне убежден в правильности этого индуктивного заключения, хотя

тогда еще не было достаточных алгебраических ресурсов, чтобы провести полное доказательство. Таким путем он находит, что

$$EDCd = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{8\cdot 9} + \ldots \quad (1)$$

$$ABCdE = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \ldots; \quad (2)$$

складывая эти ряды, он получает, что

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots \quad (3)$$

Он заключает, далее, что площадь сегмента

$$EdCE = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} + \ldots \quad (4)$$

Площадь эта находится как полуразность между площадями $EDCd$ и $FCdE$, последняя из которых представляется рядом (2) без первого члена. Члены ряда (4) получаются почленным вычитанием рядов для $EDCd$ и $FCdE$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$$

и т. д.

Отдельные члены этого нового ряда представляются Броункером сверх того непосредственно как части сегмента $EdCE$. Так, первый член есть площадь треугольника EdC, второй — треугольника Ebd, третий — треугольника dfC и т. д., словом, члены представляют собою площади треугольников, соответствующих тем, на которые Архимед делил параболический, а Гюйгенс круговой сегмент.

Для фактического вычисления Броункер применяет ряд (4) как сходящийся наиболее быстро; $\ln 2$ находится вычитанием площади сегмента из площади трапеции, равной $\frac{3}{4}$. При вычислении Броункер стремится, с одной стороны (подобно Гюйгенсу), подойти к искомой величине ближе, чем это достигается простым сложением вычисленных членов ряда, с другой стороны — получить надежную оценку степени точности. По примеру Архимеда он соединяет члены, соответствующие последовательному делению отрезка AB на 2, 4, 8, 16, ... равных частей, в группы. Если обозначим эти группы из 1, 2, 4, 8, ... членов через $u_1, u_2, u_3, \ldots$, то

$$u_1 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}, \quad u_2 = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}$$

и т. д.

Броункер утверждает, что $\frac{1}{4}u_n < u_{n+1}$, и дает этому совершенно общее алгебраическое доказательство: он устанавливает с помощью буквенного исчисления, что при $a > 2$,

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{a(a-1)(a-2)} < \frac{1}{2a(2a-1)(2a-2)} + \frac{1}{(2a-2)(2a-3)(2a-4)},$$

т. е. что $\frac{1}{4}$ каждого члена u_n меньше суммы двух соответствующих членов u_{n+1}. Таким путем он находит, что

$$\text{площ. сегм. } ECd > u_1 + u_2 + \ldots + u_n\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\ldots\right),$$

или

$$\text{площ. сегм. } ECd > u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \frac{1}{3}u_n,$$

т. е. он находит более близкую нижнюю границу, нежели та, которая получается, если остановиться на члене u_n. В качестве верхней границы для остатка Броункер указывает на величину $\frac{4}{3}\frac{u_n^2}{u_{n-1}}$, не давая другого доказательства, кроме ссылки на то, что $u_{n+1} > \frac{1}{4}u_n$.

Чтобы притти к этому утверждению, он, вероятно, воспользовался тем обстоятельством, что, как это действительно вытекает из его доказательства вышеприведенного неравенства, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ хотя и никогда не достигает значения $\frac{1}{4}$, но, убывая, приближается к этому пределу, так что

$$u_{n+1} < \frac{u_n}{u_{n-1}}u_n, \quad u_{n+2} < u_n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)^2$$

и т. д.

Вследствие этого сумма членов, следующих за u_n, меньше, чем

$$\frac{u_n^2}{u_{n-1}}\frac{1}{1-\frac{u_n}{u_{n-1}}}.$$

Результат Броункера получается, если в это выражение вместо $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ вставить $\frac{1}{4}$. Формально это, конечно, неправильно, так как подстановка числа $\frac{1}{4}$, меньшего, чем $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, уменьшает и дробь, так что за новую верхнюю границу нельзя ручаться. Однако те общие для обеих границ $\frac{1}{3}u_n$ и $\frac{4}{3}\frac{u_n^2}{u_{n-1}}$ десятичные знаки, на которые не влияет замена величины $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ величиной $\frac{1}{4}$, остаются верными, и потому, если ограничиться этими знаками, ошибки от указанной замены не произойдет. Броункер берет при вычислении (соответствующем $n = 5$) на один знак больше, чем следовало бы согласно сказанному; то, что, несмотря на это, действительно получается верхняя граница, объясняется тем обстоятельством, что в последнем множителе указанного нами правильного выражения верхней границы можно известное нам отношение $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ заменить отношением $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, правда, не вычисленным, но более близким к $\frac{1}{4}$.

Броункер рассматривает и медленнее сходящиеся ряды (1) и (2), таким же образом соединяя в обоих члены в группы. Что касается до ряда (1), то он преобразуется в ряд, состоящий из первого члена, который мы попрежнему обозначим через u_1, суммы (u_2) двух следующих, суммы (u_3) четырех следующих и т. д. Броункер доказывает, что $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$, вследствие чего остаток, который мы получаем, останавливаясь на любом члене, меньше, нежели в сходящемся геометрическом ряде со знаменателем $\frac{1}{2}$. При доказательстве этого Броункер, в противоположность предыдущему случаю, не нуждался в непривычном алгебраическом выражении общих членов, но мог довольствоваться более знакомой геометрической алгеброй. Он выводит из чертежа, что площадь

$$\frac{1}{2}\, dD = br + bn > br + fG$$

и т. д.

Действительно, $bn > fG$, так как оба прямоугольника имеют одинаковое основание, равное $\frac{1}{4}$, в то время как высота, т. е. разность между ординатами, соответствующими абсциссам с однею и тою же разностью, уменьшается, по мере того как растут абсциссы. Легко видеть, что это соображение можно распространить на все члены ряда. Из ряда (2), отбрасывая 1-й член и группируя остальные как в предыдущих случаях, получаем, напротив, что $u_{n+1} > \frac{1}{2} u_n$; таким образом соответствующая геометрическая прогрессия образует, как и для ряда (3), только нижнюю границу.

Итак, Броункер, во-первых, вычисляет величины как суммы бесконечных рядов; во-вторых, он преобразует эти ряды в такие, в которых отношение каждого члена к предшествующему приближается к пределу, меньшему 1. В-третьих, в то время как у Архимеда соответствующее преобразование вело к сходящемуся геометрическому ряду, Броункер применяет сравнение с геометрическими рядами для того, чтобы достичь лучшего приближения и чтобы найти границы для остатка. В том случае, когда указанное отношение приближается к этой границе возрастая, как это имеет место для ряда (1), мы получаем таким путем точное определение верхней границы суммы ряда. В-четвертых, если отношение между членами, наоборот, убывает, как в рядах (2) и (4), то Броункер применяет для вычисления верхней границы очень остроумный искусственный прием. Результат его, однако, отнюдь не является надежным, когда выставляется как отвлеченное правило, и неясно, видел ли Броункер, как надо было обеспечить себе его правильность при произведенных им выкладках.

Броункер заметил также, какие требования должны быть поставлены при вычислении суммы бесконечного ряда. Действи-

тельно, то, что мы называем теперь сходимостью ряда, основано на том, что разность двух значений, между которыми должна лежать сумма, может быть сделана меньше любой заданной величины. Таким образом сходимость ряда (1) полностью выяснена.

В рассматриваемом исследовании, правда, особое доказательство сходимости рядов не является ни необходимым, ни достаточным; первое потому, что суммы рядов остаются все время меньше, чем конечные площади, для изображения которых они определяются; последнее потому, что ряды даже в случае сходимости могут приближаться не к этим площадям, а лишь к меньшим пределам. Однако Броункер ясно указывает на одно обстоятельство, из которого можно сейчас же заключить, что при достаточном увеличении числа членов в каждом ряде отклонение от площади, которую он должен представлять, может быть сделано меньше любой заданной величины. Именно, он говорит, что

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{a(a+1)}=1-\frac{1}{a+1},$$

—результат, которому легко дать обоснование. Отсюда следует, что при бесконечном увеличении a бесконечный ряд (3) действительно приближается к указанному для него пределу 1. Так как отклонение этого ряда от площади квадрата $ABDE$ равно сумме отклонений рядов (1) и (2) от площадей $DCdE$ и $ABCdE$, то и эти отклонения при достаточно большом числе членов могут быть сделаны меньше любой величины.

Возможность вычислить таким путем, кроме $\ln 2$, также логарифмы других рациональных чисел основана на том, что, если AB рационально, то его можно разделить на соответственно выбранные рациональные части; точкам деления соответствуют тогда также рациональные ординаты и, следовательно, рациональные прямоугольники. Если число заключается между 1 и 2 и знаменатель есть степень 2, то можно даже воспользоваться теми же делениями и, следовательно, членами тех же рядов. Так, Броункер находит:

$$\ln\frac{5}{4}=\frac{9}{40}-\text{сегм. } EabE,$$

где

$$\text{сегм. } EabE=\frac{1}{8\cdot9\cdot10}+\frac{1}{16\cdot17\cdot18}+\frac{1}{18\cdot19\cdot20}+\frac{1}{32\cdot33\cdot34}+\frac{1}{34\cdot35\cdot36}+$$
$$+\frac{1}{36\cdot37\cdot38}+\frac{1}{38\cdot39\cdot40}+\ldots;$$

пользуясь найденным значением $\ln 2$, он вычисляет отсюда $\ln 10$.

Меркаторово определение логарифмов с помощью рядов, опубликованное в его „Логарифмотехнике“ несколько раньше броункеровского, представляет собою до некоторой степени противоположность последнему. Броункер показал, чего можно достичь, ведя исследование традиционным способом в согласии со взгля-

дами древних, но в случае нужды пользуясь новыми вспомогательными средствами. Метод Меркатора имеет ясно выраженный характер большей общности. Меркатор первый выступил публично с применением этого метода, хотя и Ньютон в то время уже владел им и получил с его помощью весьма важные результаты. Прием Меркатора вследствие его общности может быть изложен короче, чем исследование Броункера.

Мы можем воспользоваться при этом гиперболою, уже изображенной на черт. 22, относя ее к осям AB и AE. Уравнение ее имеет тогда вид:

$$y = \frac{1}{1+x}$$

или, по разложении в ряд, который Меркатор получает путем деления,

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Если мы обозначим здесь через $a (= AB)$ любое значение x, то площадь $ABCE$, или натуральный логарифм $1 + a$, мы получим, интегрируя обе части равенства от 0 до a; следовательно

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$$

Меркатор, однако, не соединил с этим совершенно новым применением квадратур, с которыми он познакомился по работам Валлиса, той точности выполнения, которая столь присуща была старым методам исследования. Так, характерно, что на его собственном чертеже $a > 1$, так что сходимость, являющаяся при его методе необходимым условием, здесь не имеет места. Необходимость сходимости была отмечена Валлисом, указавшим также, что этот метод путем незначительного расширения можно применить к вычислению любой площади, ограниченной равносторонней гиперболой, одною из ее асимптот и двумя параллелями к другой асимптоте. Если выбрать одну из этих параллелей за ось ординат, а первую асимптоту за ось абсцисс, то уравнение гиперболы можно написать в виде:

$$y = \frac{b}{1 \pm x},$$

полагая расстояние от оси ординат до параллельной ей асимптоты равным 1 и обозначая через b отрезок, который кривая отсекает на оси ординат. Двойной знак нам пришлось ввести потому, что Валлис еще не приписывает абсциссам знака. Отсюда при $0 < a < 1$ с помощью примененного Меркатором приема получается, что

$$\pm b \cdot \ln(1 \pm a) = b\left(a \mp \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \mp \frac{a^4}{4} + \ldots\right),$$

где $\pm b \ln(1 \pm a)$ есть ограниченная указанным образом площадь. Валлис обращает внимание на то, что таким образом можно

определить всякую площадь. Это всегда можно сделать путем применения нижнего знака, так как тогда осью ординат служит та из двух параллелей, которая находится от центра на большем расстоянии, и таким образом $a < 1$.

Рассматривая применение бесконечных рядов и других бесконечных приближений, мы видели, что в XVII в., продолжая традиции древних, еще тщательно следили за сходимостью этих операций. Мы говорим здесь не об абстрактной, независимой от применений сходимости самого ряда или другого взятого разложения. К такой постановке вопроса приближается лишь Броункер, которому удается доказать абстрактную сходимость ряда (1). Нет, здесь речь идет о сходимости, представляющей более непосредственный интерес (и из которой следует затем и абстрактная сходимость), — о сходимости рядов как раз к тем величинам, которые желательно было выразить и вычислить. Такая сходимость нередко вытекает почти непосредственно из способа построения последовательных приближений. Мы видели это как раньше у Валлиса (стр. 278), так и здесь у Броункера.

Несмотря на это, довольно распространена тенденция считать, что в XVII в., а также раньше совершенно не обращалось внимания на сходимость; основанием для такого заключения служит та небрежность в этом отношении, которая свойственна была XVIII в.

Действительно, может показаться странным, что XVIII в. пренебрег хорошими уроками великих предшественников. На это мы можем заметить прежде всего следующее: этими уроками нельзя уже стало пользоваться непосредственно, когда речь зашла не только об изображении с помощью бесконечных рядов или приближений величин, существование которых с самого начала не могло возбудить сомнения, но когда обратились к рассмотрению величин, которые сами должны были быть прежде всего определены с помощью рядов. Естественно, далее, что многие черты, свойственные изложению античных математиков, оказались утерянными в XVIII в., когда изложение приняло совершенно иные, новые формы, получившие в XVIII в. полное развитие. С новыми формами не было еще связано традиций, которые могли бы указать, каких ошибок надо остерегаться; самые понятия, лежавшие в основе этих новых форм, не были еще так четко определены, чтобы в каждый момент можно было правильно указать область применимости операций. Математики XVIII в. ясно видели, с какой легкостью выполнялись операции в этих новых формах, и понимали значительность полученных с помощью их результатов, но пока что имели с ними еще слишком мало дела, чтобы вполне уяснить себе границы их применимости. В защиту правильности высказанного здесь положения говорит уже и то обстоятельство, что Меркатор, у которого разложение в ряды носит отпечаток методов новейшего времени, совершенно не говорит о сходимости ряда, в то время как авторы, ближе придерживающиеся старых испытанных форм, отнюдь не игнорируют этот вопрос.

То обстоятельство, что старые приемы, имевшие по существу геометрическую природу, были надежнее и точнее приемов, носивших более алгебраический характер, или тех, которые позже были связаны с еще более широким применением алгорифмов, нисколько не находится в противоречии с тем, что в настоящее время мы, наоборот, смотрим на анализ как на средство более точное, чем большинство применений геометрических методов. Наибольшей точности можно всегда достичь в той области, где даны наиболее точные определения основным понятиям. Такой областью в рассматриваемое нами время была унаследованная от древних геометрия; в течение же всего XIX в. на передний план в этом отношении все больше и больше выступал анализ.

4. Задачи, решаемые в настоящее время с помощью диференцирования.

В то время как определение значения интеграла данной функции уже в древности получило форму задачи о квадратуре и связью квадратуры с другими задачами, решаемыми с помощью того же интеграла, пользовался уже Архимед, для задач, решаемых в настоящее время путем диференцирования, в древности не имелось столь систематического и единообразного способа их трактовки. Мы имеем здесь, в частности, в виду определение касательных, нахождение максимальных и минимальных значений и получение условий, при которых алгебраические уравнения имеют равные корни. Особенно разнообразны были решения задач на определение касательных: для доказательства того, что некоторая прямая является касательной к кривой, древние математики старались показать, что эта прямая, имея с кривою общую точку, по обе стороны этой точки расположена с одной и той же стороны кривой. Для установления этого факта применялись довольно несистематически различные известные свойства отдельных кривых. Сравнительно более ясно выступала в трактовке древних взаимная связь между указанными различными классами задач. Известная величина имеет максимальное или минимальное значение, если увеличение или уменьшение ее делает соответствующую задачу невозможной; указание на максимальное или минимальное значение обыкновенно содержится в так называемом диоризме задачи („Древние и средние века“, стр. 77). Но такое значение получается как раз тогда, когда уравнение, дающее алгебраическое решение, имеет равные корни. При обычном в древности способе решения равенство корней характеризуется тем, что кривые, с помощью пересечения которых решается задача, касаются одна другой; доказательство же того, что это обстоятельство имеет место, основывается, в свою очередь, на определении касательных к отдельным кривым.

Еще у Евклида встречаем мы диоризм, связанный с задачей, сводящейся к квадратному уравнению; именно, ставится задача

о построении прямоугольника данного периметра, равного по площади данному квадрату.

Диоризм устанавливает, что задача возможна, если сторона данного квадрата не превосходит половины данной суммы сторон. Этим устанавливается связь между задачей решения уравнения

$$x(a-x)=b^2$$

и задачей нахождения максимума выражения $x(a-x)$. Диоризм дошедшего до нас через Евтокия решения архимедова уравнения 3-й степени (Цейтен, „Древние и средние века", стр. 149)

$$x^2(a-x)=b^2c$$

содержит определение максимального значения выражения, выводимое с помощью нахождения касательных к кривым, употребляемым для решения. Подобным же образом Аполлоний, рассматривая вопрос о числе нормалей, которые можно провести из данной точки к коническому сечению, применяет определение касательных к кривым, с помощью которых он проводит эти нормали („Древние и средние века", стр. 151).

Мы хотим отметить еще один пример, относящийся к нахождению минимального значения, — тот, о котором упоминает Папп в своих вспомогательных предложениях к утерянному сочинению Аполлония об „определенном сечении". Речь здесь идет об определении на прямой с парами точек A, A' и B, B' такой точки P, для которой отношение

$$\frac{PA\cdot PA'}{PB\cdot PB'}$$

имеет заданное значение. Вообще получается две точки, но, как говорит Папп, отношение становится „простым" и наименьшим (или наибольшим), когда P, как выражаются теперь, является двойной точкой в инволюции, определяемой парами A, A' и B, B'. Как указывает Ферма, выражение „простое" обозначает, что при этом значении соответствующие точки совпадают. Таким образом здесь дело идет как раз о той зависимости между равными корнями и минимальными значениями, о которой мы только что говорили.

Так как к началу нового времени наибольшие старания были направлены в сторону реформы и развития алгебры, унаследованной от древних в геометрической форме, то выработка методов для решения все большего и большего количества уравнений до такой степени занимала внимание математиков, что диоризмы и содержащиеся в них предложения о максимальных и минимальных значениях оставались на заднем плане. Все же такие пограничные значения нередко напоминали о себе, отделяя иногда, как в уравнениях 3-й степени, те случаи, способ решения которых был уже известен, от тех, которыми еще только предстояло овладеть. Таким именно образом, как мы видели, Тарталья был приведен к интересной задаче на определение мак-

симума (стр. 92). В простых случаях, когда вопрос такого рода можно было связать с исследованием построения, выполняемого с помощью линейки и циркуля или с исследованием решения уравнения 2-й степени, этого не упускали случая сделать. Пример подобного рода определения минимального значения встречался нам, например, у Галилея (стр. 239).

Связный ряд таких определений содержится в появившемся в 1659 г. сочинении Вивиани „О максимальных и минимальных значениях" („De maximis et minimis"). Хотя к этому времени существовали уже новые методы решения этих вопросов, однако, Вивиани трактует их исключительно античным геометрическим способом. Работа его является попыткой решить загадку о том, что могла содержать в себе 5-я книга сочинения Аполлония о конических сечениях, ставшая известной через арабов лишь несколько позже.

Попытка эта оказалась удавшейся в том смысле, что Вивиани действительно снова нашел даваемое Аполлонием в упомянутой книге построение нормалей к коническому сечению, проходящих через данную точку. Правда, он знал из комментария Евтокия, что у Аполлония была там эта задача. Однако ему делает особую честь то, что он настолько чувствовал античную геометрию, что снова нашел именно решение Аполлония. Он, впрочем, не дает исследования условий возможности, которое мы находим у Аполлония. То обстоятельство, что книга аполлониевых конических сечений, воспроизведением которой задался Вивиани, должна была трактовать вопросы о максимальных и минимальных значениях, заставило его включить в свое сочинение большое количество применений их к коническим сечениям. Многие из них мало интересны; но есть среди них и такие, которым вскоре в связи с другими вопросами предстояло получить большое значение.

Когда, например, Вивиани отыскивает коническое сечение, которое должно касаться другого в их общей вершине, и, удовлетворяя одновременно какому-нибудь другому данному условию, должно при этом быть возможно большим или возможно меньшим, то он дает ему тот же (соответствующий общей оси) параметр, как и данной кривой. В этом случае конические сечения имеют, как мы сказали бы теперь, соприкосновение 3-го порядка.

Решение задач, касающихся максимальных и минимальных значений сегментов конических сечений, Вивиани связывает с тем, что огибающая хорд, отсекающих сегменты данной площади, есть коническое сечение, концентричное с данным, подобное ему и подобно расположенное. Таким же образом пользуется он огибающею поверхностью плоскостей, ограничивающих вместе с данными поверхностями вращения 2-го порядка сегменты данного объема. Как мы увидим, Торичелли к этому времени уже исследовал другой случай огибающих.

Из отдельных задач, которые Вивиани решает в конце своего сочинения, приведем следующие.

1. В прямом или наклонном конусе провести параболическое сечение так, чтобы сегмент его, ограниченный пересечением с плоскостью основания, имел наибольшую величину. Вивиани пользуется здесь определением наибольшего треугольника, образованного хордами круга.

2. Найти точку, сумма расстояний которой от трех данных точек имеет минимальное значение. Этой задачей занимался уже ранее Кавальери.

С подобного же рода задачами мы встречаемся у Григория сен-Винцента в его несколько более раннем сочинении, о котором мы выше говорили (стр. 255). Мы находим, например, здесь определение наибольшего круга, заключенного в эллипсе и касающегося его в конце большой оси, а также определение наибольшего n-угольника, вписанного в параболический сегмент. Для решения последней задачи Григорий делит хорду на $n-1$ равную часть: диаметры, проведенные через точки деления, определяют тогда $n-2$ вершины. Двумя остальными служат концы хорды.

Усвоенное в столь полной мере античное геометрическое определение максимальных и минимальных значений скоро повело к дальнейшему развитию этих вопросов — прежде всего непосредственно благодаря большим успехам новой алгебры, заменявшей постепенно геометрическую алгебру; выступили на сцену и совершенно новые соображения. Применение координат сделало ясным отмечавшийся уже Орезмом („Древние и средние века", стр. 219) факт, что вблизи максимального или минимального значения величина изменяется всего медленнее. Однако только Кеплер связал это соображение с решением задачи, представлявшей для того времени большие трудности: вписать в данный шар цилиндр наибольшего объема. Задача эта находится в его упомянутой выше „Геометрии бочек", исследующей наиболее целесообразную форму бочек и, в частности, ищущей такую форму, которая при наименьшей затрате дерева давала бы наибольший объем.

Задачу эту легко свести на определение наибольшего параллелепипеда, вписанного в данный шар. Аналогия с планиметрией ведет Кеплера к предположению, что это должен быть куб, откуда следует, что диаметр основания искомого цилиндра должен равняться произведению высоты на $\sqrt{2}$. Это свое предположение проверяет он прежде всего обычным своим индуктивным путем, вычисляя таблицу изменений объема с изменением высоты. Уже эта таблица ясно указывает, что вблизи предполагаемого максимума изменение всего меньше. Далее, приводится геометрическое доказательство того, что куб действительно дает искомый максимум. Доказательство состоит в сравнении частей другого вписанного параллелепипеда, лежащих вне куба, с частями куба, лежащими вне параллелепипеда. Это сравнение, сверх того, ясно показывает, что разность между такими частями обоих тел, по мере приближения параллелепипеда к совпадению с кубом, ста-

новится исчезающе малой по отношению к самим этим частям. Кеплер, уже при своих кубатурах считавший равными те бесконечно малые величины, которые, говоря современным языком, разнятся на бесконечно малые высшего порядка, правильно оценивает также и указанное здесь обстоятельство; это явствует из дальнейшего, где он снова указывает на незаметность изменений вблизи максимума. Он не мог еще, правда, обосновать на этом прямое определение этих максимумов; но в исследованиях о вместимости бочек это соображение являлось руководящим. Из письма Бригга, сообщающего собственное новое доказательство того, что куб представляет собою максимум, мы видим, что мысли Кеплера упали на благодарную почву.

Относительно Кеплера мы можем указать еще, что в одном месте при рассмотрении рефракции он заменяет параболу ее кругом кривизны. Исследования Галилея о движении также дали повод к новым приемам исследования непрерывно изменяющихся величин и связанных с ними вопросов исчисления бесконечно-малых.

Таким образом подготовлены были различные методы, рассматриваемые нами в дальнейшем. Они появились почти одновременно и независимо друг от друга. Поэтому в тех случаях, где не имело места взаимное влияние, мы не будем придерживаться хронологической последовательности, а будем группировать их по их характеру. Напомним прежде всего, что Валлис, как было указано на стр. 218, уже после появления большинства рассматриваемых ниже методов находил касательные почти тем же путем, как Аполлоний, пользуясь только вместо геометрической алгебры последнего новой алгеброй. Из других методов мы рассмотрим прежде всего кинематический метод Торичелли и Роберваля, в котором новые воззрения сказываются наиболее непосредственно. Познакомившись с этими их методами, мы легче убедимся, что и творцам других методов, получивших большее развитие, понятие о непрерывном изменении не было чуждо, хотя эти авторы и искали более надежного и испытанного основания в чисто алгебраическом способе изложения. Благодаря такому изложению постепенно удалось получить возможность действительно выполнять операцию, которую мы называем теперь диференцированием.

а) **Метод касательных Торичелли и Роберваля; некоторые специальные приемы нахождения касательных у Декарта.** В настоящее время общепризнано, что Торичелли и Роберваль нашли независимо друг от друга один и тот же метод построения касательных к данной кривой, обычно называвшийся до сих пор „методом Роберваля". Метод этот исходит из представления о непрерывном изменении, получившего развитие благодаря галилееву учению о движении. У Торичелли, ученика Галилея, наиболее важное применение метода связано даже непосредственно с исследованиями учителя; изложено оно, вместе с совсем кратким сообщением о других применениях, в сочинении „О движе-

нии тяжелых тел, естественно падающих и брошенных" („De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum"), предметом которого являются свободное падение и параболическое движение брошенного тела. Кроме того, сочинение это содержит новые обоснования результатов Галилея и новые предложения, связанные с ними. Напечатано оно в собрании мелких сочинений Торичелли, появившемся в 1644 г. под заглавием „Геометрические работы" („Opera geometrica").

В сочинении этом Торичелли применяет найденное Галилеем отношение между вертикальной и горизонтальной скоростью брошенного тяжелого тела, описывающего параболу $x^2 = 2\,py$, к определению касательной к этой кривой в точке (x, y). Отношение это равно $\frac{x}{p}$ или $\frac{2y}{x}$ (стр. 238). Из последнего выражения Торичелли заключает, что касательная пересекает ось параболы в точке, лежащей на отрезок $2y$ выше точки (x, y) или на отрезок y выше вершины параболы. Этот результат выводится из общего предложения, что касательная является диагональю параллелограма, сторонами которого служат горизонтальная и вертикальная скорости. Это предложение Торичелли формулирует и обосновывает. Он добавляет еще, что вследствие равенства направленных по радиусам-векторам компонент скорости точки, описывающей коническое сечение, тем же общим предложением можно воспользоваться для доказательства того, что касательная делит пополам угол между направлениями радиусов-векторов; указывает он также, что он применил это предложение для определения касательной к архимедовой спирали. Наконец, он обещает в конце следующей статьи сборника дать основанное на этом предложении определение касательной к циклоиде. Эту задачу он разрешил как для простой, так и для укороченной и удлиненной циклоиды: в частности, что касается до последних, то его краткие указания говорят, что он определял касательную путем сложения скоростей, которые точка получает благодаря параллельному передвижению вдоль основания циклоиды и вращению около центра катящегося круга.

В статье этой („О движении" — „De motu") имеется также несколько предложений относительно парабол, описываемых различными телами, бросаемыми с одинаковою скоростью из одной и той же точки. Так, Торичелли находит, что геометрическое место их вершин представляет собою эллипс, который он исследует довольно подробно. Более интересно для нас с точки зрения подготовки диференциального исчисления предложение, говорящее, что все эти параболы касаются параболоида вращения с фокусом в начальной точке движений. Доказательство ведется посредством применения геометрического определения касательных к параболе, так что оно не содержит никакого нового инфинитезимального приема; однако из того, как Торичелли применяет свое предложение к определению различных возможных бросаний, видно, что он вполне сознавал значение

предложения. В сущности, предложение это, если ограничиться рассмотрением отдельной вертикальной плоскости, дает первый пример огибающей семейства кривых линий; предложения, в которых конические сечения рассматриваются как огибающие семейства прямых — их касательных, — были установлены еще Аполлонием. При этом, однако, ни у Аполлония ни у Торичелли о точном определении столь общего понятия, как понятие огибающей, не было еще и речи.

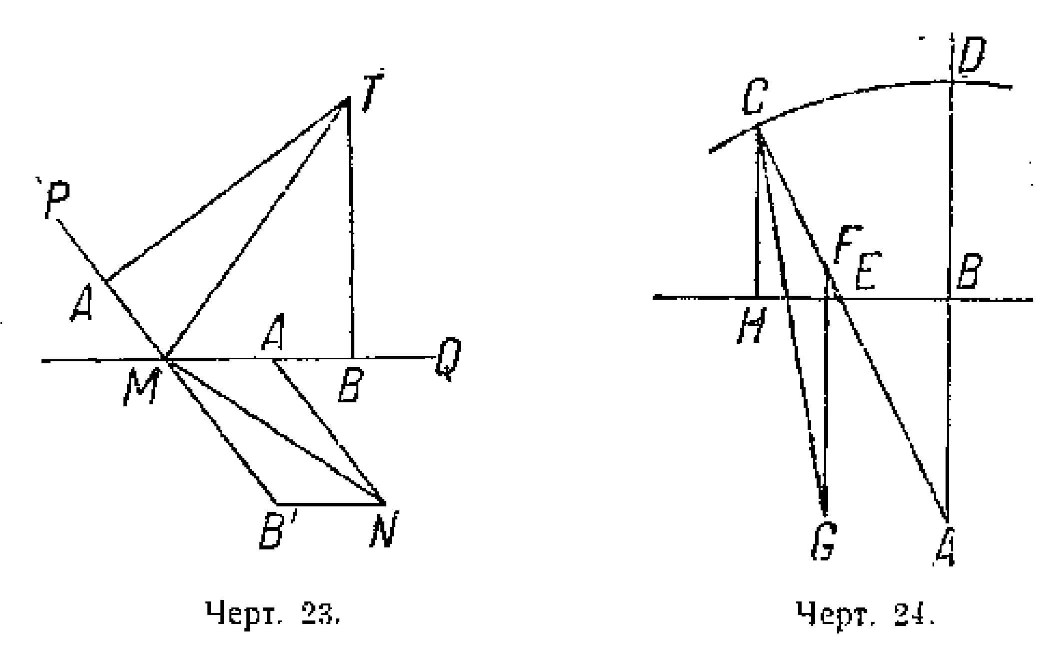
Торичелли был, быть может, первым, кто применил сложение скоростей к определению касательных: его скудные сообщения об этом оказали, как мы увидим ниже, влияние на английских математиков. Роберваль, применив сначала подобный же прием к различным отдельным случаям, о чем сообщается уже в одном из писем Мерсенна, датированном 1640 г., дал затем систематическое изложение метода и его важнейших применений. Он сделал это в сочинении о сложных движениях, представленном им в 1668 г. Французской академии наук и впоследствии опубликованном ею вместе с другими его работами в мемуарах академии. Роберваль начинает с рассмотрения сложения скоростей по правилу параллелограма и затем при помощи этого правила находит касательные к коническим сечениям с данными фокусами, к различным конхоидам, к архимедовой спирали, квадратрисе, циссоиде, циклоиде и упомянутой на стр. 206 кривой Декарта. Кончает он наброском сочинения о сложных движениях. Все найденные Робервалем результаты правильны. Однако общие его соображения, как показал в XIX в. Дюамель (Duhamel), в одном случае оказываются неточными: случай этот связан с определением кривой с помощью уравнения между расстояниями точки от двух данных точек; таким уравнением Роберваль пользуется для конических сечений. Скорости, которые складывает Роберваль (и, судя по соответствующим задачам, также и Торичелли), — это те скорости, с которыми растут или уменьшаются упомянутые расстояния r и r_1, т. е. в новых обозначениях это величины $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{dr_1}{dt}$. Эти скорости являются, однако, проекциями действительной скорости на оба радиуса-вектора, а не компонентами скорости в направлении этих прямых. Если скорости равны друг другу или взаимно перпендикулярны, то это различие не влияет на определение касательных; в силу этого у Роберваля, применяющего свой метод в таком неправильном виде лишь к коническим сечениям, результат оказывается правильным; однако эти неверные соображения его привели Монтукла (Montucla) и даже Монжа в других случаях к прямым ошибкам.

Великий современник Роберваля, Декарт, избежал этой ошибки, и притом как раз в том случае, где ее было особенно легко сделать. Так как величины, обозначенные нами через $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{dr_1}{dt}$, являются проекциями скорости движущейся точки на радиусы-векторы, то они пропорциональны косинусам углов, образуемых

с этими линиями касательною, или синусам углов, образуемых нормалью. В соответствии с этим Декарт нашел, что нормаль к кривым, изображаемым уравнениями вида:

$$ar + br_1 + c = 0$$

и получившим имя декартовых овалов, делит угол между радиусами-векторами на части, синусы которых относятся как b к a. Несомненно, что первоначально он получил этот результат, исходя из прямых геометрических инфинитезимальных соображений, а не из тех пространных выкладок, на которых он обосновал его в своей „Геометрии", следуя своему общему алгебраическому методу, о котором мы будем ниже говорить.



Черт. 23. Черт. 24.

Иначе он вряд ли, не имея заранее готового простого результата, довел бы до конца сложные выкладки. Сверх того, нужно принять во внимание, что сам Декарт в другом месте указывает, что к той задаче, которую он поставил себе сначала, этот метод неприменим. Задача, поставленная и решенная Декартом, была задачей, обратной той, которую он решает алгебраическим методом; она формулируется так: найти кривую, нормаль к которой в любой ее точке обладает тем свойством, что отношение между синусами углов, образуемых ею с прямыми, соединяющими точку с двумя данными точками, имеет данное значение. К отысканию такой кривой привели Декарта его исследования по оптике, так как кривая эта преломляла бы лучи, выходящие из одной данной точки, таким образом, что преломленные лучи проходили бы через другую точку.

Декарт использовал эти соображения и в другом случае. Из того, что нормаль образует с любыми двумя прямыми MP и MQ, проходящими через точку кривой M, углы, синусы которых пропорциональны проекциям скорости на эти направления, вытекает следующее построение нормали: на луче MQ (черт. 23) откладываем отрезок MA', равный проекции MA скорости MT

на луч MP; на продолжении луча MP откладываем отрезок MB', равный проекции MB скорости MT на луч MQ. Тогда диагональ MN параллелограма, построенного на отрезках MA' и MB', будет нормалью. В справедливости этого легко убедиться, так как из треугольника $MA'N$ получаем:

$$\sin \angle A'MN : \sin \angle B'MN = NA' : MA' = MB' : MA' = MB : MA.$$

Таким образом синусы углов, образуемых MN с направлениями MQ и MP, пропорциональны проекциям скорости на эти направления, а значит, MN — нормаль. Это свойство нормали можно применить для построения нормали к конхоиде, которое Декарт и дает на стр. 41 „Геометрии"[1]. Пусть будет (черт. 24) CD — конхоида, A — ее полюс, HB — ее асимптота. Конхоиду строят, отмечая на прямых, проведенных из A (например, на AC) точки (C), находящиеся на данном расстоянии ($EC = a$) от точки (E) пересечения прямой с асимптотою. Декарт строит нормаль CG как третью сторону треугольника CFG, сторона которого CF направлена по CA и равна расстоянию CH точки C от асимптоты HB, а другая сторона FG, перпендикулярная к асимптоте, равна отрезку EA радиуса-вектора между асимптотой и полюсом.

Если мы положим $AC = r$, $HC = y$, $EC = a$, $AB = b$, то

$$(r - a)y = ab$$

и, по диференцировании,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r - a},$$

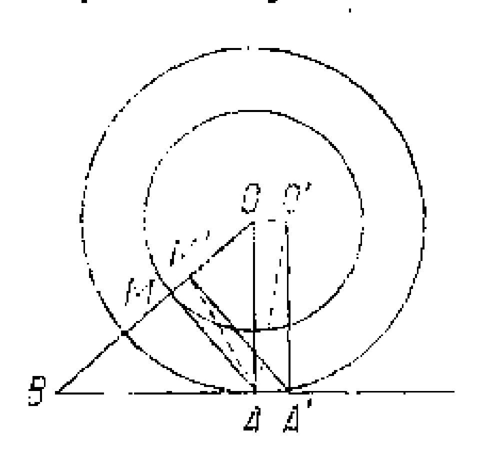
откуда видно, что CF, т. е. y и FG, т. е. $r - a$, относятся как проекции скорости движущейся точки C на HC и CA. Таким образом мы имеем перед собою как раз построение, которое, как Декарт легко мог доказать с помощью подобных треугольников, следует из приведенного принципа. Какое-нибудь другое простое объяснение построения вряд ли возможно, и из выражений в „Геометрии" Декарта видно, что он нашел это построение, во всяком случае, не своим алгебраическим методом.

Нормаль в точке циклоиды Декарт определяет, проводя ее через точку касания соответствующего положения катящегося круга и основания циклоиды. Это определение могло быть найдено непосредственным применением приема, употребленного в предыдущем случае, и возможно, что Декарт подразумевает как раз этот прием, когда он говорит о доказательстве, которое сам он предпочитает, но изложение которого было бы слишком длинным. Что касается доказательства, приводимого им, то оно состоит в том, что круг рассматривается как многоугольник с бесконечным числом сторон. Доказательство это можно применить и к другим кривым, описываемым при качении („рулеттам"). Декарт замечает это обстоятельство и пользуется им для по-

[1] Франц. изд. 1886 г. (A. Hermann).

строения нормалей к удлиненной и укороченной циклоиде. В последнем случае это построение дает ему возможность получать точки перегиба кривой. А именно, Декарт указывает, что нормаль в точке перегиба будет касательной к той окружности (концентричной с катящейся), на которой находится точка, описывающая укороченную циклоиду [1].

b) **Методы Декарта и Гудде.** Для того чтобы применять описанные нами кинематические методы к нахождению касательных и нормалей, нужно было для различных кривых прибегать к различным их свойствам и использовать в каждом отдельном случае индивидуальные особенности данной кривой. Общий метод решения задач на нахождение касательных и нормалей можно было надеяться получить только на алгебраическом пути, используя средства только что созданной аналитической геометрии. Только алгебраические методы были достаточно развиты и для того, чтобы гарантировать безусловную правильность результата. Без них легко можно было впасть в ошибки, подобные тем, которые впоследствии действительно были вызваны неясностями в изложении Роберваля. Полный метод для аналитико-геометрического определения касательных к алгебраическим кривым мы находим в „Геометрии“ Декарта; прежде всего он применяется там к доказательству уже найденных им построений касательных. Что касается до конхоиды, то он, повидимому, не выполнял необходимых выкладок, ограничившись замечанием, что доказательство можно провести таким алгебраическим путем. То обстоятельство, что Декарт раньше нашел не непосредственно касательные, а нормали к различным кривым, объясняет нам,



Черт. 25.

[1] В справедливости этого можно убедиться, например, такими инфинитезимальными рассуждениями: если нормаль MA (черт. 25) служит касательной к окружности, то касательной к укороченной циклоиде будет прямая BO, проходящая через центр окружности O. Пусть движущаяся точка M перейдет в бесконечно близкое положение M', причем прямая MA повернется около мгновенного центра вращения A на некоторый угол; на тот же угол повернется и прямая AO, причем центр O перейдет в точку O'; новым центром вращения будет теперь точка A'. Нужно поэтому показать, что угол $A'M'O$ — прямой (с точностью до бесконечно малых *второго* порядка), ибо в этом случае направление нового движения точки M' (с точностью до бесконечно малых углов второго порядка) совпадет с направлением предыдущего движения от точки M к точке M'.

Из равенства отрезков AA' и OO' и из подобия треугольников AMM' и AOO' мы получаем:

$$MM' : AA' = MA : AO = BM : AB,$$

Отсюда следует параллельность прямых AM и $A'M'$, а значит, угол $A'M'O$ — прямой. Нетрудно видеть, что пренебрегать при этом приходится бесконечно малыми порядка выше второго (при замене бесконечно малых дуг их хордами).

Прим. ред.

почему выработанный им общий алгебраический метод имеет ближайшею целью определение нормалей. Его метод действительно позволяет непосредственно обнаружить правильность заранее известных результатов, но именно то обстоятельство, что ищется не касательная, а нормаль, делает применение метода более сложным, так как требуется выполнять довольно много вычислений. Это, между прочим, отмечал и Ферма.

Метод изложен во 2-й книге „Геометрии" на стр. 33 и дальнейших и вкратце сводится к следующему. Пусть будет (a, b) точка алгебраической кривой и $(c, 0)$ точка, в которой нормаль к кривой, проведенная из (a, b), пересекает ось абсцисс. В таком случае окружность с центром в $(c, 0)$, и радиусом $\sqrt{(a-c)^2+b^2}$ должна иметь с кривою две общие точки, слившиеся в одну (a, b). Если на оси абсцисс точку $(c, 0)$ взять по произволу, то абсциссы точек пересечения кривой с окружностью с центром $(c, 0)$ и радиусом $\sqrt{(a-c)^2+b^2}$ определятся из уравнения, полученного исключением y из уравнений кривой и окружности. Если перенести все члены этого уравнения в левую часть, то в эту левую часть войдет множителем $x-a$, так как $x=a$ дает одну из точек пересечения. Но так как точка $(c, 0)$ должна лежать на нормали кривой, то вторая точка пересечения должна совпасть с первой, т. е. $x=a$ будет двукратным корнем уравнения, и в левую часть должен войти множителем $(x-a)^2$. Это требование накладывает на величину c одно условие, которому она должна удовлетворить. Найдя величину c, мы определим положение нормали. Чтобы получить определяющее c уравнение, Декарт применяет метод неопределенных коэфициентов.

Если уравнение, определяющее абсциссы точек пересечения кривой с окружностью, есть уравнение r-й степени, то Декарт полагает его левую часть тождественно равной произведению $(x-a)^2$ на многочлен $(r-2)$-й степени с неопределенными коэфициентами. Уравнение для определения c образуется тогда путем исключения неопределенных коэфициентов этого выражения из уравнений, получаемых приравниванием соответствующих коэфициентов обоих тождественных выражений r-й степени. Декарт подчеркивает большое значение этого общего алгебраического метода. При помощи этого метода Декарт исследовал также в оставшейся после него рукописи, не имеют ли его овалы более нежели два фокуса; из различных мест видно, что он знал о третьем фокусе.

Декарт дает ряд примеров применения своего метода; он прилагает его к нахождению касательных конического сечения, отнесенного к оси, и к декартову овалу. Между тем метод неопределенных коэфициентов можно применить к определению касательных в значительно более простой форме. Для этого надо, как делает это Скоутен в своем комментарии в „Геометрии" Декарта, найти таким путем условия, при которых две точки пересечения прямой и данной кривой сливаются в одну. Гудде

дает декартову алгебраическому методу дальнейшее развитие и новые применения, пользуясь им и для других операций, для которых мы употребляем теперь диференцирование. Он делает это в двух своих работах: о приведении уравнений и о максимальных и минимальных значениях — статьях, также вошедших в качестве дополнений в декартову „Геометрию", изданную Скоутеном на латинском языке.

Гудде дает алгебраический признак существования равных корней алгебраического уравнения и пользуется им как общим алгебраическим или аналитическим исходным пунктом для различных исследований, которые мы отнесли бы теперь к диференциальному исчислению. Правило Гудде имеет даже более общую форму, чем то, которое мы получаем теперь с помощью диференциального исчисления. Заключается оно в следующем: если корень уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

является кратным, то он удовлетворяет также уравнению:

$$ax^n + (a+b) a_1 x^{n-1} + (a+2b)\, a_2\, x^{n-2} + \ldots + (a+nb) a_n = 0,$$

получаемому умножением коэфициентов данного уравнения на члены произвольной арифметической прогрессии.

В начале второй из упомянутых работ Гудде доказывает это утверждение для уравнения 5-й степени. Если число y является двойным корнем этого уравнения, то его левую часть можно написать в виде:

$$(x^2 - 2yx + y^2)(x^3 + px^2 + qx + r),$$

или

$$\begin{aligned} x^5 - 2yx^4 + y^2\, x^3 &+ \\ + px^4 - 2ypx^3 + py^2\, x^2 &+ \\ + qx^3 - 2qyx^2 + qy^2\, x &+ \\ + rx^2 - 2ryx + ry^2&. \end{aligned}$$

Если применить указанную операцию умножения коэфициентов на члены арифметической прогрессии только к множителю

$$x^2 - 2yx + y^2,$$

то получается:

$$ax^2 - 2(a+b)\, yx + (a+2b)\, y^2,$$

что при $x = y$, очевидно, равно 0. То же имеет место и для каждой из четырех строк, на которые мы разбили левую сторону данного уравнения. Если для каждой из четырех строк воспользоваться соответственно рядами:

$$\begin{array}{lll} a, & a+b, & a+2b, \\ a+b, & a+2b, & a+3b, \\ a+2b, & a+3b, & a+4b, \\ a+3b, & a+4b, & a+5b, \end{array}$$

и образованные таким путем выражения сложить, то полученное выражение также будет обращаться в нуль при $x = y$. Это выражение и стоит в левой части второго нашего уравнения.

Гудде отмечает, что произволом в выборе применяемой арифметической прогрессии можно воспользоваться для облегчения вычислений; в частности, он указывает на прогрессию

$$0, 1, 2, \ldots, n,$$

при пользовании которой пропадает член n-й степени. Применяет он также и прогрессию

$$n, n-1, \ldots, 1, 0,$$

при употреблении которой левая часть нового уравнения по сокращении на x дает производную левой части данного. Если записать данное уравнение в виде $f(x) = 0$, то второе уравнение Гудде можно представить в виде:

$$a f(x) + b [n f(x) - x f'(x)] = 0.$$

Повторным применением этого правила можно, пробуя, не имеет ли производное уравнение двойного корня, найти, не имеет ли начальное тройного и т. д.

Гудде указывает уже в первой своей работе, что данное им правило можно применить как к определению касательных, так и к решению задач на maxima и minima. Он берет рассмотренные Декартом примеры и показывает, что его признак существования равных корней ведет к более простому определению величины, обозначенной нами выше (стр. 317) через c, чем декартово непосредственное применение метода неопределенных коэфициентов. Определение максимальных и минимальных значений величины, для которой имеется целое рациональное выражение или которая содержится в коэфициентах алгебраического уравнения, рассматривается во второй статье. Гудде считает при этом лишним доказывать, что такие значения получаются тогда, когда корни уравнения становятся равными Он определенно подчеркивает, что его метод применим и тогда, когда уравнение не является линейным относительно величины, которая должна иметь максимальное или минимальное значение. т. е. когда эта величина не является рациональной функцией. Хотя этот способ является чисто алгебраическим, однако, как мы видим, вычисления по существу совпадают с теми, к которым приводит теперь диференциальное исчисление.

Две упомянутые выше работы Гудде являются лишь извлечениями из работы бо́льших размеров, к сожалению, никогда не увидевшей света. Из его краткого сообщения относительно ее плана мы видим, что он исследовал также maxima и minima функций нескольких переменных. Рассматривая постепенно различные независимые переменные как неизвестные в уравнении, к которому он применял свой метод, он мог также и здесь определять maxima и minima в тех случаях, в которых о существовании их

известно заранее. Однако он признает, что не имеет (для общего случая) средств решить, является ли найденное значение, могущее быть максимальным или минимальным, в действительности тем или иным, или же ни тем ни другим. Оговорка эта касается и того случая, когда имеется лишь одна переменная, а также относится и к методам, упоминаемым в дальнейшем; значение ее, однако, существенно ослабляется тем обстоятельством, что, раз только найдены значения независимых переменных, могущие, вообще, дать максимум или минимум, то обычно легко бывает в каждом отдельном случае видеть, дают ли соседние значения увеличение или уменьшение зависимой переменной. Гудде отмечает еще роль, которую играет его метод при „ограничении“ (determinatio) уравнений — термин, которым в то время называли то, что у древних именовалось диоризмом. Действительно, случаи, в которых уравнение имеет равные корни, и образуют границы между теми, в которых оно имеет большее или меньшее число корней.

Описание чисто алгебраического способа получения тех величин, которые мы называем теперь рядом производных левой части алгебраического уравнения $f(x)=0$, находим мы еще в конце столетия в алгебре Ролля. Они появляются у него как коэфициенты уравнения, образуемого заменою x через $x+z$. Ролль устанавливает, что между двумя последовательными корнями уравнения $f^{(r+1)}(x)=0$ имеется не более одного корня уравнения $f^{(r)}(x)=0$. Доказательства этого в его алгебре нет. Он не мог, однако, в то время ничего не знать о применениях производной в исчислении бесконечно-малых — применениях, из которых легко вытекает его предложение, особенно если изобразить $y=f(x)$ геометрически. На то, что сам Ролль нашел свое предложение именно таким образом, указывает уже заглавие маленькой книги, которая должна содержать его доказательство,— „О геометрических представлениях“ („Sur les effections géométriques“).

Ньютон дал в своей составленной первоначально в виде лекций „Всеобщей арифметике“ („Arithmetica universalis“) способ определения крайних границ корней, вытекающий из предложения Ролля.

c) **Метод Ферма; правила Гюйгенса и Слюза.** Ферма сообщает в письме к Декарту (1638) свой способ определения значений x, при которых зависящая от x величина [обозначим ее через $f(x)$] получает максимальное или минимальное значение. Способ этот заключается в том, что Ферма прежде всего составляет уравнение, которое мы записали бы теперь в виде:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

а затем, выполнив деление на h, полагает $h=0$. Таким образом он приравнивает нулю величину, которую мы называем теперь производной $f'(x)$.

Хотя Ферма и не дает точного обоснования правильности этого приема, однако, имеются указания, что он также исходил из того соображения, что максимальным или минимальным значением $f(x)$ является такое, которое делает два соответствующие значения x равными. Об этом свидетельствует уже данное им и упомянутое выше объяснение термина Паппа „простое отношение" (стр. 308); еще определеннее то же соображение выступает в относящемся к более раннему времени сообщению его о различных применениях его метода. Он просто дает здесь x два значения x и y и полагает $f(x)=f(y)$; затем он образует с помощью деления уравнение

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$$

и полагает $x=y$. Но, говорит он, деление на двучлен представляет неудобства. Он избегает их, принимая $y=x+h$. Таким образом Ферма приходит к своему методу чисто алгебраическим путем; вместе с тем, однако, метод его имеет связь с обстоятельством, замеченным уже Орезмом и после него Кеплером и состоящим в том, что функция не меняется как раз в тот момент, когда она проходит свой максимум или минимум. Насколько недалек путь от чисто алгебраического обоснования к обоснованию инфинитезимальному, мы видим из гюйгенсова доказательства правила Ферма: оно очень мало отличается от приведенного здесь пояснения, но величину h, сперва выступающую у Ферма как конечная, а после деления приравниваемую нулю, Гюйгенс называет бесконечно малой.

Только что указанный прием Ферма непосредственно может быть применен в тех случаях, когда $f(x)$ есть целая рациональная функция; в качестве примеров этого Ферма решает первые две из упомянутых на стр. 308 античные задачи. Не проходит он и мимо применения этого приема к дробным функциям; так, он решает дошедшую до нас через Паппа задачу о минимальном значении дроби, числитель и знаменатель которой представляют собою в его алгебраическом изображении выражения 2-й степени относительно x. Чтобы найти максимум иррационального относительно x выражения $y=x+\sqrt{ax-x^2}$, в котором квадратный корень геометрически изображается ординатою окружности, Ферма приводит уравнение к рациональному виду и говорит затем, что надо найти максимум выражения $y^2=ax+2xy-2x^2$.

Хотя правая часть этого выражения содержит y, однако Ферма применяет свой обычный прием и находит:

$$a+2y-4x=0;$$

полученное уравнение вместе с первоначальным позволяют найти максимальное значение y и соответствующее значение x. Прием Ферма совпадает, таким образом, с определением макси-

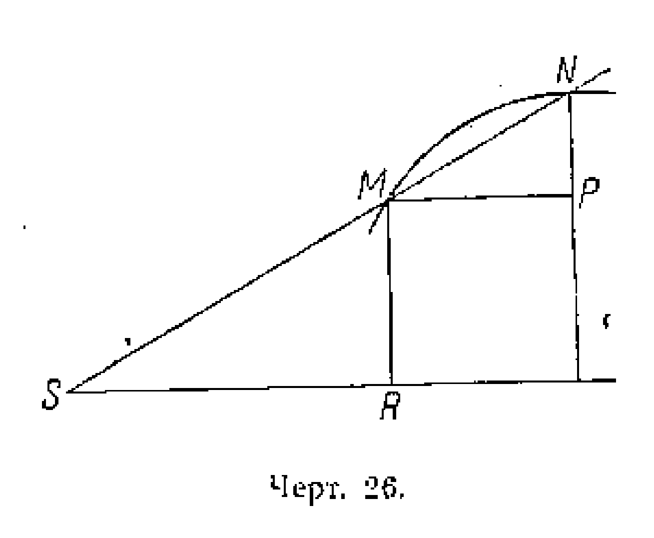
мальных и минимальных значений y с помощью данного уравнения

$$f(x, y) = 0$$

и уравнения

$$\frac{df(x, y)}{dx} = 0.$$

Из многочисленных примеров, к которым Ферма, судя по различным сделанным им сообщениям, применял свой прием, упомянем об определении конуса наибольшего объема и цилиндра с наибольшею поверхностью, вписанных в данный шар, а также о задаче, имеющей большую важность для объяснения закона преломления лучей. Задача эта заключается в требовании соединить две точки, лежащие по разные стороны плоскости, такою ломаною, которая проходилась бы в возможно более короткое время, если скорости по обе стороны плоскости находятся в данном отношении.



Черт. 26.

В близком родстве с приемом Ферма для определения максимальных или минимальных значений находится его прием для определения касательной к данной кривой в данной ее точке M, координаты которой мы обозначим через x и y. Ферма начинает с того, что заменяет касательную секущей, проходящей через данную точку кривой и точку ее, имеющую абсциссу $x+h$. Уравнение кривой пусть будет $y = f(x)$. Из подобия $\triangle MNP$, образованного (черт. 26) хордою MN и прямыми, параллельными осям, и $\triangle SMR$, катетами которого служат ордината $MR = y$ и отрезок SR, при $h = 0$ переходящий в подкасательную, следует:

$$SR = \frac{RM \cdot MP}{PN} = \frac{f(x) \cdot h}{f(x+h) - f(h)};$$

следовательно, подкасательная, которую мы обозначим через S_t, имеет то значение, которое принимает это выражение, если сперва произвести сокращение на h, а затем положить $h = 0$. Треугольник PMN, в котором h уменьшается до 0, есть тот же самый треугольник, которым пользуется Паскаль при своих квадратурах и который Лейбниц назвал впоследствии характеристическим. Правило, указанное Ферма, совпадает с тем, которое ведет к выражению, имеющему в современных обозначениях форму:

$$S_t = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Это выражение получается непосредственно, если кривая задана таким образом, что y является рациональной функцией x. В то время, когда прямоугольные координаты не применялись еще последовательно для изображения всевозможных кривых, свойствами последних пользовались в различных случаях различным образом. Так как, однако, указанный способ изображения благодаря сочинениям Декарта и Ферма все более и более распространялся, то определенные пояснения Ферма относительно того, как надо применять метод, когда кривая дана уравнением $f(x, y) = 0$, нерешенным относительно y, имели большую важность. Поводом к этим пояснениям послужило высказанное Декартом мнение, что прием этот было бы трудно применить к кривой, носящей теперь имя декартова листа ($x^3 + y^3 = 3axy$). Указания Ферма, связанные с этою кривою, имеют целью выяснить, что подкасательная S_t может быть определена из уравнения, которое получается, если в уравнении, имеющем в современных обозначениях форму

$$\frac{f\left(x-h,\ y-\frac{y}{S_t}h\right)-f(x,y)}{h}=0,$$

положить $h = 0$. Так как $\frac{y}{S_t}$ равно (если не обращать внимания на знак) теперешней производной $\frac{dy}{dx}$, то выполнение указанных операций совершенно совпадает с составлением диференциального уравнения

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

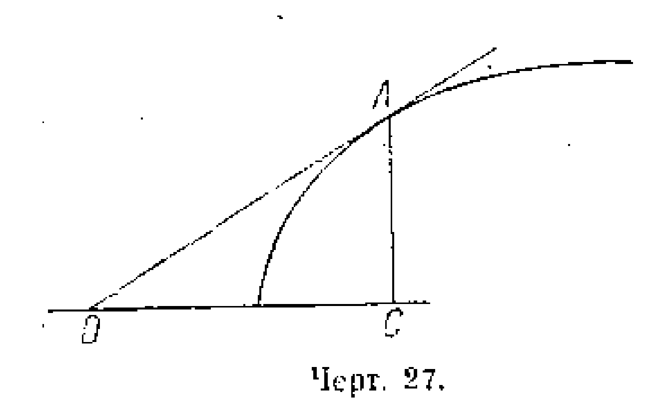
Ферма правильно отмечает как преимущество то обстоятельство, что этот прием позволяет избегнуть решения уравнения и связанного с ним появления иррациональных величин. Если же уравнение уже разрешено относительно y и содержит иррациональности, то Ферма начинает с устранения имеющихся иррациональных величин. В одном письме он сообщает, что может найти касательную к столь сложной кривой как

$$y=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{cx-x^2}+\sqrt{\frac{x^3-ax^2}{b}}+\sqrt{\frac{x^4+bx^3}{a^2+x^2}};$$

из более позднего письма видно, что он сперва освобождает это уравнение от радикалов и затем уже применяет свой метод.

Ферма дал применение своего метода или указания по поводу этого применения по отношению к такому количеству кривых, что общая его применимость выступает совершенно ясно. В качестве примеров для определения касательных он брал частью знакомые кривые, частью новые, как, например, только что указанную кривую или кривую $\frac{y^2}{a^2}=\cos\frac{x}{b}$. Применил он свой метод и к определению касательной к циклоиде; это обстоятельство

заставило, наконец, и Декарта признать преимущества метода Ферма; сам Декарт тщетно пытался применить к этой задаче, уже ранее решенной им другим путем, свой собственный алгебраический метод. Первоначальные несправедливые нападки Декарта на метод Ферма (стр. 42) вызвали последнего на разъяснения, носившие общий характер. Так как Ферма ставит определение касательных в связь с нахождением максимальных и минимальных значений, то Декарт приписал ему, например, ту ошибку, как будто бы по его мнению касательная DA (черт. 27), проведенная из точки D, лежащей вне кривой, должна быть прямою, на которой между D и точкой кривой A отсекается наибольший или наименьший отрезок. Ферма отвечает на это, во-первых, что такое определение дало бы не касательную, а нормаль, проведенную из D, и, во-вторых, что в том случае, когда D лежит на оси абсцисс, максимальную или минимальную величину приобретает отношение между ординатою CA и подкасательною CD. Первое обстоятельство, несомненно, было ясно и Декарту, у которого, как мы видели, собственный его способ нахождения касательной основан на определении нормали.



Черт. 27.

Из переписки между обоими исследователями мы видим, что оба они умели применять свои методы к таким, например, задачам, как проведение касательной, имеющей данное направление. Возникшая между Декартом и Ферма полемика, в которой на стороне Ферма приняли также участие Паскаль-отец и Роберваль, дала последнему случай обнаружить, что декартов лист имеет двойную точку. Так как, однако, Роберваль не принял во внимание знаков и повторил лист в 4 квадрантах, то точка эта оказалась у него четверной.

Заметим еще, что Ферма не довольствовался простым определением касательной, но интересовался также вопросом о положении касательной по отношению к кривой. Правда, он не дал подробных указаний по этому поводу; однако он оставил определенное правило относительно того, как найти точки перегиба данной кривой. Прежде всего он определяет касательную в любой точке и угол, образуемый ею с осью. Затем он ищет максимальное или минимальное значение этого угла. Так как тангенс этого угла получается в виде функции абсциссы, то решение этой задачи можно выполнить с помощью уже описанного метода Ферма. Производимые при этом операции вполне совпадают с теми, которые мы выполняем теперь, составляя уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Ферма не оставил ни одного примера применения этого правила; вопрос этот, однако, видимо, интересовал его современников, о чем свидетельствуют принадлежащие им определения точек перегиба разных кривых. Так, Гюйгенс в дополнении к своему сочинению о квадратуре круга указывает построение точек перегиба конхоиды. Вследствие того, что вопрос этот связан с уравнением 3-й степени, Гюйгенс выполняет построение употребительным еще тогда античным приемом с помощью параболы и окружности. Доказательства он не дает, так что мы не видим, как он получил уравнение 3-й степени; Скоутен в своем комментарии к декартовой „Геометрии" указывает, как могло быть проведено доказательство. Он определяет точку перегиба как точку, в которой сливаются три точки пересечения с одною и тою же прямою; он пользуется при этом, как и при своем определении касательной к конхоиде (стр. 317), декартовым методом неопределенных коэфициентов. Слюз нашел кривую, проходящую через точки перегиба всех конхоид, имеющих общий полюс и общую асимптоту; подобные же определения точек перегиба выполняет он и для других кривых. Вопросы этого рода неоднократно поднимаются в письмах Слюза и Гюйгенса. Последний находит, например, точки перегиба кривой

$$y = kx^2 (a - x).$$

По его предложению эту же задачу решили Гейрат (Heuraet) и Гудде; повидимому, они определяли при этом точку пересечения касательной в точке перегиба с осью как такую точку, из которой выходят две совпадающих касательных. (О декартовом определении точек перегиба укороченной циклоиды см. стр. 316).

Ферма, говоря о кривых, касательные к которым он может найти с помощью своего метода, называет среди них кривую, ордината которой равна длине дуги параболы ($y^2 = 2px$), отсчитываемой от вершины до точки параболы, имеющей ту же абсциссу (x), как и соответствующая точка новой кривой; упоминает он также кривую

$$y = \sqrt{(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)},$$

где y_i и s_i обозначают ординату и длину дуги, соответствующие точке произвольно заданной кривой, имеющей абсциссу x. Мы видим из этого, что Ферма умел применять свою новую операцию, которую мы называем теперь диференцированием, к выражениям длин дуг, т. е. к таким выражениям, которые он сам определяет посредством квадратуры (стр. 286). Эта взаимно обратная зависимость между диференцированием и квадратурою, которой впоследствии суждено было получить столь большое значение, у Ферма, однако, встречается лишь совершенно случайно. Когда он указывает, далее, как на третье применение своего метода на определение некоторых центров тяжести, то мы не находим здесь ни одного нового примера применения упомянутой взаимно обратной зависимости, хотя эти определения

как по своей природе, так и по обычной для того времени трактовке сводятся к квадратурам (интегрированию). Ферма применяет свой прием только в таких случаях, когда вид выражения, дающего центр тяжести, ему известен, и остается лишь определить значение входящей в это выражение константы; диференцирование служит ему лишь для того, чтобы из тождества, содержащего эту постоянную, получить другое равенство, которое также должно быть тождеством, но только при определенном значении неизвестной постоянной. Ферма определяет, таким образом, центр тяжести сегмента параболоида. Он предполагает, что отношение, в котором эта точка делит высоту сегмента или (если основание сегмента не перпендикулярно к оси) содержащуюся внутри сегмента часть диаметра, не зависит от величины высоты, т. е. таково же, как в другом сегменте с высотою $x-h$. Данный сегмент представляет собою сумму последнего сегмента и слоя, центр тяжести которого лежит внутри слоя на общей оси. Ферма применяет предложение об определении центра тяжести тела, состоящего из двух других тел, центры тяжести и объемы (массы) которых известны, и полагает затем $h=0$. Если отвлечься от того обстоятельства, что отсеченный слой должен быть бесконечно малым, то прием представляет некоторое сходство с архимедовым определением центра тяжести параболического сегмента; действительно, Архимед также основывается на том, что центры тяжести различных параболических сегментов должны делить их диаметры в одном и том же отношении („Древние и средние века", стр. 132). Что же касается до применения центра тяжести бесконечно малой части рассматриваемого тела, то здесь прием Ферма совпадает с приемом ла-Файля (стр. 232).

Ферма упоминает еще о четвертом применении своего диференцирования, а именно, о выводе некоторых предложений из области теории чисел (стр. 159); в чем состояло это применение, остается, однако, не совсем ясным.

Соответствие, существующее между применениями одного и того же метода к различным примерам и к совершенно различным классам задач, проявляется у Ферма в единообразии его символики. Величину, которую мы называли h, он везде обозначает через E; через A он обозначает в задачах на maxima и minima независимую переменную, а в задачах на определение касательной подкасательную.

То, что рассказано здесь о диференцированиях, выполняемых Ферма, изложено им в работах и письмах, напечатанных много времени спустя после их написания. Однако с этими работами и письмами были знакомы ученые, наиболее активно содействовавшие успехам математики. Поэтому бóльшая часть авторов, о работах которых будет итти речь в дальнейшем, была знакома с методом Ферма, если не во всех рассмотренных нами здесь частностях, то хотя бы в основном; некоторые из этих авторов работали все же довольно независимо от него. Гюйгенс в ма-

леньком сочинении об определении максимальных и минимальных значений непосредственно развивает идеи Ферма. Успех, достигнутый им, заключается в том, что он не возвращается всякий раз к принципиальной стороне дела, но выводит из общего приема Ферма правила, позволяющие получать механически величины, обращение которых в нуль соответствует максимальному или минимальному значению целой рациональной функции $f(x)$ или дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Это те же правила, по которым в современном диференциальном исчислении из x и коэфициентов и показателей многочленов $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ образуются выражения $f'(x)$ или $\psi(x)\cdot\varphi'(x)-\varphi(x)\cdot\psi'(x)$. Если метод Ферма совпадает с диференцированием, то правила Гюйгенса являются уже частью диференциального исчисления (без символов диференцирования) — различие, которое мы в дальнейшем будем иметь случай выяснить более детально. Нечто подобное можно сказать о правиле Слюза, позволяющем, имея уравнение $f(x, y)=0$ алгебраической кривой, непосредственно получать числителя и знаменателя дроби, которую мы обозначали, говоря о Ферма, через $\frac{S_t}{y}$ и которую Ферма в каждом отдельном случае вычислял с помощью кропотливого применения своего метода. Что касается до доказательства правила Слюза, то в более позднем письме он сообщает вспомогательные предложения, на которых оно основано. Судя по ним, он получил свое правило приблизительно следующим образом (для краткости мы будем пользоваться в дальнейшем изложении современной символикой).

Пусть (x, y) и (x_1, y_1) будут две точки кривой, и пусть отыскивается касательная к этой кривой в точке (x, y). Предположим, что уравнение этой кривой приведено к целой рациональной форме, так что оно имеет вид:

$$\sum ax^m y^n = 0.$$

В таком случае имеем также

$$\sum ax_1^m y_1^n = 0.$$

Путем вычитания и простых преобразований получаем отсюда:

$$\sum [ax^m (y^n - y_1^n) + ay_1^n (x^m - x_1^m)] = 0;$$

деля на $y-y_1$ и полагая затем [после выделения множителя $(x-x_1)$ во второй группе слагаемых]

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad \frac{x-x_1}{y-y_1} = -\frac{S_t}{y},$$

имеем:

$$\frac{S_t}{y} = \frac{\sum na\, x^m y^{n-1}}{\sum ma\, y^n x^{m-1}}.$$

То, что Слюз, как это часто бывало в то время, не дал сам полного изложения своего доказательства, объясняется тем, что у него это изложение должно было быть гораздо пространнее. Так, понятие предела, которым он должен был бы пользоваться, тогда еще не было установлено; он не мог поэтому сказать, что

$$\lim \frac{x - x_1}{y - y_1} = - \frac{S_t}{y},$$

но должен был, как мы видим из его последнего вспомогательного предложения, сравнивать $\frac{x - x_1}{y - y_1}$ с равным $- \frac{S_t}{y}$ значением $\frac{x - x_1}{y - y_2}$, где (x_1, y_2) есть точка касательной.

Максимальные и минимальные значения Слюз находит, предполагая, что касательная к кривой, ордината которой представляет собою соответствующую функцию, параллельна оси абсцисс. О слюзовом определении точек перегиба мы уже упоминали. Гюйгенс вывел впоследствии те же правила для нахождения касательных непосредственно из способа Ферма. В письмах своих он дает правильные разъяснения относительно знака, который получает подкасательная при вычислении по этим правилам.

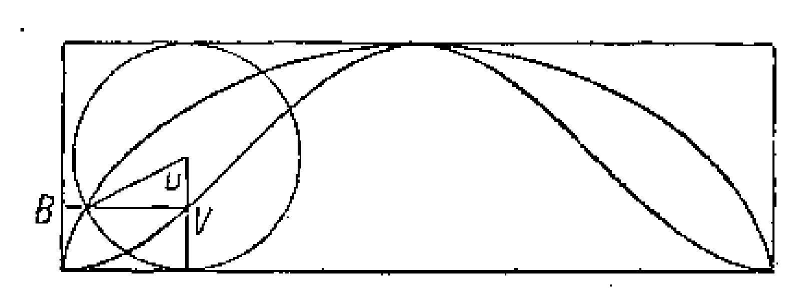
5. Циклоида; гюйгенсово применение ее к механике; эволюты.

В предыдущем циклоида неоднократно встречалась нам как главный объект применения постепенно появлявшихся и имевших очень разнообразные формы инфинитезимальных методов. Она привлекала к себе внимание, так как являлась неалгебраическою кривою, к которой часто оказывалось очень легко применить методы, первоначально выработанные лишь для алгебраических кривых; как мы теперь знаем, это обстоятельство является следствием того, что она имеет алгебраическое и притом очень простое диференциальное уравнение. Простота эта и связанная с ней простота получаемых здесь свойств и выражений оказывается даже столь большой, что в некоторых случаях представлялось целесообразным выбрать за исходный пункт именно исследование циклоиды и затем уже применить соответствующие методы и побочные результаты к рассмотрению других кривых.

Указанные обстоятельства дают нам основание сопоставить здесь важнейшие из встречавшихся нам выше задач о циклоиде и рассмотреть некоторые из них несколько подробнее; затем мы обратимся к весьма важному применению, данному этой кривой Гюйгенсом, и к связанным с этим общим успехам в области геометрии.

Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся по прямой, привлекла к себе внимание Галилея, который назвал ее циклоидой. Из учеников Галилея касательную к ней нашел прежде всех Вивиани; затем определил ее Торичелли, применивший для

этого свой кинематический метод, позволивший ему найти также ограниченную циклоидой площадь. Независимо от этих исследований в 1634 г. той же кривой начали заниматься во Франции; здесь она получила название „рулетты" или „трохоиды". В указанном году Роберваль нашел, что площадь, ограниченная циклоидой и ее основанием, в три раза больше площади катящегося круга; вслед затем Декарт и Ферма, не знавшие робервалева вывода этого результата, дали ему новые доказательства. Роберваль и Декарт пользовались в своих доказательствах равенством различных отрезков, отсекаемых на прямых, параллельных основанию. Роберваль прибегнул к введению вспомогательной кривой, которую он называет спутницей циклоиды и которая (черт. 28) представляет собою геометрическое место проекции V точки B циклоиды на соответствующий ей вертикальный диаметр катящегося круга. В современной терминологии кривая эта есть синусоида; действительно, если принять за ось абсцисс геометрическое место положений центра катящегося круга, а за ось ординат начальное положение его вертикального диаметра, то любая точка кривой, о которой идет речь, имеет координаты au и $a\cos u$, где a — радиус круга и u — угол, на который круг повернулся. Кривая эта делит площадь $2a \cdot 2a\pi$ прямоугольника, описанного около циклоиды, на две части, равенство которых вытекает из соображений симметрии. Кроме того, отрезок прямой, параллельной основанию, заключенный между циклоидой и спутницей ее, равен половине хорды катящегося круга. Поэтому два лепестка, образованные циклоидой и спутницей ее, имеют площадь, равную площади катящегося круга πa^2. Следовательно, вся площадь между циклоидой и ее основанием равна:



Черт. 28.

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\pi + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Естественно, что Роберваль, зная длины различных отрезков BV, мог найти с помощью квадратур (вычисление которых в то время продвигалось вперед все дальше и дальше) и объемы, образуемые вращением ветви циклоиды как около основания, так и около оси симметрии.

Паскаль пошел еще дальше: он вычислил площади и объемы тел вращения, получаемых при замене основания циклоиды любою прямой, параллельной ему; далее, он вычислил центры тяжести этих площадей и объемов, а также центры тяжести половин этих объемов, отсекаемых плоскостью, проходящей через ось вращения. В июне 1658 г. он организовал конкурс на решение этих

задач; однако до истечения довольно краткого срока конкурса (октября того же года) прямых и заслуживших одобрение жюри ответов на эти вопросы не поступило, хотя и были присланы некоторые ценные вклады в теорию циклоиды; тогда Паскаль опубликовал (под псевдонимом Амоса Деттонвилля) не только свое собственное решение предложенных задач, но вместе с тем и связный ряд методов для нахождения квадратур и центров тяжести, — методов, о которых мы уже говорили (стр. 265 и сл.), и применение которых отнюдь не ограничивается циклоидой. К сожалению, Паскаль присоединил сюда очень необъективный исторический обзор, в котором он был слишком пристрастен к своему другу Робервалю и несправедлив к Торичелли.

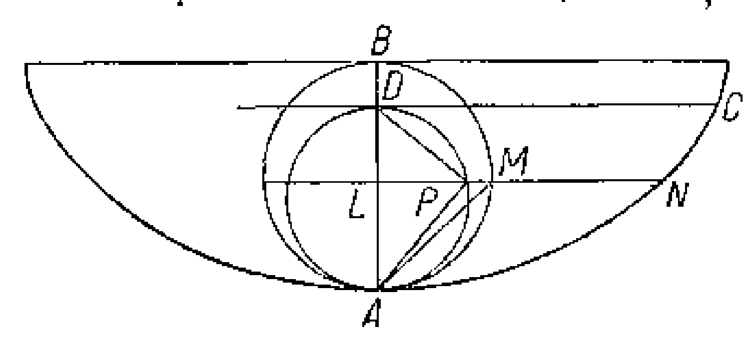
Касательная к циклоиде была, как мы видели, определена Декартом (стр. 315), Ферма (стр. 313) и Робервалем (стр. 313) совершенно различными способами. Хронологически решение Декарта было первым; оно отличается вместе с тем своею простотою и приложимостью ко всем кривым, образуемым качением (рулеттам). С формальной стороны оно, однако, не вполне соответствовало требованиям того времени и, по признанию самого Декарта, не вполне удовлетворяло и его самого. Этот недостаток был впоследствии устранен Гюйгенсом, доказавшим в своем главном труде, о котором речь будет итти ниже, правильность приема Декарта с такой же общностью, как это сделал и сам Декарт, но притом в форме, вполне удовлетворяющей античным требованиям.

Мы говорили уже (стр. 287) о том толчке к занятиям задачами о спрямлении кривых, который дало уже одно только сообщение о вреновом спрямлении циклоиды (сделанное в 1658 г. в связи с паскалевым конкурсом). Доказательство Врена (оно было позднее сообщено Валлисом) основано на том свойстве касательной, что она проходит через точку катящегося круга, диаметрально противоположную точке касания с основанием, или что она параллельна соответственно определенной хорде неподвижного круга. На основе этого доказывается (доказательство имеет форму, предписываемую методом исчерпывания), что, как мы сказали бы теперь, элемент дуги вдвое больше диференциала вышеуказанной хорды. При геометрическом доказательстве этого Врен рассматривает ряд хорд, образующих геометрическую прогрессию; несомненно, однако, что это совпадение с данными Ферма квадратурами парабол и гипербол (стр. 258) является чисто случайным. Врен связывает с этой ректификацией доказательство того, что дуги удлиненной и укороченной циклоиды равны некоторым дугам эллипсов.

Что касается до других обоснований найденного Вреном результата, то надо упомянуть, что Роберваль применяет и здесь свои соображения из области кинематики. Скорость, с которою точка движется по циклоиде, слагается из скорости движения центра катящегося круга и скорости, с которою точка катящейся окружности вращается вокруг центра. Отсюда можно сделать заключение, что скорость движения по циклоиде пропорциональна отрезку

нормали, находящемуся между кривою и основанием. Ректификация сводится, таким образом, к квадратуре, которую в настоящее время мы могли бы выразить с помощью интеграла $\int 2a \sin \frac{1}{2} u\, du$.

После стольких многосторонних и обстоятельных исследований циклоида была так хорошо изучена, что Гюйгенс смог напасть на мысль, которой он дал затем полное обоснование,—на мысль, что циклоида как раз является кривой, в которой он нуждался для регулирования своих часов, а именно такой кривой, на которой тяжелая точка совершает тавтохронные колебания, т. е. колебания, длительность которых не зависит от величины отклонения. Циклоиду надо поместить при этом в вертикальной плоскости так, чтобы линия основания была горизонтальна, но лежала выше катящегося круга. Чтобы передать ход доказательства Гюйгенса возможно короче и сделать ясным, какими именно свойствами циклоиды он пользуется, мы отвлечемся от всего того, что служит лишь цели сделать его доказательство полным доказательством исчерпывания. Введя для ускорения силы тяжести обозначение g, мы можем, сверх того, обойтись без пропорций, которыми пользуется Гюйгенс, сравнивая движение по циклоиде с движением свободно падающего тела. Пропорции эти возмещают отсутствие символа для константы g.



Черт. 29.

Пусть (черт. 29) AB будет ось циклоиды; тогда круг, построенный на AB как на диаметре, представляет собою одно из положений катящегося круга; радиус этого круга обозначим через $2a$. C есть точка, в которой начинается падение по циклоиде, N—любое положение падающей точки. Через обе эти точки проведем горизонтальные прямые CD и NL, пересекающие ось в D и L. Кроме того, на AD как на диаметре построим окружность. Диаметр ее, т. е. высоту точки C над низшей точкой циклоиды, обозначим через h. Точки пересечения прямой LN с обеими окружностями обозначим через M и P. Известно, что падающая точка имеет в положении N скорость $\sqrt{2g\cdot DL}$ или, так как $DP = \sqrt{h\cdot DL}$, скорость $\sqrt{\frac{2g}{h}}\cdot DP$. Так как касательная к циклоиде в точке N параллельна AM, то вертикальная компонента этой скорости равна

$$\sqrt{\frac{2g}{h}}\cdot DP\cdot\frac{AL}{AM}.$$

Из чертежа мы видим, что

$$\frac{AL}{AM}=\frac{AM}{2a}=\sqrt{\frac{AL}{2a}}=\frac{AP}{\sqrt{2a\cdot h}}=\frac{LP}{DP}\sqrt{\frac{h}{2a}}.$$

Вертикальная компонента скорости равна, таким образом, $\sqrt{\frac{g}{a}}LP$. Так как касательная к окружности DPA, проходящая через точку P, образует с диаметром DA угол, косинус которого равен $\frac{LP}{{}^1/_2 h}$, то точка, пробегающая окружность DPA с равномерной скоростью $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}$, будет проходить положение P' со скоростью, вертикальная компонента которой также равна $\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot LP$. Тем самым определено и движение точки N. N находится все время на той же высоте, что и P, в одно время с P' достигает низшей точки A циклоиды и совершает полное колебание в промежуток времени, в который P проходит всю окружность $2\cdot\frac{h}{2}\pi$, т. е. в промежуток $\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$. Этот период колебания не зависит от h, или от положения точки циклоиды, в которой началось движение.

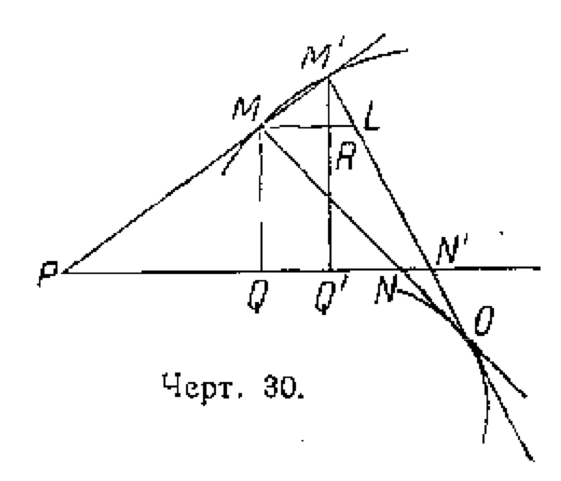
Изложенное доказательство предложения о „таутохронизме“ циклоиды было дано Гюйгенсом в его работе о маятниковых часах („Horologium oscillatorium“), написанной в 1665 г., но напечатанной только в 1673 г. Само предложение стало, однако, известно еще до 1673 г. и было затем доказано и другими.

В этом же сочинении вопрос о том, с помощью какого приспособления можно было бы осуществить движение по циклоиде, явился в руках Гюйгенса источником новых успехов в области геометрии — он дал повод к рассмотрению эволюты кривой и к изучению ее свойств. Гюйгенс заметил, что нормали к данной циклоиде являются касательными к циклоиде, полученной параллельным перемещением первой. Затем он дал строгое доказательство того, что первая из двух кривых, находящихся друг с другом в подобном соотношении, описывается некоторою точкою нити, навертываемой на другую кривую или, обратно, развертываемой; в силу этого обстоятельства вторая кривая получила имя эволюты. Для того чтобы тяжелая частица двигалась по циклоиде, надо, таким образом, подвесить ее на нити надлежащей длины ($4a$), закрепленной в точке возврата циклоиды-эволюты и при движении навертывающейся на эту кривую.

Гюйгенс достиг этим того, что ему было нужно в данный момент. однако от его внимания не ускользнул и геометрический интерес, который должно было представлять определение эволют других кривых. Из сказанного выше видно, что длина дуги эволюты равна длине свернутой с нее части нити. Так как эволюты алгебраических кривых также оказываются алгебраическими, то мы получаем, таким образом, средство находить алгебраические кривые, алгебраически спрямляемые. Гюйгенс показал прежде всего, что нормали к обыкновенной параболе являются касательными к некоторой полукубической параболе

и представил, таким образом, эту кривую, спрямление которой произвело такое впечатление (стр. 287), в виде эволюты. Затем Гюйгенс дал общий прием для нахождения эволюты данной кривой, что позволило получить бесчисленное количество алгебраически спрямляемых кривых. В исследовании о центробежной силе (стр. 241) Гюйгенс, идя обратным путем, воспользовался эвольвентой окружности. Он доказывает там, что окружность и эвольвента ее в общей их точке взаимно перпендикулярны, и применяет это обстоятельство к определению направления, в котором действует центробежная сила.

При изложении своего приема определения эволют Гюйгенс совершенно не прибегает к строгим формам метода исчерпывания и довольствуется немногословными инфинитезимальными соображениями. Так как при этом оказывается, что он в полной мере владеет приемами инфинитезимальных рассуждений, то мы в праве думать, что не приписали ему ничего ему чуждого, когда в предыдущем излагали для краткости таким же образом и другие его доказательства. Гюйгенс утверждает, что точка O (черт. 30), в которой нормаль MN к данной кривой пересекает бесконечно близкую нормаль $M'N'$, совпадает с точкою, в которой нормаль касается эволюты. Расстояние от M до точки касания нормали и эволюты зависит, таким образом, от длины MN отрезка, отсекаемого на нормали осью абсцисс, и от отношения между отрезком NN' оси x между нормалями и отрезком ML, отсекаемым нормалями на прямой, проходящей через M параллельно оси x. Пусть ордината $M'Q'$ пересекает прямую ML в R, а прямая MM' пересекает ось x в P; тогда:



Черт. 30.

$$\frac{ML}{NN'} = \frac{ML}{MR} \cdot \frac{MR}{NN'} = \frac{PN'}{PQ'} \cdot \frac{QQ'}{NN'}.$$

Первое отношение $\frac{PN'}{PQ'}$, в том случае, когда M' совпадает с M, принимает предельное значение $\frac{S_n + S_t}{S_t}$, где S_n обозначает поднормаль, а S_t—подкасательную. Остается теперь только найти предельное значение, к которому стремится последнее отношение при неограниченном приближении M' к M; здесь мы должны получить в той или иной форме то же, что дает и диференцирование. Если пользоваться знаком диференциала, то $NN' = dx \pm dS_n$, где через x обозначена абсцисса точки M, а двойной знак соответствует различным возможным положениям, во время Гюйгенса еще не отмечавшимся знаком поднормали. Если взять верхний знак, соответствующий черт. 30, то из этого

способа рассуждения получается после несложных преобразований выражение для радиуса кривизны $\rho = MO$, которое у Гюйгенса если перевести его обозначения на современные, имеет вид:

$$\rho = MN \cdot \frac{\frac{S_t + S_n}{S_t}}{\frac{S_t + S_n}{S_t} - \left(1 + \frac{dS_n}{dx}\right)}.$$

Если в это выражение радиуса кривизны (термин „радиус кривизны“ сам Гюйгенс еще не употребляет) вставить $MN = y\sqrt{1+y'^2}$, $S_t = \frac{y}{y'}$, $S_n = y \cdot y'$, то получится употребительное в настоящее время выражение для радиуса кривизны.

Величину, которую мы обозначили здесь через $\frac{dS_n}{dx}$, Гюйгенс находит, отыскивая касательную к вспомогательной кривой, точки которой определены таким образом, что в каждой точке Q проведена ордината $y = S_n$. Наша производная равна тогда отношению между ординатой и подкасательной этой новой кривой. Таким образом Гюйгенс свел операцию, которая в нашей записи представляется как применение диференцирования, к другой операции того же рода, результат которой был уже известен, благодаря методам определения касательных, данным Декартом и Ферма. Гюйгенс делает ссылку на метод первого. Он применяет затем свой метод к нахождению эволюты конического сечения (в этом случае вспомогательною кривою, как он замечает, является прямая) и эволют обобщенных парабол и гипербол Ферма.

В связи, с одной стороны, с исследованиями Гюйгенса об эволютах, а с другой — с обстоятельными оптическими работами того времени появились исследования о кривых, интересных с точки зрения оптики и, подобно эволюте, представляющих собою огибающие семейства прямых, — о ката- и диакаустике данной кривой. Первая есть огибающая прямых, образующих в точках данной кривой тот же угол с нормалью, как ряд прямых, выходящих из данной точки, или ряд параллельных прямых, иными словами, она является огибающей прямых, получаемых путем отражения пучка лучей, выходящих из одной точки или параллельных; диакаустика является огибающей лучей преломленных. Названия эти принадлежат братьям Бернулли, применившим к этим кривым лейбницево диференциальное исчисление. Говоря о более старых способах исследования, упомянем, что Чирнгауз в работе, представленной Парижской академии (1682), указал простой способ спрямления катакаустики, образованной путем отражения параллельных лучей от любой кривой. Гюйгенс в своем „Трактате о свете“ доказал соответствующее предложение для диакаустики; оно выступает у него как простое следствие того обстоятельства, что диакаустика является эволютой для каждой ортогональной траектории семейства преломленных лучей. Эти траектории являются, в свою очередь,

геометрическими местами тех точек, которых преломленный свет достигает в некоторый момент времени.

Возвращаясь к циклоиде, напомним, что декартов общий метод построения касательных к кривым, образованным путем качения (стр. 315), применим также к эпициклоидам и гипоциклоидам. Кривые эти встречаются уже у Птоломея, в астрономической системе которого планеты двигались по эпициклоидам или по еще более сложным кривым. В различное время возбуждали геометрический интерес некоторые геометрические места, которые также можно рассматривать как частные случаи указанных кривых. Так, уже Наср-Эддин, Коперник и Феррари заметили, совершенно независимо друг от друга, что точка окружности, катящейся по внутренней стороне окружности вдвое большего радиуса, движется по диаметру этой неподвижной окружности. Среди кривых, построенных Альбрехтом Дюрером, есть одна, тождественная с удлиненной эпициклоидой, у которой катящийся круг равен неподвижному. Особенно большой интерес приобрели эпициклоиды в непосредственно занимающий нас сейчас период, после того как интересовавшийся практическими вопросами Рёмер (а до него в одном случае, быть может, и Дезарг) доказал, что эти кривые благодаря уже упомянутому свойству их касательных представляют исключительно удобную форму профилей зубцов зубчатого колеса.

Ньютон впоследствии определил длины дуг этих кривых и показал, что их эволюты являются кривыми того же рода; сверх того, Ньютон дал следующее обобщение результату Гюйгенса относительно тавтохронизма (или как он его называет, изохронизма) движения тяжелой точки по циклоиде: если циклоиду заменить гипоциклоидой, а силу тяжести притяжением к центру неподвижного круга, пропорциональным расстоянию, то колебания будут все время тавтохронны (или, по выражению Ньютона, изохронны).

6. Обращение задачи о касательных; предложение Барроу о взаимно обратной зависимости.

В ту же эпоху, когда возникали изученные уже нами важные методы нахождения квадратур и касательных, привлекал к себе внимание и еще один класс задач — так называемые обратные задачи на касательные. Заключаются они в определении кривых, все касательные к которым должны обладать данным свойством. Однако среди задач, носящих это имя, мы находим только такие, в которых соответствующее свойство касательной зависит некоторым образом от положения точки касания, и совершенно не видим таких, в которых свойство касательной не зависит от этого положения, т. е., как мы сказали бы теперь, таких задач, в которых речь идет об огибающей семейства прямых. Вследствие этого о задачах последнего рода мы не будем здесь больше говорить, ограничившись упоминанием, что еще Аполлоний, а впо-

следствии Вивиани (стр. 309) рассматривали конические сечения как огибающие семейства прямых. Различие, которое существует между этими задачами и задачами, в которых свойство касательной зависит от положения точки касания, в терминах современной математики может быть охарактеризовано тем, что лишь в последних решение представляется полным интегралом и заключающимися в нем частными интегралами соответствующего диференциального уравнения. Обратной задачей о касательных будет, следовательно, такая, которая может быть выражена с помощью диференциального уравнения 1-го порядка с двумя переменными x и y; полное ее решение есть то же, что нахождение полного интеграла такого уравнения.

На задачи этого рода обратил свое внимание Декарт. Уже в своих исследованиях по оптике он натолкнулся на имеющую важное значение задачу такого рода — на определение кривой, нормали к которой в любой ее точке P образуют с прямыми, соединяющими P с двумя определенными полюсами, углы, синусы которых находятся в данном отношении (стр. 314). Обозначим это отношение через e и, чтобы объединить различные случаи, предположим, что e может иметь тот или иной знак. Если мы возьмем биполярную систему координат с данными полюсами, то в этой системе условие задачи выражается диференциальным уравнением

$$dr + e\,dr_1 = 0,$$

дающим по интегрировании

$$r + er_1 = c.$$

Последнее соотношение выражает как раз то свойство точек кривой, которое нашел Декарт, не сообщивший нам, однако, ничего о том способе, каким он это сделал; как мы уже говорили (стр. 314), метод определения нормали, при помощи которого Декарт проверяет правильность указанного здесь результата, не может быть использован для решения обратной задачи, т. е. для нахождения кривой по свойствам ее нормали.

Прежде чем заняться рассмотрением дальнейших исследований Декарта относительно наших задач на касательные, упомянем еще о некоторых других задачах того же рода, которые встречались нам, правда, в иной форме, но решение которых представляет собою не что иное, как интегрирование диференциального уравнения между двумя переменными. Сначала соответствие между этими задачами и обратными задачами о касательных, проявляющееся для нас теперь в одинаковости аналитического решения, оставалось незамеченным; однако, чем яснее становилась мало-по-малу эта связь, тем легче становилось находить решение задач, поставленных непосредственно в форме обратных задач о касательных.

Особенно большое значение имело то обстоятельство, что постепенно удалось привести последние задачи в связь с теми,

которыми занимались в непосредственной связи с практическими вопросами Непер и Галилей. Непер (стр. 135) при определении своих логарифмов непосредственно исходил из диференциального уравнения

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{y}{r}.$$

Это уравнение появляется у Непера в той кинематической форме, в какой оно в то время только и могло возникнуть. Именно из этого уравнения были выведены Непером свойства логарифмов и способ их вычисления. Это был единственно возможный способ интегрирования диференциального уравнения, так как это уравнение определяло функцию, до того времени неизвестную; функцию, которая именно этим диференциальным уравнением и определялась.

Галилей (стр. 237) свел задачу определения пути, пройденного при равноускоренном падении тела, к квадратуре треугольника и получил, таким образом, интеграл уравнения

$$\frac{dx}{dt}=ct$$

в виде $x=\frac{1}{2}ct^2$.

Гюйгенсова трактовка вопроса о падении по циклоиде (стр. 331), при которой он исходит из того факта, что квадрат скорости пропорционален уменьшению высоты падающего тела, в переводе на язык современного анализа также представляет собою интегрирование диференциального уравнения 1-го порядка. Особенно интересной в его решении является форма, в которой выступает то обстоятельство, что интеграл должен содержать круговые или тригонометрические функции: движение заменяется у него равномерным движением по окружности. К такому же приему, как мы увидим, прибегнул и Ньютон в своем более простом решении этой и подобных ей задач. К интегрированию диференциального уравнения сводится для современного математика и решение задачи о форме тяжелой нити, подвешенной в двух точках. Гюйгенс еще в 18-летнем возрасте занялся этим вопросом. Поводом к этому послужило высказанное Галилеем мнение, что тяжелая однородная нить принимает при равновесии форму параболы. Гюйгенс доказывает, что это неправильно, но что парабола получается в том случае, когда нагрузка на каждый отрезок нити пропорциональна его горизонтальной проекции. Основывается он на элементарном геометрическом доказательстве того, что вершины нитяного многоугольника, соответствующего равным параллельным силам, находящимся друг от друга на равном расстоянии, лежат на параболе. Таким образом гюйгенсов метод решения этой задачи не обладает такой степенью общности, которая достигается, если эту задачу решать, составляя и интегрируя диференциальное уравнение, и если мы здесь упомянули об этой работе Гюйгенса, то мы имели в виду

показать, какого характера трудности умел Гюйгенс преодолевать или, лучше сказать, обходить.

Но еще об одной задаче, принадлежащей гораздо более раннему времени и представляющей в собственном смысле слова обратную задачу о касательных, мы должны здесь упомянуть. Эта задача имеет особый интерес и потому, что рассматривает линию на поверхности шара. В эпоху великих географических открытий португалец Педро Нунец (Pedro Nuñez) обратил внимание на важную для мореплавания кривую, касательные к которой пересекают меридианы, проведенные через точки касания, под постоянным углом. Кривую эту, которой позже занимался Снеллий, назвавший ее локсодромой, и которая в проекции Меркатора изображается на картах в виде прямой, могли, однако, исследовать и приближенно строить лишь при помощи того свойства ее касательных, которое содержится в самом определении кривой. Несколько большего достигли Декарт, Торичелли и Валлис в исследовании плоской кривой, которую можно рассматривать как частный случай предыдущей, а именно кривой, касательные к которой образуют постоянный угол с лучами, проведенными в точки касания из определенной точки плоскости (стр. 286). Исследования этой кривой, называемой теперь логарифмической спиралью, у указанных авторов по существу одинаковы. Валлис указывает, что кривую эту можно определить как траекторию точки, которая, находясь на прямой, равномерно вращающейся около неподвижной точки O, удаляется по этой прямой от точки O со скоростью, пропорциональной расстоянию. Определение это вполне совпадает с тем, которое мы выражаем теперь с помощью диференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r}{k}.$$

Доказать, что касательные к определенной таким образом кривой обладают требуемым свойством, было нетрудно[1]; однако интегрирования диференциального уравнения у Валлиса мы не находим, хотя соответствие с неперовым определением логарифмов и указывает, что (в современных обозначениях)

$$r = ae^{\frac{\vartheta}{k}} \quad \text{или} \quad \vartheta = k \ln \frac{r}{a}.$$

Причиной, в силу которой эти уравнения не были получены, является то обстоятельство, что понятие о функции, а следовательно, и показательная и логарифмическая функции были еще

[1] Для этого достаточно рассмотреть три бесконечно близких радиуса-вектора, соответствующие равным промежуткам времени и, значит, образующие равные углы. Построив два „характеристических" треугольника (полярных), мы из подобия их увидим, что диференциал радиуса-вектора (пропорциональный скорости движения точки по прямой) пропорционален центральной дуге бесконечно малого полярного угла, а значит, пропорционален радиусу-вектору.

Прим. ред.

вещами неизвестными. Такие понятия заменялись обычно графическим изображением с помощью кривых. Однако выражаемое написанными уравнениями соответствие было, видимо, замечено; это явствует из того, что были отмечены именно те свойства кривой, которые непосредственно близки знакомым свойствам логарифмов.

Более общие соображения о способах решения обратных задач на касательные были высказаны Декартом в письме, датированном 1637 г. (и напечатанном в 1667 г.), по поводу нескольких задач, предложенных французским математиком де-Боном (de Beaune). Прежде всего Декарт замечает, что как его собственные методы определения касательных, так и методы Ферма едва ли могут быть без труда обращены. Так как Декарт ищет прежде всего кривые алгебраические, то он придумывает следующий косвенный прием. Он располагает алгебраические кривые в ряд и смотрит затем, определяя последовательно их касательные, обладают ли они требуемым свойством. Так, он говорит, что для того чтобы найти кривую, о которой шла речь в вопросе де-Бона, он производил подобные пробы с кривыми, уравнения которых относительно одной переменной были 2-й степени, а относительно другой поднимались до 1000-й (по всей вероятности, с кривыми вида $y^n = ax^2 + bx + c$). Применение этого метода является, конечно, громоздким, однако направление, указанное здесь Декартом, является правильным постольку, поскольку здесь диференцированием прокладывается путь для исследования того, в какой мере является возможным интегрирование в функциях известного вида.

Так как в данном случае эти пробы не привели к результату, то Декарт обратился к прямому исследованию, в основу которого, в частности, легло то обстоятельство, что точка касания есть предельное положение точки пересечения двух неограниченно сближающихся касательных. Рассмотрим, чего он достиг применением этого соображения.

Де-Бон поставил вопрос о квадратуре кривой, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{y}{S_t} = \frac{x-y}{a},$$

где S_t есть подкасательная, соответствующая точке (x, y). Декарт не довольствуется поставленным требованием, но хочет также получить другое геометрическое определение этой кривой. Он замечает, что отрезок, отсекаемый на прямой $y = x - a$ касательной и прямой, проведенной через точку касания параллельно оси y, или, иными словами, подкасательная в косоугольной системе координат, в которой ось x заменена указанной прямою, имеет постоянную величину ($= a\sqrt{2}$); на языке диференциального исчисления результат этот состоит в том, что диференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a} \qquad (1)$$

путем подстановки

$$y_1 = y + a - x$$

преобразуется в уравнение

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-y_1}{a}, \qquad (2)$$

или, если мы, чтобы полностью осуществить преобразование координат, положим

$$x_1 = x\sqrt{2},$$

— в уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{a\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

То, что мы изображаем с помощью диференциального уравнения (2), Декарт представляет в кинематической форме: он определяет точку кривой как точку пересечения двух движущихся прямых $x = \alpha$ и $y_1 = \beta$, из которых первая, параллельная оси $x = 0$, движется равномерно, а вторая, параллельная оси $y_1 = 0$ или прямой $y = x - a$, имеет скорость, пропорциональную расстоянию от этой прямой. Относительно прямой этой Декарт замечает, что она является асимптотою к кривой.

Получив этот результат, Декарт дополняет его таким замечанием: рассмотренные два движения, говорит он, являются столь несоизмеримыми, что кривая должна принадлежать к числу тех, которые он устранил из рассмотрения в своей „Геометрии" (т. е. она не является алгебраической). Поэтому, говорит он, естественно, что вышеупомянутый метод проб не дал возможности найти ее. Этим отрицательным ответом Декарт и удовольствовался, так как он искал алгебраическую кривую, обладавшую требуемым свойством. Однако в действительности он достиг большего, так как свел задачу (подобно Валлису в вопросе о логарифмической спирали) к диференциальному уравнению, которым Непер пользовался для определения своих логарифмов; вполне возможно, что самим Декартом это было замечено.

Задача эта была решена в той мере, поскольку интегрирование диференциального уравнения, а следовательно, и решение обратной задачи на касательные как раз и состоит в сведении задачи на другую, решение которой известно и выражается в простых функциях, или же определяет некоторые функции, в исследовании которых чувствовалась потребность уже ранее. Так как в рассматриваемое нами время предметом усиленного изучения были квадратуры, то особенно желательной целью преобразований являлось сведение задачи к уравнению $\frac{dy}{dx} = f(x)$, интегрируемому непосредствено с помощью квадратуры. Пример подобного сведения мы находим во „Всеобщей геометрии" („Geo-

metriae pars universalis") Грегори (1668). Для кривой, длина дуги которой s определяется с помощью соотношения

$$as = \int f(x)\,dx$$

Грегори получает уравнение

$$ay = \int \sqrt{(f(x))^2 - a^2}\,dx,$$

где наше $f(x)$ изображается как ордината кривой и где мы, как часто раньше, обозначаем применяемые Грегори площади с помощью интегралов. Другое предложение, которое мы, обозначая подкасательную через S_t, можем выразить коротко в виде равенства

$$\int S_t\,dy = \int y\,dx,$$

указывает, так как $\frac{y}{S_t} = \frac{dy}{dx}$, еще более непосредственно на взаимно обратную зависимость между операцией (диференцирования), с помощью которой Ферма выполнял свои определения касательных, и квадратурою. Чтобы сведение к квадратуре, которого Грегори достигал в отдельных случаях, можно было ставить как определенную цель и чтобы эта цель, там где это возможно, оказывалась достижимой, нужно было ясное констатирование и обоснование этой взаимно обратной зависимости. Такое обоснование дает, как мы сейчас увидим, Барроу в своих „Лекциях по геометрии" („Lectiones geometricae", 1669—1670; 2-е издание 1674).

Валлису (стр. 338) удалось, дав обратной задаче о касательных кинематическую форму, выразить ее таким способом, который близок к выражению с помощью диференциального уравнения. Прямым задачам на касательные давали такую форму уже Торичелли и Роберваль. Первый из них (стр. 312) связал определение касательных к параболе с исследованным Галилеем равномерно ускоренным движением. А мы видели, что Галилей как раз с помощью квадратуры нашел путь, пройденный при этом движении. Барроу, у которого (так же как у соотечественника его Валлиса) геометрические работы Торичелли получили большее признание, чем у французских математиков, определенно связывает свое первое обоснование упомянутой взаимно обратной зависимости с торичеллиевым определением касательной к параболе и уже затем распространяет его на другие кривые.

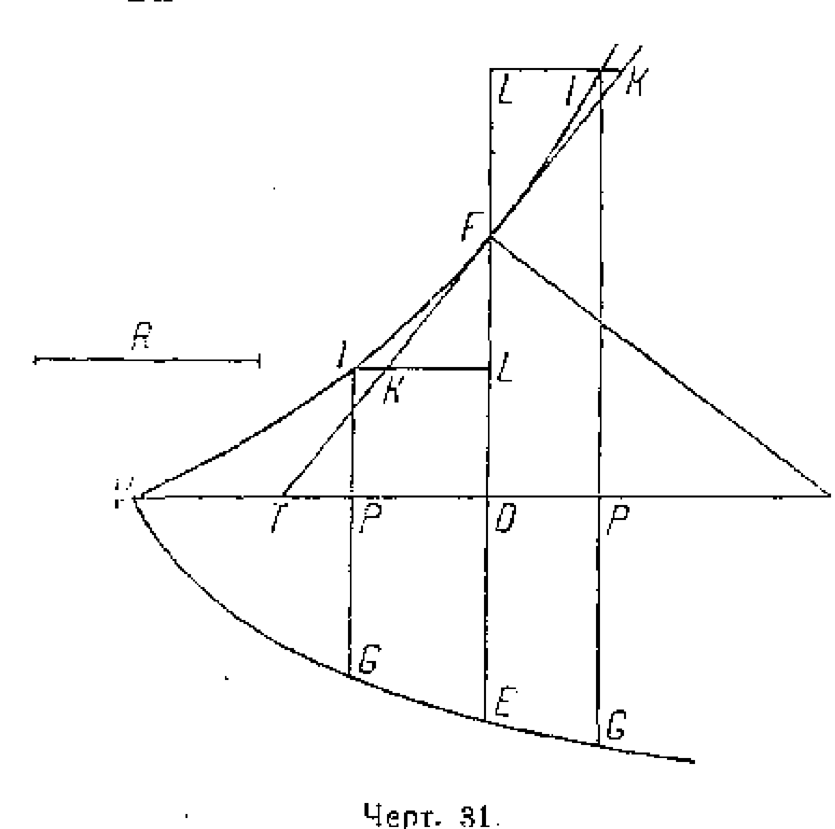
Мы приводим здесь (черт. 31) чертеж, которым Валлис сопровождает доказательство предложения, обнаруживающего взаимно обратную связь интегрирования и диференцирования. На двух кривых $VIFI$ и $VGEG$ соответствующие друг другу точки F и E имеют одну и ту же абсциссу VD; ордината DF первой кривой, будучи умножена на постоянную величину R, равна площади VDE, ограниченной другой кривой, осью абсцисс и соответствующею

ординатою DE. Кривые, таким образом, связаны соотношением, которое мы могли бы теперь, обозначая абсциссу через x и ординаты через y и v, записать в виде равенства

$$R\cdot y = \int_0^x v\,dx. \tag{1}$$

Барроу говорит, что в этом случае подкасательная $DT = R\cdot\frac{DF}{DE}$ или (если не обращать внимания на знак S_t) $S_t = \frac{R\cdot y}{v}$, что дает, по замене $\frac{y}{S_t}$ на употребительное теперь $\frac{dy}{dx}$, соотношение

$$R\frac{dy}{dx} = v. \tag{2}$$



Черт. 31.

Эту взаимно обратную зависимость между свойствами, выражаемыми равенствами (1) и (2), Барроу сперва доказывает кинематически, непосредственно примыкая, как он сам упоминает, к исследованиям Торичелли; он пользуется при этом двумя отдельными чертежами. Если мы перенесем доказательство на наш чертеж, то кривая $VIFI$ представляет собою путь движущейся точки F. Относительно проекции D этой точки на ось предполагается, что она движется с постоянною скоростью R, в то время как ордината y возрастает со скоростью, которая изображается ординатою v другой кривой. Мы можем записать это, пользуясь современными обозначениями и называя время через t, с помощью соотношений

$$\frac{dx}{dt} = R;\quad \frac{dy}{dt} = v.$$

По методу Торичелли касательная представляется диагональю прямоугольника, построенного на обеих скоростях, что как раз и дает выражение (2) для подкасательной $\left(\text{или } \frac{dy}{dx}\right)$. В то же время квадратура, с помощью которой Галилей определил путь, проходимый при равномерно ускоренном движении, дает зависимость (1) между y и площадью $\int_0^x v\,dx$.

Барроу применяет свое предложение прежде всего к изученному Галилеем и Торичелли движению при бросании. При этом движении двумя соответствующими кривыми являются парабола $y = \frac{g}{2R^2}x^2$ и прямая $v = \frac{g}{R}x$.

Барроу не останавливается, однако, на этом кинематическом доказательстве, основанном на заимствованном у Торичелли и Галилея понятии о движении, а не на тех строгих доказательствах, которые в то время еще считались обязательными и которые всегда представлялись в геометрической форме. В своем геометрическом доказательстве Барроу непосредственно пользуется черт. 31. Дело сводится к тому, чтобы показать, что прямая, проведенная из E к точке T, определяемой равенством $DT = R \cdot \frac{DF}{DE}$, есть касательная, или что точки I кривой, лежащие по ту и по другую сторону от точки F, расположены по одну сторону от прямой ET.

Для доказательства проведем через такую точку I прямую IK, параллельную оси абсцисс. Пусть K — точка ее пересечения с ET, а L — точка пересечения с DF. Вследствие указанных свойств кривых площадь $PDEG$ будет тогда равна $R \cdot LF$. Сверх того из чертежа мы видим, что

$$\frac{LK}{LF} = \frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE},$$

откуда

$$LK \cdot DE = R \cdot LF = PDEG.$$

Как показывает черт. 31, мы будем иметь $PDEG \lesseqgtr IL \cdot DE$, смотря по тому, находится ли точка I влево или вправо от F. Тем же условиям подчинены, следовательно, и неравенства $KL \lesseqgtr IL$, откуда следует, что кривая $VIFI$ по обе стороны от F расположена по одну сторону от TF. При этом предполагается, что ордината v кривой $VGEG$ возрастает вместе с абсциссою x, как это имеет место на чертеже. Если бы она убывала, то таким же образом TE все время находилась бы по противоположную сторону кривой $VIFI$, т. е. опять-таки была бы касательной к ней в точке F. Мы видим, что доказательство содержит в себе и рассмотрение направления вогнутости и что оно ставит это направление в связь с увеличением или уменьшением величины v или $\frac{dy}{dt}$ [1].

---

[1] Интересно обратить внимание на то, что, достигая, действительно, большей строгости и устраняя из доказательства кинематические соображения, которые, согласно духу античного доказательства, не должны были участвовать в геометрическом рассуждении, Барроу в то же время чрезвычайно суживает непосредственную область приложимости своего предложения. Именно, в то время как первое его (кинематическое) рассуждение не накладывает никаких ограничений на характер роста ординат кривой VGE, во втором доказательстве существенна *монотонность* этого роста. Существенной причиной этого ограничения является то обстоятельство, что античное определение касательной не носит чисто инфи-

Следует отметить общий характер предложения Барроу и его доказательства. Дело здесь идет не о касательной к отдельной определенной кривой (ордината которой обозначена через y) или о площади, ограниченной другой определенной кривой (ордината которой обозначена через v); напротив, либо та, либо другая может быть совершенно произвольною кривою и служить, таким образом, изображением любой данной функции, — изображением, естественным для того времени, когда еще не было установлено независимое от геометрии понятие функции. Барроу достигает, следовательно, того успеха, что он устанавливает и доказывает свои предложения сразу для всех функций (или — как мы должны сказать теперь, после того как в позднейшее время были найдены функции, которые нельзя диференцировать, — по крайней мере для всех диференцируемых функций). Таким образом достижения Барроу в этой области, хотя они и имеют еще геометрическую форму, представляют собою нечто аналогичное достижениям Виета, который благодаря введению обозначений для произвольной данной величины получил возможность устанавливать общие алгебраические формулы. Мы не должны, однако, забывать, что Паскаль еще раньше дал применявшемуся Ферма и им самим интегрированию по частям столь же общее выражение и что, как мы только что видели, Грегори сообщил полученным им менее значительным результатам ту же общую форму.

Таким образом, положив введенный здесь для однородности множитель R равным 1, мы можем сказать, что Барроу исследует зависимость между *любою функцией* y и величиною $v=\frac{dy}{dx}$; зависимость эта, как он показывает, может быть выражена также с помощью квадратуры, которую мы записали бы в виде $y=\int v\,dx$. В геометрическом изображении величина, обозначенная здесь как производная, представляет собою, правда, только угловой коэфициент $\left(\frac{y}{S_t}\right)$ касательной; однако связь между различными применениями диференцирования была уже известна, что в достаточной мере следует как из сказанного нами в гл. 4-й, так и из самого труда Барроу. Отсутствие общего понятия, соответствующего понятию производной, сказывается в том, что Барроу вынужден выставлять в качестве особых предложений и особо доказывать то, что для нас теперь является уже содержащимся в его предложении о взаимной

нитезимального характера. Оно апеллирует лишь к тому факту, что кривая вблизи точки касания лежит по одну сторону касательной. Но это свойство предполагает монотонность изменения наклона касательной и, вообще говоря, не имеет места в точках перегиба кривой. Таким образом, изгоняя движение (по крайней мере внешним образом, ибо по существу основные неравенства остаются оправданными только геометрической интуицией), Барроу вынужден опираться на *несущественное* свойство касательных. Отсюда и возникает ограничение, о котором было сказано выше.

Прим. ред.

обратности. В этих предложениях речь идет также о сопоставлении двух кривых, соответствующие координаты которых связаны другими соотношениями, в которых участвует процесс интегрирования. Так, например, в предложении, непосредственно следующем за только что изложенным, рассматриваются две кривые, связанные таким соотношением: площадь, ограниченная одной из них, осью абсцисс и ординатой, равна квадрату, построенному на ординате другой кривой. Сохраняя прежние обозначения, мы можем записать это соотношение так:

$$y^2 = \int_0^x v\,dx.$$

Предложение устанавливает, что ордината первой кривой вдвое больше поднормали второй, т. е. что

$$v = \frac{2y\,dy}{dx}.$$

Как мы видим, в современной форме изложения эта вторая задача представляет видоизменение первой, тогда как в той геометрической форме, которая характерна для XVII в., она требует особой формулировки и особого доказательства. Точно так же мы находим у Барроу и ряд предложений, относящихся к представлению кривых в полярных координатах и аналитически эквивалентных его основному предложению.

Предложение Барроу дает возможность, имея результат какого-либо диференцирования или интегрирования, получить из него результат примененной к нему обратной операции. В то время более знакомой из указанных операций было интегрирование в виде квадратур. Поэтому Барроу, собственно говоря, выводит из известных квадратур способ определения касательных, а не наоборот. Например, в одном из своих предложений он устанавливает, что для любой кривой имеет место соотношение, которое мы можем представить формулой:

$$\int \frac{q}{y^2}\,dx = \frac{x}{y},$$

где через q обозначена ордината точки пересечения касательной с осью ординат, т. е. величина $y - x\frac{dy}{dx}$. Отсюда в связи с предложением о взаимно обратной зависимости следует новое предложение, которое равносильно утверждению, что производная от $\frac{x}{y}$ равна $\frac{q}{y^2}$.

Главною целью Барроу является, однако, по собственному его замечанию, не применение его метода к решению таких прямых задач на касательные, но, напротив, получение средства для решения обратных задач. При применении этого средства задачи, там, где это возможно, должны сводиться к квадратурам. Барроу решает, таким образом, весьма значительное количество

задач, некоторые из которых являются непосредственно обратными задачами на касательные, а другие (например задачи относительно длин дуг) даны в такой форме, что в переводе на язык современной математики они также выразились бы с помощью диференциальных уравнений. Так, предложение о взаимно обратной зависимости дает Барроу возможность найти кривую, касательная к которой удовлетворяет условию

$$\frac{y}{S_t} = \frac{f(x)}{x-a},$$

непосредственно с помощью квадратуры

$$y = \int_a^x \frac{f(x)}{x-a}\,dx.$$

Барроу применяет этот прием к частному случаю, в котором $f(x) = \sqrt{bx - x^2}$ (он представляет эту функцию как ординату окружности) и $a = 0$. Он находит, что в этом случае искомая кривая есть циклоида.

Ни здесь, ни в большинстве других случаев, Барроу не приходит в голову ввести произвольную постоянную, которая, впрочем, в большинстве его задач соответствовала бы лишь перемещению системы координат вдоль оси. Одна задача образует, однако, в этом отношении исключение, а именно задача об определении кривой, подкасательная которой $S_t = f(x)$, т. е. есть данная функция x. Кривая эта выражается с помощью уравнения

$$\int_0^x \frac{dx}{f(x)} = \int_c^y \frac{dy}{y},$$

где второй интеграл представляется как площадь, ограниченная равносторонней гиперболой, осью ординат и прямыми $y = c$ и $y = y$, и где c определенно изображает собою произвольно выбранную величину. Повод к появлению этой величины заключался, конечно, в первую очередь, в том обстоятельстве, что при значении нижнего предела 0, выбор которого был бы наиболее естественным, площадь стала бы бесконечной и потому непригодной. В частности, Барроу применяет результат к тому случаю, когда подкасательная постоянна; задача совпадает тогда с тою, к которой Декарт свел задачу де-Бона (стр. 339). Точно так же Барроу подробно рассматривает логарифмическую спираль и определенно отмечает при этом, что длина окружности, измеряющая полярный угол, равна логарифму ридиуса-вектора; в валлисовом решении задачи (стр. 338) на это были лишь косвенные указания.

Сведение к квадратуре в решенных Барроу задачах выполняется с помощью разделения переменных; на общий характер этого приема он указывает лишь в добавлении к своему сочи-

нению. Он определяет здесь кривую, касательная к которой удовлетворяет условию:

$$\frac{S_t}{y} = \frac{f(y)}{\varphi(x)},$$

с помощью уравнения

$$\int \varphi(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

и жалеет, что не дал уже раньше решения этой задачи, так как оно заключало бы в себе многие из предыдущих. Подобным же образом находит он кривую, определяемую в полярных координатах r и ϑ условием

$$\frac{S_t}{r} = \frac{r\cdot f(r)}{\varphi(\vartheta)},$$

а также кривую, для которой

$$\frac{dx}{ds} = \frac{f(s)}{\varphi(x)},$$

где s — длина дуги и производная изображается как отношение между подкасательной и касательной (считаемой от точки касания до оси). Наиболее трудная из решенных Барроу задач находится в добавлении ко 2-му изданию. Она касается определения кривой, длина дуги которой равна $f(x) - y$.

Как легко видеть, соответствующее этому условию диференциальное уравнение также интегрируется с помощью разделения переменных.

7. Ньютон и Барроу; ньютоново применение предложения Барроу о взаимно обратной зависимости.

Исследования Барроу и основанные на них результаты, интересные и важные и сами по себе, приобрели еще большее значение благодаря тому обстоятельству, что в 1663 г. Барроу стал в Кэмбриджском университете учителем Ньютона. Ньютон, начавший свои университетские занятия двумя годами раньше этого, скоро стал не столько учеником Барроу, сколько его сотрудником. Во всяком случае сам Барроу говорит, что, подготовляя свою работу, которую мы только что рассматривали, он пользовался советами Ньютона. Барроу в такой степени чувствовал превосходство своего великого ученика, что в возрасте всего 39 лет отказался от университетской кафедры в его пользу.

Как ни велико могло быть влияние Ньютона на изложение отдельных частных вопросов, однако мы должны рассматривать разобранные нами выше теории как достояние самого Барроу, хотя он и мог уже раньше обсуждать их с Ньютоном. К такому заключению приводит нас, между прочим, то обстоятельство, что Барроу, повсюду отмечающий источники, как печатные, так и иные, с большой щепетильностью, здесь не говорит

ничего; ссылки на своего друга и ученика он делает лишь по некоторым другим поводам, о которых речь будет ниже. Таким образом, когда Ньютон выступает с теми же мыслями, то мы должны предположить, что он обязан ими своему учителю. Ньютон, однако, развивает их значительно дальше.

Влияние Барроу на Ньютона сказывается прежде всего в очень общей точке зрения, с которой Ньютон рассматривает зависимость между одновременными изменениями различных величин. Барроу достигает этой общности, с одной стороны, путем рассуждений кинематического характера, с другой, — путем геометрического изображения при помощи произвольных кривых. Как мы видим, точную форму, соответствовавшую тогдашним требованиям, исследования Барроу получали при геометрическом изложении; однако и в кинематических своих доказательствах он не довольствуется заимствованием интуитивного представления о движении, но старается выяснить это понятие путем отвлеченного изучения времени, т. е. путем изучения той величины, которая в кинематике исследуется в связи с величинами геометрическими. Главный результат этого исследования состоит в том, что можно познавать лишь последовательность явлений во времени или их одновременность; для того же чтобы *измерять* время, не существует никакого другого средства, кроме того, чтобы рассматривать какое-нибудь одно движение как данное; это та же самая мысль, которую современный физик выражает тем, что он определяет время, как указание часов.

При пользовании в изложении учения о переменных величинах столь ясно ограниченным понятием времени почти устраняется опасность какого-либо неправомерного пользования понятием движения, и изложение становится столь же точным, как применявшееся раньше геометрическое. Такая же трактовка лежит в основании инфинитезимальных исследований Ньютона. Общее изложение этих исследований мы находим в его „Методе флюксий" („Methodus fluxionum"), сочинении, напечатанном значительно позже, но написанном приблизительно к тому времени, когда появилась работа Барроу; те же самые соображения лежат, в сущности, в основе и еще более ранних трудов Ньютона. Ньютон рассматривает систему (n) „флюент" — величин $x, y, z, \ldots$, одновременно изменяющихся, удовлетворяя такому числу ($n-1$) уравнений, которое достаточно, чтобы обеспечить их одновременное изменение. Время является у него, таким образом, только независимой переменной, по отношению к которой все эти флюенты служат функциями. Скорости, с которыми изменяются эти величины, Ньютон называет их флюксиями и обозначает их через $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ Ньютон умеет там, где это ему удобно, пользоваться только что упомянутой свободой в определении времени для того, чтобы предположить, что та или другая из этих величин изменяется равномерно или что ее флюксия равна 1. То, что сначала он обыкновенно оставляет вопрос об этом выборе независимой переменной открытым, часто дает, как известно, аналитические выгоды.

Введение скоростей было бы, однако, лишь неправомерным заимствованием из кинематики, если бы при этом не было дано точного ответа на вопрос о том, как образуются флюксии. Но Ньютон ответил на этот вопрос и получил, таким образом, обоснование этого понятия, независимое от существующего в природе движения [1].

Таким образом он позаимствовал из кинематики лишь прекрасное общее обозначение для величины, образовывать которую и применять к различным исследованиям (о касательных, о максимальных и минимальных значениях) умели уже и раньше, но для которой еще не имелось никакого обозначения, независимого от всех этих положений. „Флюксия“ есть, таким образом, более раннее название той же величины, которую мы называем теперь производной, именно, это есть производная от флюенты по времени.

Определению этой величины и простым и единообразным правилам, ведущим к нему, Ньютон придает особенную важность. Об интересе его к такому определению мы можем судить уже по тому месту в книге Барроу, относительно которого сам автор говорит, что включил его по настоянию Ньютона и которое содержит ясные правила для определения касательной к данной кривой (названия или обозначения флюксии здесь, однако, еще нет). Сам Барроу был, напротив, того мнения, что нет никакой причины при существовании стольких способов определения касательных вводить еще новый. Он, вероятно, особенно имел при этом в виду метод Ферма, столь близкий его собственному. Различие в практическом выполнении определения касательных у Ферма и Барроу состоит, главным образом, в том, что Ферма вводит особое обозначение (E) лишь для одного приращения, именно приращения независимой переменной, в то время как Барроу вводит обозначения e и a для обоих приращений — и независимой и зависимой переменной. Барроу отыскивает предел, к которому стремится $\frac{a}{e}$, когда обе эти величины стремятся к 0,

[1] С этим утверждением Цейтена нельзя согласиться. Верно, что понятие флюксии у Ньютона носит более общий и абстрактный характер, чем понятие скорости в механике. Верно, что в качестве аргумента в ряде исследований берется фактически не время, а другая величина, например длина или площадь, а время является в самом исследовании только параметром, пропорционально которому изменяется фактически независимая переменная величина. Однако существенно то, что *вывод* основных предложений о флюксиях основывается у Ньютона на апелляции к временному течению процесса. Именно введением понятия движения в более или менее явной форме Ньютон стремится *обосновать* инфинитезимальные операции, придать им ту *точность*, которая теоретически гарантировала бы от ошибок, могущих быть причиненными пренебрежением бесконечно малыми величинами. Вопрос о принципиальных позициях Ньютона слишком сложен, чтобы о нем можно было здесь говорить подробнее; сам Ньютон менял свои установки, то признавая бесконечно малые величины („моменты“) как исчезающе малые количества, то отождествляя моменты с нулями, то приближаясь к концепции предела. Но всегда силу убедительности своим доводам он старался придать рассуждениями, в которых апелляция к кинематическим соображениям играла важную роль.

т. е. то, что Лейбниц назвал впоследствии отношением $\frac{dy}{dx}$; он полагает его равным отношению ординаты к подкасательной. Это предельное отношение находится путем отбрасывания в уравнении между a и e, получаемом из уравнения кривой (и содержащем a или e во всех членах), членов выше первой степени; Ферма достигал того же, производя сперва деление на e (или E), а затем полагая e равным 0. В тех простых примерах определения касательных, которые тут же приводит Барроу, этот прогресс в способе обозначения фактически не играл особенно большой роли; нерешительность, с которой он последовал совету Ньютона, является, таким образом, вполне понятной; если же подобно Ньютону, иметь в виду значительно более широкие применения указанной общей операции диференцирования, то легко понять то значение, которое он придает более детальным правилам. Чуждый мелочных опасений, что Барроу опередит его (он сам обладал уже в то время теми же правилами, правда, в других формах, и давал им в своих рукописях широкие применения), — руководимый даже, быть может, желанием знать, как будут приняты такие правила, которых сам он еще не решался опубликовать, — Ньютон побуждает Барроу, как тот сам указывает, дать эти правила. В той форме, в какой эти правила приведены Барроу, они, несомненно, принадлежат самому автору; об этом говорит как отсутствие противопоказаний с его стороны, так и формальное отличие этих правил от тех, которыми пользовался в то время Ньютон и о которых речь будет итти ниже.

Лекции Барроу дают и несколько примеров более широкого применения диференцирования, но опять-таки только в одном отделе, представляющем собою, подобно вышеупомянутым правилам диференцирования, лишь добавление, сделанное, как указывает Барроу, по совету Ньютона. В добавлении к 12-й лекции Барроу выводит ряд квадратур; в качестве примера укажем на одну из них, которую можно было бы записать на нашем математическом языке, введя тригонометрические обозначения и выражая сведение к гиперболической площади применением символа ln, в виде:

$$\frac{1}{2}\left[\ln(1+\sin\varphi)-\ln(1-\sin\varphi)\right]=\int\limits_0^{\varphi}\sec^2\varphi\,d\sin\varphi=\int\limits_0^{\varphi}\sec\varphi\,d\varphi.$$

Принципиальный шаг вперед, связанный с выводом этого и нескольких других подобных результатов, заключается в неизвестном еще Ферма (стр. 261) применении к преобразованию квадратур тех операций, которые прежде применялись при определении касательных, т. е. при диференцировании. Так, бесконечно малый треугольник применяется к таким преобразованиям, которые мы записали бы теперь в виде $d\sin\varphi=\cos\varphi d\varphi$ или $d\cos\varphi=(-)\sin\varphi\,d\varphi$. Напомним, впрочем, что Паскаль в своих квадратурах также умел пользоваться этим инфинитезимальным

преобразованием (стр. 269), не ставя его, однако, в связь с правилами для определения касательных. Приведенная нами квадратура содержит, далее, первый известный нам пример разложения дроби

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sin\varphi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\sin\varphi}$$

для преобразования квадратуры.

То основное значение, которое тщательно развитые правила диференцирования получили в собственных работах Ньютона, основано прежде всего на совершенно новом применении, которое он дал закону Барроу о взаимной обратности диференцирования и интегрирования. Барроу видел в своем законе лишь средство для решения обратных задач на касательные с помощью более знакомых в то время квадратур. *Для Ньютона, напротив, диференцирование является простой операцией, которую можно выполнить по определенным общим правилам; полученные таким путем результаты тотчас же дают большое количество квадратур, среди которых наряду с уже знакомыми есть и много новых.*

Ньютон определенно отметил это уже в дополнении к работе „Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов" („Analysis per aequationes numero terminorum infinitas"). Это сочинение, находясь с 1669 г. на хранении у Коллина, было до некоторой степени доступно для ознакомления. Мы знакомимся здесь также с несколько иною, чем у Барроу, формой, в которой Ньютон выполняет свое диференцирование; диференцируется здесь площадь z, ограниченная кривою, проходящей через начало, абсциссой x одной из ее точек и ординатой y той же точки; Ньютон в уравнении, связывающем x и z, заменяет эти переменные выражениями $x+o$ и $z+ov$[1]. Искомым значением y будет тогда значение v, соответствующее случаю $o=0$. Как мы видим, это совпадает с тем, что на современном языке выражается равенством: $y=\frac{dz}{dx}$; сам Ньютон уже тогда в своих непредназначенных к опубликованию исследованиях выражал это *так*: y есть отношение между флюксиями z и x. Уже тогда он начал обозначать это отношение через $\frac{\dot z}{\dot x}$, или, считая x равномерно изменяющимся (т. е. независимым переменным), через $\dot z$, так как тогда $\dot x=1$. Эти обозначения флюксии для нас, знакомых с диференциальным исчислением, конечно, облегчили бы обзор; но в ту пору разъяснение их должно было загромоздить изложение; понятно поэтому, что они не были введены в статье, представлявшей собою лишь дополнение к упомянутому сочинению. Ту же форму диференцирования, которая служит здесь для нахождения площадей, Ньютон применяет в „Методе флюксий" („Methodus fluxionum") к определению касательных. Последнее совпа-

[1] Здесь o — буква, изображающая приращение x (вообще не нуль), так что ньютонов символ o соответствует нашему Δx. *Прим. ред.*

дает с таким же определением у Барроу, с той лишь разницей, что приращения x и y обозначены у Ньютона не через a и e, а через o и ov и что предельное значение v обозначено через $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$.

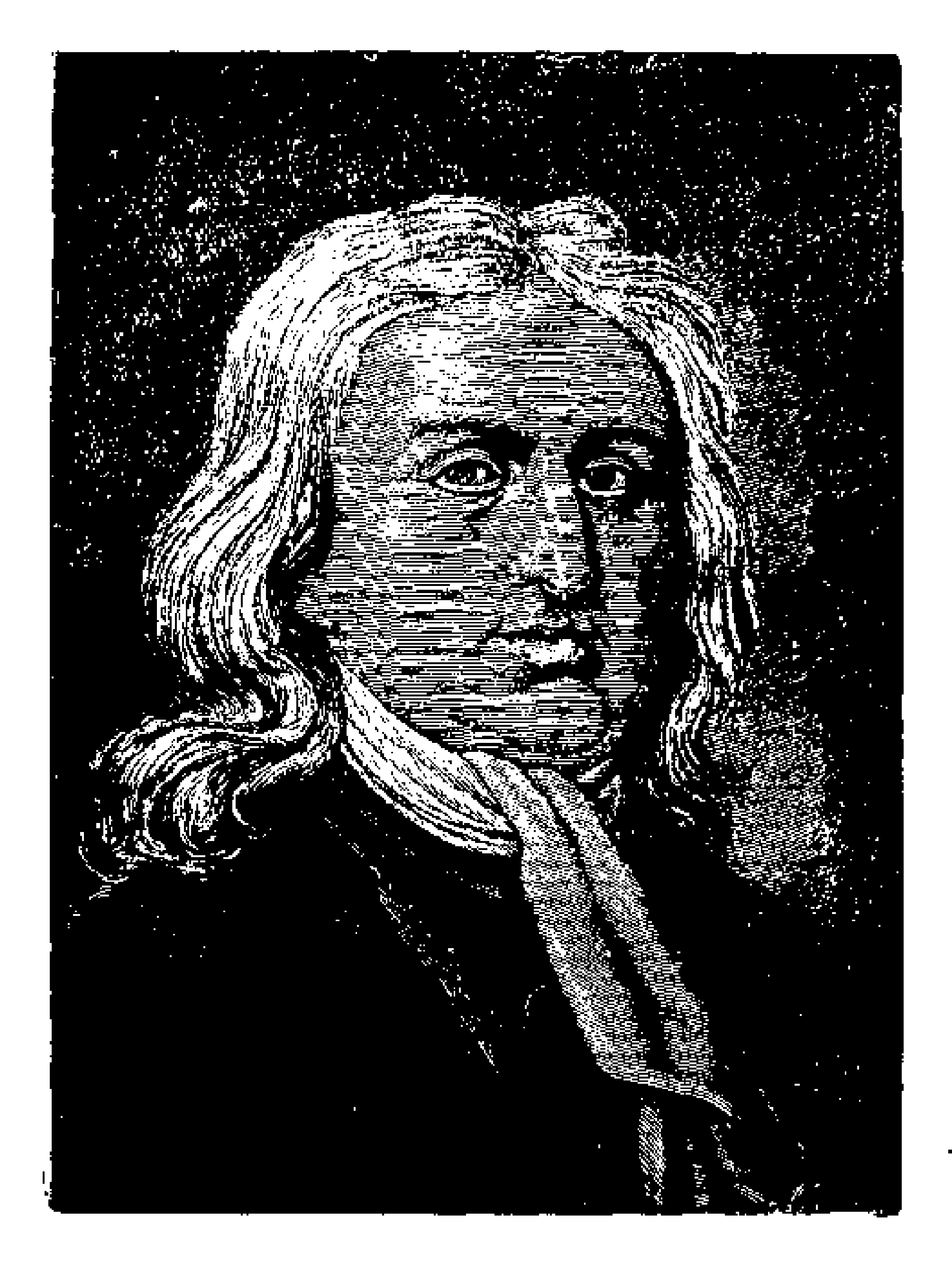
Отметим, что Грегори в своей появившейся в 1668 г. „Всеобщей геометрии" применяет ту же форму диференцирования и то же обозначение o для величины, обращающейся в пределе в 0. Это указывает на связь с Ньютоном, которая осуществлялась, несомненно, через Коллина; в понимании связи между обеими основными инфинитезимальными операциями Грегори стоял, повидимому, почти на той же высоте, как и Барроу.

Ньютон в отмеченном нами месте применяет диференцирование в частности к площади $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$ и получает, таким образом, новое доказательство того, что площадь эта принадлежит параболе $y = ax^{\frac{m}{n}}$; он отмечает при этом, что его метод дает ему возможность найти сколько угодно кривых с известными площадями. В качестве примера Ньютон указывает, что $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ дает результат $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; пример этот свидетельствует о том, что диференцировать корни он вполне умел уже в то время.

Судить о том, как широко Ньютон умел пользоваться своим новым методом получения квадратур, основанным на том, что эта операция есть обращение диференцирования, мы можем, между прочим, по многочисленным результатам, которые он сообщил в 1676 г. в письмах к Лейбницу. Весьма богато такими примерами и сочинение его „О квадратуре кривых" („De quadratura curvarum"). Это сочинение было напечатано в 1704 г., но уже в 1676 г. эта работа была вполне закончена, и ее текст отличался от окончательного лишь немногочисленными введенными позднее дополнениями. В свою очередь редакция 1676 г. представляла собою обработку еще более ранней работы. Рассмотренный нами метод комбинируется здесь, однако, с другим, к которому приходится прибегать, когда выражение ординат через абсциссы не получается диференцированием знакомых выражений или когда эти последние трудно сразу усмотреть. Этот второй метод состоит в разложении в бесконечные ряды и почленном их интегрировании. К данному Ньютоном решению этой проблемы мы сейчас и обратимся.

8. Ньютоновы разложения в ряды; расширенное применение метода неопределенных коэфициентов.

Сам Ньютон в своих письмах к Лейбницу сообщает, как он пришел к применению рядов и, в частности, к биномиальной формуле, имеющей силу и для дробных и отрицательных показателей. Отметим здесь, кстати, что он был первым, кто стал



Ньютон
1643—1727
Гравюра А. Троицкого

употреблять такие показатели (ср. Валлис, стр. 274) и обозначать их отдельною буквою, могущей, таким образом, представлять как положительную, так и отрицательную величину. Такое изображение величин, могущих иметь также и отрицательные значения, в других случаях применял, впрочем, уже Гудде (стр. 202).

При изысканиях, приведших к расширенной биномиальной формуле, Ньютон шел путями, близкими Валлису с его „интерполяцией“ [см., в частности, „интерполяцию“, примененную Валлисом при вычислении π (стр. 275)]. Подобно Валлису, Ньютон первоначально стремился лишь к такому распространению выражений, получившихся в результате некоторых известных квадратур, которое позволило бы применить их и к новым еще не найденным квадратурам. Так, легко образовать $\int(1-x^2)^{\frac{p}{2}}dx$ в том случае, когда p есть четное число. Интеграл этот выражается с помощью конечного степенного ряда; если перенести закон образования членов этого ряда на нечетные значения p, то получается бесконечный ряд, относительно которого можно предположить, что он также представляет собою соответствующий интеграл Стремясь достичь результатов, имеющих силу для всех показателей, Ньютон скоро должен был, однако, заметить, что наиболее простой закон образования членов ряда получается, если искать ряд, представляющий не самый интеграл, а интегрируемую функцию. Это обстоятельство позволило ему, во-первых, усмотреть знакомый уже до него Ферма и Паскалю (стр. 166) закон мультипликативного образования коэфициентов ряда, представляющего собою величину $(1+x)^m$ для целых и положительных значений m, и, во-вторых, убедиться в применимости того же закона и в том случае, когда m — дробное или отрицательное число; все это привело к установлению общей биномиальной формулы.

Валлис довольствовался простою индукцией такого рода; Ньютон был для этого слишком верным приверженцем унаследованных от древних строгих законов точной математики. Правда, имевшиеся в то время алгебраические ресурсы не были еще настолько развиты, чтобы он мог с их помощью дать формальное общее доказательство общего предложения; такое доказательство должно было бы содержать помимо всего прочего также указание на границы, внутри которых действительно имеет место сходимость, необходимая для справедливости предложения. Это было выполнено лишь в XIX в. Абелем и явилось одним из существеннейших моментов в ликвидации того слишком свободного обращения с рядами, которое господствовало в XVIII в. Ньютон, бывший в этом отношении более строгим, чем позднейшие математики, должен был ограничиться указанием методов, с помощью которых можно исследовать правильность разложения в отдельных данных случаях. Прежде всего это можно было осуществить, возводя ряды, которые должны были представлять

корень, в степень и производя, таким образом, проверку извлечения корня. Кроме того, Ньютон указал еще один метод, который можно прямо применить к разложению корня в ряд. Метод этот дает и последовательное образование членов ряда и средство для проверки сходимости его. Этот метод оказался применимым не только к рядам, содержащимся в биномиальной формуле, но и вообще к рядам, *служащим для выражения корня алгебраического уравнения через независимое переменное, содержащееся в его коэфициентах.*

Что касается до последовательного образования коэфициентов ряда, то Ньютон пользовался для этого *методом неопределенных коэфициентов*, притом значительно шире, чем Декарт, определявший в своей „Геометрии" некоторые величины, отождествляя друг с другом конечные выражения (стр. 317). Если $f(x\ y)=0$ есть данное уравнение, приведенное к целому рациональному виду (с конечным или бесконечным числом членов), то Ньютон полагает $y=Ax^{\alpha}+p$, где прежде всего определяется α таким образом, чтобы получилось по крайней мере два члена одинаковой степени, низшей, чем остальные, а затем A таким образом, чтобы эти члены тождественно взаимно уничтожились. Затем принимается $p=Bx^{\beta}+q$, где β и B определяются таким же образом. Подобный процесс можно продолжать сколь угодно далеко.

Хотя Ньютон, не имевший еще для исследований этого рода в своем распоряжении никаких подготовительных работ, должен был сосредоточивать свое внимание по преимуществу на простых случаях в которых показатели α, β и т. д. можно определить легко (обычно они являются последовательными или идущими через одно числами натурального ряда), однако, он дает графический метод, который мы называем параллелограмом Ньютона и который, в частности, может служить для отличения различных рядов, представляющих различные ветви (циклы, как часто называют их теперь) кривой $f(x, y)=0$. Изложение этого метода мы находим как во втором письме к Лейбницу (1676), так и в „Методе флюксий". При определении показателя α показатели (m и n) при y и x в каждом отдельном члене уравнения $f(x, y)=0$ принимаются за абсциссу и ординату точки в прямоугольной системе координат, и через две или большее количество определенных таким образом точек проводится прямая так, чтобы все остальные точки лежали по противоположную сторону от начала. Тогда в одном из возможных рядов значение α будет равно угловому коэфициенту этой прямой, взятому с противоположным знаком; действительно, для точек, через которые проходит эта прямая, величина $\alpha m+n$ имеет одно и то же значение, и притом меньшее, нежели значения, получаемые при подстановке координат других точек.

Ньютон видел, что его метод применим не только в том случае, когда имеется алгебраическое уравнение между x и y, но и

тогда, когда x уже выражен с помощью бесконечного ряда, расположенного по возрастающим степеням y, так что метод может служить для так называемого обращения такого ряда. При практическом решении этой задачи от внимания Ньютона не могло ускользнуть, что в этих случаях вычисления упрощаются, благодаря отсутствию членов с высшими степенями x, а также членов, содержащих как x, так и y. Это обстоятельство дает возможность, по мере того как вычисления продвигаются далее, одновременно определять все большее число членов.

Так, в „Анализе" Ньютон, обращая (логарифмический) ряд (стр. 305)

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

и найдя сперва

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + q,$$

определяет затем в q сразу 3 члена. Достигает он этого следующим путем: в получающемся после подстановки уравнении

$$-\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{20}z^5 + \dots + \left(1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \dots\right)q + \dots = 0$$

он не довольствуется приравниванием нулю суммы двух членов $-\frac{1}{6}z^3 + q$, что дало бы по его обычному правилу следующий член ряда. Он учитывает, что все члены ниже 6-й степени содержатся в написанном нами выражении, так как все члены q не ниже 3-й степени. При делении

$$q = \frac{\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5 \dots}{1 - z + \frac{1}{2}z^2 \dots}$$

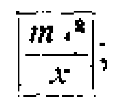
можно, таким образом, сразу взять 3 члена частного, так как их определение совершенно не зависит от членов уравнения, содержащих z^6, qz^3, q^2,... Находим:

$$q = \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + r,$$

где все члены r не ниже 6-й степени. Ньютон, однако, применяет этот прием не вполне последовательно: действительно, полагая $x = z + p$, он нашел бы таким образом два члена p, а именно $p = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$, а затем сразу получил бы четыре члена q.

Ньютон отмечает и показывает на одном примере, что совершенно аналогичный прием можно применить к разложению по убывающим степеням. В этом случае, если мы примем переменные (x и y) за текущие координаты кривой, члены, не имеющие отрицательного показателя, определяют асимптотическую кривую или, если они не выше 1-й степени, прямолинейную асимптоту. При интегрировании (нахождении квадратуры) такого ряда Ньо-

тон определенно отмечает, что член $\frac{ma^2}{x}$ дает гиперболическую площадь, которой он дает обозначение



то, что такая площадь представляет логарифмический член ряда, было вещью знакомой.

Для того чтобы ряд, получаемый путем указанного здесь постепенного образования членов, имел какое-нибудь значение, он должен быть сходящимся. Ньютон не может, правда, установить на этот счет общего правила; но он сознает эту необходимость и показывает как в отдельных данных случаях, давая x достаточно малые значения, можно достичь того, что остаточный член p, q, r, ..., определяемый последовательно с помощью уравнений, становится меньше любого наперед заданного числа. Он основывается при этом на том, что в уравнении, служащем для определения одной из этих величин, например r, член, незачисящий от r, содержит множителем все время более высокую степень x. Этим обеспечивается возможность выбора такого значения x, при котором, беря известное конечное количество членов, мы делаем остаточный член меньше любого наперед заданного числа. Для того же, чтобы можно было достичь этого бесконечным увеличением числа членов без одновременного уменьшения x в зависимости от заданной границы, надо не только обладать, подобно Ньютону, правилом для постепенного образования членов, но и иметь возможность оценить величину остатка, соответствующего произвольно выбранному члену ряда. Такой возможностью однако в то время еще не обладали.

Таким образом существовали технические трудности, помешавшие Ньютону установить общие предложения относительно необходимых условий сходимости; но во всяком случае у него этот вопрос не оставался вне поля зрения, как это имело место в следующем столетии. Исходной точкой у Ньютона, как и у античных математиков, является 1-е предложение 10-й книги Евклида (стр. 293); Ньютон старается и в новых, более широких областях, в которые он вступает, придерживаться античной точности.

Ньютоновы бесконечные ряды в первую очередь представляли собою средство для квадратур, так как с их помощью подлежащая интегрированию величина получала вид, удобный для интегрирования; однако в то же время эти ряды давали и нечто иное. До тех пор зависимость между двумя переменными величинами изображалась как зависимость между абсциссой и ординатой кривой, обладающей известными свойствами. Это имело место с тех пор, как Менехм изобразил взаимную зависимость двух средних пропорциональных с помощью парабол и гипербол. Связь такого античного изображения с изображением, которое начали теперь давать с помощью основанной на арифметике

алгебры, ясно и отчетливо выступила благодаря декартовой аналитической геометрии. Даже такие функции, которые получаются путем интегрирования, находили свое выражение в виде площадей, — например, как мы только что видели, логарифмы — в виде площадей, ограниченных гиперболой, а круговые функции — в виде частей площади круга. Что касается до функций обратных, то определенное представление о функциях, обратных круговым, давала, правда, тригонометрия, но общее понятие о функции, обратной логарифмической, еще совершенно отсутствовало.

Не устанавливая прямо понятия функции, Ньютон по существу фактически устранил эти недостатки, так как его бесконечные ряды давали арифметически-алгебраическое изображение всех таких функций, как упомянутые здесь. Ряд, представляющий алгебраическую функцию, выводится из определяющего ее алгебраического уравнения; ряды для круговых и логарифмических функций выводятся отсюда с помощью квадратуры; обращение же этих рядов дает ряды для тригонометрических и показательных функций.

В следующей главе мы упомянем некоторые из полученных таким образом результатов; здесь же ограничимся еще лишь одним замечанием. Главною целью рядов было основанное на них числовое определение, степень точности которого обеспечивалась только что упомянутыми исследованиями сходимости. Между тем, прием, примененный для разложения в ряд, может быть применен также и непосредственно к числовому определению корня y числового уравнения $f(y) = 0$. Если с помощью проб найдено приближенное значение корня b, то, вставив в уравнение значение $y = b + p$ и отбросив все степени p выше первой, мы найдем из образованного таким образом нового уравнения приближенное значение p и, таким образом, получим более точное значение корня. Если обозначить найденное таким образом более точное значение y через c, то можно положить, далее, $y = c + q$ и таким образом получать все большую и большую точность.

Прием этот, обычно носящий имя Ньютона, применялся, однако, некоторыми исследователями (в частности, Виета, стр. 126) уже и раньше и притом даже более систематически. У Ньютона в его „Анализе" этот прием предшествует разложению в ряды, посредством которых корень уравнения выражается через независимую переменную, содержащуюся в его коэфициентах.

9. Результаты ньютоновых разложений в ряды и интегрирований.

Желая дать здесь некоторые из важнейших результатов, достигнутых Ньютоном с помощью рассмотренных выше методов, мы должны различать, с одной стороны, те результаты, которые стали рано известны благодаря хранившемуся у Коллина „Анализу" и посланным через Ольденбурга письмам к Лейбницу;

с другой стороны, — те, которые были опубликованы лишь в следующем столетии в „Квадратуре кривых". В „Квадратуре кривых" мы находим результаты, обладающие большей общностью. Однако они тесно связаны с вопросами, которые разработаны в первых двух упомянутых произведениях, и потому можно думать, что в основном Ньютон получил эти результаты в то же время, что и первые. В „Анализе" мы находим не только впервые опубликованный Меркатором (стр. 305) ряд для гиперболической площади $z = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x}$, а именно:

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

но и обращение его

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \ldots$$

Ньютон ясно указывает закон образования коэфициентов. Так как при этом было известно, что гиперболическая площадь пропорциональна логарифму $1 + x$, то $1 + x$ есть то же, что наше e^z, и следовательно, Ньютон изобразил эту функцию с помощью ряда:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Так как он не доказывает, что такое образование членов продолжается и при дальнейшем разложении в ряд, то, повидимому, он получил этот результат лишь с помощью индукции. Однако с знанием приема, с помощью которого он сразу определял несколько членов этого ряда (стр. 355), у него могло быть связано несколько более глубокое понимание того, что члены должны были образовываться именно по указанному здесь закону. Вероятно, что он сам проверил справедливость этого закона для нескольких следующих членов ряда. О доказательстве того, что найденное разложение справедливо для всех значений z, нет и речи.

Другое выражение для гиперболических площадей Ньютон получает, раскладывая в ряд интеграл

$$\int\limits_0^x \sqrt{a^2 + x^3}\, dx.$$

Подобным же образом он получает разложения в ряд частей площади круга:

$$\int\limits_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^x \sqrt{x(1-x)}\, dx.$$

Более непосредственное применение находят разложения в ряд длины дуги окружности. Так, Ньютон выражает длину дуги s

окружности с диаметром 1 через проекцию x этой дуги на диаметр, проведенный через начало дуги $\left(x=\frac{1}{2}\sin\operatorname{vers} 2s\right)$ и, интегрируя бесконечный ряд, находит:

$$s=\int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}=x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{33}{1152}x^4+\right.$$
$$\left.+\frac{63}{2816}x^5+\ldots\right).$$

Таким же образом Ньютон находит для длины z дуги, синус которой (в окружности радиуса 1) равен x (т. е. для $z=\arcsin x$) ряд:

$$z=x+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\ldots$$

и через обращение его

$$\sin z=z-\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots$$

Отсюда он выводит, в свою очередь, что

$$\cos z=\sqrt{1-x^2}=1-\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$$

Давая эти результаты, Ньютон также вполне определенно отмечает закон образования коэфициентов.

Далее, Ньютон сообщает, как можно образовать ряд для $\int^x \frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}dx$, с помощью которого, как он утверждает, выражается длина дуги эллипса. Сверх того, он находит разложения для площадей, ограниченных дугою циклоиды или квадратрисы и прямою; при этом он подчеркивает, что пользование рядами чрезвычайно расширяет поле приложимости анализа.

Дальнейшие указания мы находим в отправленных через Ольденбурга письмах Ньютона к Лейбницу. Первое из них является ответом на вопрос Лейбница относительно рядов, которыми, как он слышал, владеет Ньютон. Ньютон дает в общем очень подробный ответ на это. Биномиальную формулу он, правда, приводит без всякого обоснования, но дает ясные примеры таких применений ее, при которых показатель есть число дробное или отрицательное. Для самого Ньютона, впрочем, обоснование этой формулы содержится в его разложении в ряды величин, определяемых алгебраическими уравнениями; а это разложение, равно как и соответствующий ему способ численного решения алгебраических уравнений он показывает на одном примере, содержащемся в письме. Далее, он дает указания относительно многих других своих результатов — относительно рядов для $\arcsin x$ и $\sin x$, разложения, с помощью которого решается кеплерова задача и т. д.

Сверх того, он добавляет ряд замечаний относительно применения рядов. Если разложить $x = \arcsin z$ и вставить это выражение x в разложение $\sin nx$, то этот последний синус выражается через $\sin x$, или, как Ньютон говорит здесь, хорда дуги nx выражается через хорду дуги x. Он замечает, что полученный таким образом ряд для нечетного n кончается сам собою и дает уже знакомое выражение для хорды n-кратной дуги.

Если из выражений для $\sin z$ и $\sin \frac{1}{2} z$ исключить член 3-й степени, то, пренебрегая членами 5-й и высших степеней, получаем:

$$8 \sin \frac{1}{2} z - \sin z = 3z,$$

что находится в согласии с применявшейся Гюйгенсом приближенной формулой (стр. 298). Ньютон выводит, далее, из ряда для $\arcsin \operatorname{vers} x$ другие еще более точные приближения.

Ньютон останавливается также в своем письме несколько ближе на законе образования коэфициентов ряда для длины дуги эллипса и показывает, как с помощью обращения ряда можно образовать выражение абсциссы эллипса через длину дуги, т. е. в современной терминологии, ряд для некоторой эллиптической функции. Ньютон упоминает также, что те же задачи могут быть решены для гиперболы.

О том, что Лейбница заинтересовало содержание письма Ньютона, и о том, что он хорошо его понял, свидетельствует то, что новые его вопросы относятся как раз к тому, чего не было в письме Ньютона. Вопросы эти относятся именно к обоснованию биномиальной формулы и к несколько более подробному пояснению приема, который надо применять при разложении в ряд алгебраических функций и при обращении рядов. Лейбниц и сам владел подобным приемом, так что в своем ответе Ньютону он мог сообщить результат разложения в ряд e^x, который, правда, был установлен и Ньютоном в его „Анализе", но в письме Ньютона не был упомянут. Кроме того, Лейбниц сообщает свое собственное (ранее найденное также Грегори, стр. 297) разложение $\operatorname{arc\,tg} x$ и применение его к вычислению π:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Интерес, проявленный Лейбницем, встретил отклик у Ньютона и побудил его к дальнейшим сообщениям. Он отвечает на вопросы Лейбница в своем втором письме; письмо это, в связи с „Анализом", с которым Лейбниц познакомился тем временем, содержит сведения, о которых мы говорили в предыдущей главе; в частности, Ньютон рассказывает здесь о том, как он пришел к биномиальной формуле. Касаясь двух рядов для e^x и e^{-x}, которые Лейбниц нашел каждый сам по себе, Ньютон указывает, что он объединяет их в один ряд, беря x со знаком. По поводу

лейбницева ряда для $\frac{\pi}{4}$ он говорит, что потребовалась бы 1000 лет, чтобы с помощью его вычислить 20 десятичных знаков; это замечание свидетельствует о практической цели, которую он преследовал при разложении в ряды, что заставляло его требовать не только сходимости, но и сильной сходимости. Именно поэтому абстрактный вопрос о сходимости не представлял для него значительного интереса.

Ньютон делает, далее, в своем письме новые интересные сообщения о квадратурах. Особенно надо отметить из них известные правила об интегрируемости биномиального диференциала. Ньютон говорит, что квадратура кривой

$$y = az^{\vartheta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$$

имеет конечную форму, если $\frac{\vartheta + 1}{\eta} = r$ есть целое положительное число; с одним из приведенных им примеров этого он связывает преобразование написанного выше уравнения в

$$y = az^{\vartheta+\lambda\eta}(ez^{-\eta} + f)^{\lambda},$$

откуда следует, что интегрирование выполнимо также тогда, когда $\frac{\vartheta + 1}{\eta} + \lambda = r$ есть целое положительное число; он добавляет, что эти случаи, сколько он может видеть, являются единственными.

Ограничение относительно положительности r обусловлено тем обстоятельством, что Ньютон требует здесь алгебраического интегрирования. При этом он отнюдь не игнорирует возможности интегрирования в других формах; в частности, сведение к логарифмическим и круговым интегралам он характеризует как сведение к квадратурам конических сечений и дает пример этого.

Наконец, он указывает в своем письме на приближенную квадратуру, которую можно получить, заменяя данные кривые более простыми. Той же цели получения приближенных квадратур Ньютон достигает с помощью своей интерполяционной формулы, выведенной в его „Разностном методе" („Methodus Differentialis"). Об этой формуле мы уже говорили выше (стр. 224).

Квадратуры, сообщенные Лейбницу, являются лишь примерами, взятыми из большого количества их, которым обладал Ньютон. Как мы знаем, еще в 1666 г. он выделил из них те простые квадратуры, к которым было бы целесообразно сводить другие. Другой пример того, как далеко продвинулся Ньютон в этой области, мы находим в относящемся к тому же времени сообщении, сделанном им Коллину: он говорит, что если кривая изображается трехчленным уравнением

$$ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\delta} + cy^{\tau} = 0,$$

то он через несколько минут сможет ответить, можно ли получить ее (алгебраическую) квадратуру, а в противном случае ука-

зать простейшую фигуру, с которой ее можно сравнить (т. е. простейшие интегралы, к которым сводится ее квадратура).

О том, какова была степень общности той теории, которая лежала в основе всех этих результатов Ньютона, позволяет судить появившаяся в 1704 г. его работа „О квадратуре кривых“. В этой работе Ньютон задается целью найти признаки, по которым можно судить, можно ли выразить в алгебраической форме квадратуру алгебраической кривой и, если нельзя, то к каким более простым квадратурам можно свести задачу. Термин „алгебраическая кривая“ следует понимать, впрочем, в более узком смысле, чем это принято в современной математике. Именно, в выражение для ее ординаты могут входить радикалы, под которыми не должно быть никаких других новых радикалов, кроме, может быть, целых степеней выражения z^{η} (z — абсцисса; η — любое рациональное число).

Ньютон рассматривает сначала кривую, площадь которой представляется через абсциссу выражением вида $z^{\vartheta}R^{\lambda}$, где R — многочлен относительно z^{η}. Как нетрудно видеть, ее ордината представляется выражением вида $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}Q$, где Q также — многочлен относительно z^{η}, коэфициенты которого линейно выражаются через коэфициенты многочлена R. В таком же виде могут быть представлены ординаты кривых $z^{\vartheta+\eta}R^{\lambda}$; $z^{\vartheta+2\eta}R^{\lambda}$; $z^{\vartheta+3\eta}R^{\lambda}$ и т. д.

Если теперь ордината кривой представляется выражением $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\ldots)$, где в скобках — многочлен относительно z^{η} с данными коэфициентами a, b, c, ..., то квадратуру этой кривой Ньютон получает методом неопределенных коэфициентов, стараясь представить ее в виде:

$$z^{\vartheta}R^{\lambda}[A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+\ldots]=Az^{\vartheta}R^{\lambda}+Bz^{\vartheta+\eta}R^{\lambda}+Cz^{\vartheta+2\eta}R^{\lambda}+\ldots$$

Вообще говоря, при этом получается бесконечный процесс, но в некоторых случаях он обрывается, и тогда мы получаем алгебраическую квадратуру.

Такова основная идея Ньютона. Развивая ее, он рассматривает более сложное выражение площади $z^{\vartheta}R^{\lambda}S^{\mu}$, и рассуждая так же, разыскивает квадратуру кривой вида $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}Q$. Этот метод применяется Ньютоном, в частности, к диференциальному биному. Применяя его, можно найти оба случая интегрируемости в конечном виде (Ньютон указывает один из них). Этим же методом, очевидно, были найдены и результаты, сообщенные Лейбницу.

В том сочинении, о котором мы говорим, Ньютон применяет этот метод к следующим квадратурам:

$$\int\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}\,dz=\frac{z^4}{z^3-3z+2}$$

$$\int\frac{3q^4-q^3x+9q^2x^2-qx^3-6x^4}{(q^2-x^2)\,(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}\,dx=\frac{3q^2x+3x^3}{(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{\frac{1}{2}}}$$

В случае, если интегрирование невыполнимо в конечной форме, сведение к более простым формам осуществляется путем установления линейной зависимости между

$$\int z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}\,dz, \int z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-1}\,dz, \int z^{\vartheta+2\eta-1}R^{\lambda-1}\,dz, \ldots$$

и соответствующей зависимости между интегралами вида:

$$\int z^{\vartheta}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\,dz.$$

Эти соотношения выводятся из выражений флюксий $z^{\vartheta}R^{\lambda}$ и $z^{\vartheta}R^{\lambda}S^{\mu}$. Ньютон показывает, что квадратуры вида $\int z^{\vartheta+\delta\eta}R^{\lambda+\tau}\,dz$ и $\int z^{\vartheta+\delta\eta}R^{\lambda+\tau}S^{\mu+\nu}\,dx$, где δ, τ и ν — произвольные целые числа, а остальные — данные постоянные, могут быть представлены через алгебраические выражения и некоторое число m более простых интегралов той же формы; в первом случае m на 1 меньше числа членов в R, во втором случае m на 2 меньше общего числа членов в R и S.

Мы видим, что Ньютон при выводе своих рекуррентных формул не прибегает, как это обычно делается теперь, к интегрированию по частям, но пользуется лишь алгебраическими соотношениями между соответствующими диференциалами. Суммарно указывая результаты, он оставляет без внимания особые случаи, в которых сведение становится невозможным.

Другие рекуррентные формулы получаются затем путем преобразования квадратур с помощью подстановки; Ньютон, который знал не только, подобно Ферма, диференцирование, но и взаимно обратную связь его с квадратурою, был в состоянии выполнять эту операцию полностью. Относящееся сюда предложение его можно выразить следующим образом: $\int y\,dz = \int v\,dx$, если $\frac{dz}{v} = \frac{dx}{y}$. Это равносильно преобразованию:

$$\int y\,dz = \int y\,\frac{dz}{dx}\,dx.$$

При этом предполагается соответствующее изменение пределов интегрирования.

Мы не будем останавливаться на применениях, которые дает этим методам Ньютон; заметим только, что в частности он применил их к вопросу, о котором он писал в 1676 г. Коллину (стр. 361). Он добавляет, далее, составленную, вероятно, в 1666 г. и уже упомянутую нами таблицу простейших кривых, которые можно сравнить с эллипсами и гиперболами, т. е. простейших интегралов, которые можно выразить через круговые и логарифмические функции.

Интегрирование по частям Ньютон применяет лишь косвенным образом, путем перемены ролей абсциссы и ординаты, что делали уже Ферма и Паскаль (стр. 261 и 262). Он приводит некоторые результаты, которые легко доказать a posteriori диференци-

рованием, но которые были, повидимому, найдены путем интегрирования по частям.

К числу этих результатов относится, например, выражение кратного интеграла через простой. Записать его можно было бы следующим образом:

$$\int_0^t \int_0^{z(n)} y\, dz^{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-z)^n y\, dz.$$

Так как интегрирования в рассматриваемом нами труде выполняются как квадратуры, а последние соответствуют определенным интегралам, то Ньютон при разобранных нами исследованиях не нуждается в произвольной постоянной. Однако метод его, как он сам усиленно подчеркивает, базируется на взаимно обратной зависимости между квадратурой и образованием „флюксии“ данной „флюенты“ (диференцированием). Поэтому перед ним должен был также вставать вопрос о чисто аналитическом значении операции, выполняемой путем квадратуры, т. е. об образовании флюенты данной функции (функции, имеющей данную производную). В конце своего сочинения Ньютон определенно отмечает, что функция, найденная с помощью этой операции, должна содержать член, могущий иметь произвольное постоянное значение, а также что n-кратное повторение этой операции влечет за собою появление в качестве слагаемого произвольного многочлена $(n-1)$-й степени.

10. Ньютонов метод флюксий.

В „Квадратуре кривых“ Ньютон пользуется терминами „флюксия“ и „флюента“ и соответствующими обозначениями (стр. 348). Он вводит даже флюксию от флюксии. Но названия и обозначения эти не играют по существу большой роли, так как в работе этой Ньютон применяет их только при образовании флюксии данной флюенты, т. е. только при диференцировании. Еще раньше, в „Анализе“, Ньютон изложил этот процесс с полной ясностью, связав его с определением ординаты кривой, площадь которой выражена через абсциссу, причем не употреблял даже слова „флюксия“. Таким образом не было особой нужды вводить в „Квадратуру кривых“ обозначение флюксии; гораздо нужнее было бы ввести обозначение интеграла, которым мы пользовались здесь, как и раньше, чтобы облегчить обзор результатов. Но этого Ньютон не делает и всюду пользуется старинным представлением интегрирования как геометрической задачи разыскания квадратуры.

Тем не менее, во введении к сочинению „О квадратуре“ Ньютон воспользовался случаем дать разъяснения относительно понятия флюксии и употребления соответствующего обозначения; до тех пор он сделал это только в кратких указаниях в одном из примечаний к „Началам“ и в двух письмах к Валлису,

которые были напечатаны в сочинениях последнего и в которых Ньютон расшифровал свою анаграмму из письма к Лейбницу (стр. 66). В „Началах" мы не находим, однако, обозначения флюксии, а встречаемся лишь со словом „флюксии", служащим названием конечных величин, пропорциональных мгновенным или бесконечно малым приращениям. Самые эти приращения он называет „моментами"; в „Анализе" это слово также заменяло слово „флюксии".

Важная роль новых понятий и символов выясняется тогда, когда приходится одной и той же аналитической операции давать различные применения или когда приходится решать уравнения, содержащие как флюксии, так и флюенты. Наилучшее представление о том, что внимание Ньютона было обращено именно на такие содержательные применения, и понятие о том, как далеко он ушел в этом отношении, мы получаем из его „Метода флюксий", сочинения, в основном написанного уже в 1671 г., но опубликованного лишь после смерти Ньютона (1736). Поэтому при нашем рассмотрении метода флюксий и его применений мы и будем преимущественно придерживаться этого сочинения.

Точное определение флюксий заключено (как уже отмечено на стр. 348) в правиле для их образования; правило это совпадает с тем, которое Ньютон дал в конце „Анализа", не употребляя слова „флюксия" и соответствующего обозначения (стр. 351). Имея n одновременно изменяющихся величин, флюент $x, y, z, \ldots$, которые удовлетворяют $n-1$ уравнению и, следовательно, могут быть рассматриваемы все как функции одной из них, Ньютон заменяет в каждом из таких уравнений x, y, z через $x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$, $z+\dot{z}o, \ldots$ Члены, не содержащие o, могут тогда быть уничтожены. Произведя сокращение на общий множитель o и полагая затем $o=0$, Ньютон получает уравнение, однородное относительно $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ Эти величины — флюксии — можно рассматривать как скорости, с которыми изменяются величины $x, y, z, \ldots$, или как производные от $x, y, z, \ldots$ по времени. Отношение $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ обозначает по своему образованию совершенно то же, что производная $\frac{dy}{dx}$, и само ньютоново определение флюксий $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$ можно рассматривать как ясное и независимое от неопределенного (indefinierte) понятия „бесконечно-малой" определение дифференциалов dx, $dy, \ldots$[1].

[1] Трудно понять, каким образом Цейтен, прекрасно владеющий материалом и мастерски его излагающий, допускает такое явно несоответствующее положению вещей толкование ньютонова „Метода флюксий". Как было отмечено в одном из примечаний (стр. 349), Ньютон колебался в понимании вопросов обоснования анализа. В частное и, в „Квадратуре кривых" он стремится изгнать бесконечно малые количества и считает, что приращения величин обращаются в „чистые" нули; характеристический треугольник он считает там просто точкой. Этим он хочет освободиться от необходимости пренебрегать бесконечно малыми, ибо, как он говорит, в математике нельзя допускать даже самой малой ошибки.

Указанное правило образования флюксий прежде всего относится к алгебраическим уравнениям, имеющим целый рациональный вид. Чтобы получить такой вид, Ньютон обычно вводит новые обозначения (z и т. д.) для иррациональных выражений данного уравнения; таким образом бывает, что уже при определении отношения между флюксиями двух переменных получается несколько уравнений с несколькими неизвестными. Чтобы найти, например, $\frac{\dot y}{\dot x}$, когда $y=\sqrt{a^2+x\sqrt{a^2-x^3}}$, Ньютон полагает $x\sqrt{a^2-x^2}=z$ и получает подлежащие диференцированию уравнения

$$y^2-a^2-z=0 \text{ и } a^2x^3-x^4-z^2=0.$$

Ньютон достигает этим, с одной стороны, ясного определения того, как в многозначных выражениях отдельным значениям флюент соответствуют отдельные значения флюксий; с другой стороны, он получает действительное доказательство. Было бы, однако, ошибочно вывести из этой общей формы изложения заключение, что творец общей биномиальной формулы не знает, как непосредственно написать выражение для флюксии корня. То, что он умеет это делать, он многократно показывает в своем сочинении „О квадратуре". Подобной же подстановкой пользуется он, как мы сейчас увидим, и тогда, когда он отыскивает, как мы сказали бы теперь производные высших порядков.

В таких случаях Ньютон умеет также пользоваться тем обстоятельством, что независимое переменное еще не выбрано. Если принять, например, что величина $\dot x$ меняется равномерно, то $\dot x$ постоянно и может быть принято равным 1; это равносильно тому, что x выбирается за независимую переменную. Подобным же образом поступал уже Непер (стр. 135), застав-

---

Это „исчисление нулей" логически еще менее обосновано, чем исчисление бесконечно малых, а практически провести его, как некоторый символический алгорифм, можно только для алгебраических функций. Нам нет нужды, однако, сейчас останавливаться на этом вопросе, так как нас интересует сейчас другое сочинение Ньютона — „Метод флюксий". В этом сочинении, написанном, как известно, раньше чем „Квадратура кривых", Ньютон, вопреки тому, что можно вывести из текста Цейтена, прямо стоит на точке зрения бесконечно малых и даже явно пользуется этим термином (infinite parvae quantitates) Приведя сначала правило для нахождения отношения $\frac{\dot y}{\dot x}$ (которое отнюдь не является для Ньютона *определением* флюксии), Ньютон поясняет это правило примером, а затем дает ему доказательство. Это доказательство непосредственно основано на том, что после деления на бесконечно малую величину отбрасываются все те члены, которые содержат еще o множителем.

„Члены, на нее умноженные, в сравнении с остальными могут быть приняты за ничто; поэтому я ими пренебрегаю" („termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati; eos igitur neglego"), — так говорит Ньютон.

Таким образом утверждение автора, к которому сделана эта сноска, никак не может быть признано правильным.

Прим. ред.

лявший одну из двух одновременно движущихся точек двигаться с постоянною скоростью, так что ограниченный этою точкою переменный отрезок изменялся равномерно.

Как только что было указано, Ньютон пользуется этим обстоятельством при отыскании флюксий от флюксий. Когда он принимает, таким образом, x за независимую переменную, то получает $\dot{x}=1$, и следовательно, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dot{y}$. Эту величину он обозначает через z, а флюксию ее через $\dot{z}$. Еще яснее обозначение $\ddot{y}$. Оно обозначает (если $\dot{x}$ положено равным 1) то же, что наш (введенный Лейбницем) символ $\frac{d^2y}{dx^2}$, так же как $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$ соответствуют нашим $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$. В „Методе флюксий“ Ньютон, однако, не употребляет указанных здесь обозначений флюксий высших порядков; он упоминает о них в письмах к Валлису (1692) и применяет их в написанном, несомненно, позднее введении к сочинению „О квадратуре“, т. е после того, как стали известны соответствующие обозначения Лейбница. Сам Ньютон, однако, пользовался уже в 1666 г. не только точкой для обозначения флюксии, но иногда и двумя точками для обозначения флюксии от флюксии.

Однородность уравнений, теряемую при подстановке $\dot{x}=1$, что, далее, влечет за собою $\ddot{x}=0$, Ньютон восстанавливает, вводя в различные члены надлежащее количество множителей $\dot{x}$, на что он имеет право при $\dot{x}=1$.

Мы видим, что понятие независимой переменной — хотя самый термин этот еще не употреблялся — дается совершенно так же ясно и просто, как в каком-нибудь современном учебнике.

Установленным общим правилом можно пользоваться, даже не выводя из него особых правил образования флюксии произведения, частного и т. д., для того, чтобы из выражения флюенты через другую флюенту вывести отношение между их флюксиями или из системы уравнений между флюентами получить столько же уравнений между флюентами и их флюксиями. Далее, к главным заслугам Ньютона, как мы уже не раз отмечали, принадлежит то, что он (уже в „Анализе“) считает нужным начинать с более простой операции нахождения флюксии и систематическое изучение квадратур. Квадратуры сводились им к обратной операции — нахождению флюенты данной флюксии. Ньютон занимается этим вопросом в сочинении „О квадратуре“ в „Методе флюксий“ этот вопрос рассматривается как частный случай другого, более общего вопроса о нахождении уравнения между флюентами, когда дано уравнение, содержащее флюксии.

Ньютон прежде всего задается вопросом, как, имея уравнение

$$M\dot{x}+N\dot{y}=0,$$

полученное непосредственно путем образования флюксии (диференцирования), найти первоначальное выражение, содержащее

x и y, из которого получилась левая часть. При этом он рассматривает, однако, только те случаи, когда M и N—целые рациональные функции x и y. Он берет при этом в

$$\int M\,dx + \int N\,dy$$

члены, входящие в оба интеграла, лишь один раз. Тогда, если $M\dot{x} + N\dot{y}$ действительно образовано диференцированием выражения, содержащего x и y, это выражение является найденным; Ньютон, однако, не забывает отметить, что такое выражение не всегда существует и что поэтому найденный результат всегда должен быть испытан.

В тех случаях, когда нельзя применить этого приема, Ньютон прибегает, как и при простых квадратурах, к разложению в ряды. Он решает сперва данное уравнение, содержащее флюксии, относительно $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ или (полагая $\dot{x} = 1$) относительно $\dot{y}$. Если полученное таким образом выражение не является целым и рациональным относительно x и y, то Ньютон обычно представляет такое выражение в бесконечной форме путем разложения в ряд с положительными и возрастающими показателями при x и y Если этого нельзя сделать непосредственно, как, например, в уравнении:

$$\dot{y} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{x^2},$$

то разложение достигается путем замены переменных (в приведенном примере путем замены x и y через $1-x$ и $1-y$). То обстоятельство, что это преобразование представляет собою лишь введение новых переменных, явствует из делаемого Ньютоном в дальнейшем решении замечания, что он лишь для удобства продолжает пользоваться для новых переменных теми же обозначениями, как и для первоначальных.

Чтобы получить, после приведения уравнения к более удобному виду, разложение y по возрастающим степеням x, Ньютон пользуется методом неопределенных коэфициентов. При этом свободный член разложения остается произвольным, и в зависимости от выбора его меняются и значения коэфициентов при остальных членах. Это обстоятельство не ускользает от внимания Ньютона. Обычно он, однако, молчаливо предполагает, что свободный член равен нулю, т. е. что искомая кривая проходит через начало координат.

Метод неопределенных коэфициентов применяется Ньютоном не только в прямой, но и в косвенной форме. Именно, вместо того чтобы искать сразу все разложение, он находит постепенно все новые и новые его члены. Процесс этот мы поясним на примере. Ньютон рассматривает уравнение:

$$\dot{y} = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

Если ищется разложение, не содержащее свободного члена, то ясно, что первый член разложения имеет коэфициентом единицу, ибо в выражении $1-3x+y+x^2+xy$ и после того, как вместо y будет подставлено его разложение, будет только один свободный член — единица. Чтобы определить коэфициент при втором члене разложения y (содержащем x во второй степени), достаточно определить второй член разложения $\dot{y}$ по степеням x, содержащий x в первой степени (искомый коэфициент найдется тогда интегрированием). Этот второй член разложения $\dot{y}$ должен быть равен члену, содержащему первую степень в разложении выражения $1-3x+y+x^2+xy$ после подстановки в него разложения y. Но этот член совершенно не зависит от квадратного члена разложения y, а член первой степени мы знаем, ибо, как было показано,

$$y = x + \ldots$$

Итак, подставив $y = x + \ldots$ в выражение $1-3x+y+x^2+xy$, мы найдем:

$$\dot{y} = 1 - 2x + \ldots,$$

откуда

$$y = x - x^2 + \ldots$$

Рассуждая так же, мы установим, далее, что для разыскания третьего члена разложения $\dot{y}$ по степеням x, достаточно снова подставить найденные два члена разложения y в выражение $1-3x+y+x^2+xy$. Мы получим:

$$\dot{y} = 1 - 2x + x^2 + \ldots,$$

откуда

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Продолжая этот процесс, мы будем получать последовательно члены разложения y. Ньютон располагает свои вычисления в следующей форме (здесь уже определен член пятой степени и ищется член шестой степени):

	$\dot{y} = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$ $+1-3x+x^2$
$+y$	$\bigstar + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \ldots$
$+xy$	$\bigstar \quad \bigstar + x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \ldots$
Сумма	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5 + \ldots$
$y =$	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \ldots$

Там, где это проще, разложение в ряд производится по возрастающим степеням не x, а $\frac{1}{x}$, например, в уравнении

$$\dot{y} = -y + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

либо вместо самого y раскладывается в ряд некоторая функция y.

Так, в уравнении

$$\dot{y} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$$

Ньютон полагает $y^{\frac{1}{3}} = z$.

Там, где разложение прекращается само собою, метод Ньютона ведет к интегрированию в конечной форме. Так, предпоследнее уравнение дает $y = \frac{1}{x}$, а из уравнения:

$$\dot{y} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

получается:

$$y = 2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^3.$$

Последнее уравнение служит также примером того, что иногда можно получить разложение y применением метода неопределенных коэфициентов, не приводя предварительно выражения для $\dot{y}$ к целой форме.

Произведенные здесь разложения в ряды дают, так как произвольной постоянной не прибавлялось, частное выражение для y обращающееся в 0 одновременно с x. Так как Ньютон, как мы видели, при случае заменяет x и y через $x - a$ и $y - b$, то таким путем можно было найти любой частный интеграл, пригодность которого обусловливалась границами сходимости найденных таким образом рядов. Ньютон, однако, стремится к разысканию одного из интегралов, а не к получению наиболее общего решения.

Ньютон рассматривает затем также уравнения более чем с двумя переменными. Так как все учение о флюксиях связано с допущением лишь одной независимой переменной, то он указывает, что в тех случаях, когда дано только одно уравнение с более чем двумя переменными и их флюксиями, можно вводить новые соотношения между переменными. Например, если дано уравнение

$$2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0,$$

то можно путем введения нового соотношения, например $x = y^2$, получить уравнение

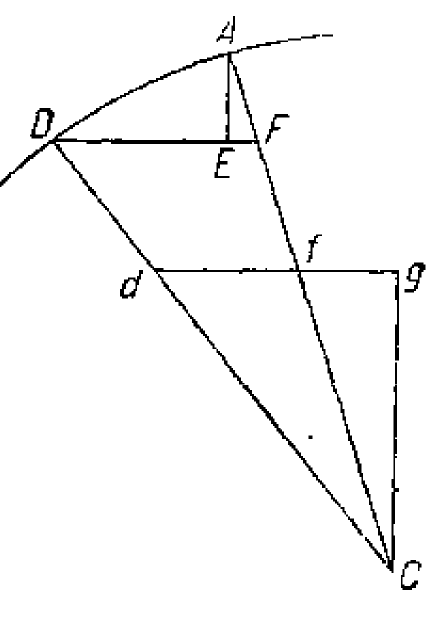
$$4y\dot{y} - \dot{z} + y^2\dot{y} = 0,$$

имеющее интеграл

$$2y^2 - z + \frac{1}{3}y^3 = 0;$$

последнее уравнение, в связи с соотношением $x=y^2$, представляет решение данного уравнения. Ньютон определенно отмечает, что соотношение $x=y^2$ взято лишь в виде примера; таким образом он указывает, в той форме, в которой это было тогда возможно, что x можно положить равным произвольной функции от y. Интегрирование является, таким образом, общим, если отвлечься от частных случаев, когда уравнение в полных диференциалах может быть проинтегрировано с помощью только одного уравнения. Такими случаями Ньютон не занимается.

Далее следуют применения метода флюксий к определению максимальных и минимальных значений, причем Ньютон, однако (в противоположность Лейбницу), не пользуется второй флюксией для отличия максимума от минимума; затем разыскиваются касательные к кривым, которые представляются не только в параллельных и полярных координатах, но и в биполярных или других системах; еще далее, метод флюксий применяется к определению кривизны кривых, к квадратурам и ректификациям. В связи с этим рассматривается вопрос об определении таких кривых, для которых обе последние операции можно действительно выполнить. Кривые эти получаются диференцированием выражений площадей или определением эволют данных кривых. Последний прием был доступен Ньютону уже в 1671 г. благодаря небольшим сообщениям, сделанным Гюйгенсом, хотя работа последнего о маятнике тогда еще не появилась. А так как, с другой стороны, эта работа появилась задолго до ньютоновой, то и метод этот и вся теория эволют, несомненно, получены Гюйгенсом самостоятельно.



Черт. 32.

Благодаря применению флюксий и соответствующих обозначений изложение учения о кривизне у Ньютона проще, чем у Гюйгенса (стр. 333). Подобно Гюйгенсу Ньютон определяет центр кривизны как точку пересечения нормали со следующею нормалью. Пусть (черт. 32) C будет центр кривизны кривой DA, соответствующий точке ее $D(x, y)$. Построим отрезок Cg, параллельный оси ординат и равный 1, и проведем gd параллельно оси абсцисс. Так как CdD есть нормаль, то $dg=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Обозначим эту величину через z. При переходе к следующей нормали, которая должна пересекать первую в C, точка d движется со скоростью $\dot{z}$ и приходит через бесконечно малый промежуток времени o в точку f, определяемую равенством $df=\dot{z}o$. На проведенной через D параллели к оси абсцисс вторая нормаль отсекает отрезок DF, который (как это можно усмотреть из прямоугольного треугольника DAF с опущенным на гипотенузу перпендикуляром

AE) равен $\dot{x}o + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}}o$. Так как $\frac{DF}{df} = \frac{CD}{Cd}$, то, полагая $\dot{x}=1$, откуда $\dot{y}=z$, $Cd = \sqrt{1+z^2}$, получаем радиус кривизны:

$$CD = \frac{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}{\dot{z}}.$$

Так как $z = \frac{dy}{dx}$, $\dot{z} = \frac{d^2y}{dx^2}$, то это выражение совпадает с употребительным теперь.

Ньютон связывает с этим определение точек перегиба помощью равенства $\dot{z} = 0$ (т. е. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$), — определение, которое, как мы видели (стр. 324), фактически было известно уже Ферма. Ньютон называет определяемые таким образом точки точками прямизны (puncta rectitudinis) и замечает, что они действительно вообще являются точками перегиба. Они могут и не быть ими, так как касательная, как мы сказали бы теперь, может иметь с кривою соприкосновение высшего порядка. Ньютон устраняет возможность этих случаев тем, что дает иное определение точки перегиба, именно, он определяет ее как такую точку, касательная в которой отсекает на оси x отрезок (считаемый от некоторой неподвижной точки) максимальной или минимальной длины. Если не считать точек пересечения кривой с осью абсцисс, то такие точки всегда являются точками перегиба в собственном смысле. Этим способом разыскания точек перегиба пользовался, вероятно, в отдельных случаях и Гюйгенс (стр. 325).

Ньютон идет и дальше и исследует даже изменение кривизны, которое он измеряет отношением между флюксиями радиуса кривизны и дуги. В частности, он определяет точки, в которых эта величина обращается в 0 или в ∞. О том, что в „Началах" Ньютон распространяет гюйгенсов способ нахождения эволюты циклоиды на эпициклоиды и гипоциклоиды, мы уже упоминали (стр. 335).

11. Ньютоновы „Начала".

Произведением, которое больше всех других создало всемирную славу Ньютону, являются вышедшие в 1686—1687 гг. „Математические начала натуральной философии" („Philosophiae naturalis Principia mathematica"). Основным содержанием „Начал" является математическое доказательство того, что кеплеровы законы описывают как раз такое движение планет, какое производилось бы притяжением их к центру Солнца с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояний, и что движение Луны и сила тяжести на поверхности Земли находят такое же общее объяснение в притяжении к центру Земли; кроме того, „Начала" содержат существенные доводы в пользу того взгляда, что это притяжение обусловливается взаимным притяжением, существующим между двумя любыми частичками материи, что притяжение

действует на обе частицы и что соответствующие силы равны, противоположно направлены, пропорциональны произведению масс частиц и обратно пропорциональны квадрату расстояния между частицами. В этом отношении нужно особенно отметить математическое доказательство того, что однородный шар или шар, плотность которого зависит исключительно от расстояния от центра, притягивает любую частичку массы таким образом, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре.

Сам Ньютон подчеркивал, что он дает лишь доказательство того, что упомянутые движения таковы же, как движения, производимые указанными силами; он категорически отводил от себя возможность обвинения в том, что он метафизическим путем вкладывает в это утверждение что-либо иное или большее, нежели то, что он может строго доказать[1]. Для того чтобы можно было подвергнуть эти вопросы математической обработке, надо было указать в свободной от всякой неясности и совершенно общей форме, что̀ понимать под притяжением и вообще под силой. Сделав это, Ньютон создал не только понятие силы, в котором он нуждался специально в данных исследованиях, но и вообще то понятие, которым механика пользуется до настоящего времени. Сам он в „Началах“ кладет его в основу многих других исследований, не ограничивающихся законом притяжения, управляющим движением планет.

Первая из его предпосылок — закон инерции — была уже ранее

[1] Здесь нужно заметить, что точка зрения Ньютона на роль объяснения в науке, так же как и его взгляды на обоснование исчисления бесконечно малых (см. примечания на стр. 349 и 365), не отличалась постоянством. Склонный к материалистическим воззрениям, Ньютон, однако, вносил при переиздании „Начал“ — особенно в третье их издание — целый ряд существенных изменений, касавшихся принципиальных вопросов. В частности, точка зрения „чистого описания“, уклоняющаяся от постановки вопроса, *почему* явление происходит, и ограничивающая компетенцию науки ответом на вопрос, *как* явление протекает — эта точка зрения настойчиво проводится Ньютоном в позднейших изданиях „Начал“. Ньютон действительно относит этим к области метафизики вопрос о причинах явления. „Я не измышляю гипотез“ („hypoteses non fingo“) — этот афоризм Ньютона получил широкую известность. Однако менее известно то, что ни этого афоризма, ни ряда других высказываний в духе теории „чистого описания“ не имеется в первом издании „Начал“. Напротив, ряд мест противоположного характера, фигурировавших в первом издании, был потом устранен. Можно считать бесспорным, что главная причина такой нетвердости Ньютона лежит в обстоятельствах социально-политического порядка. По вопросу о движении планет церковь, как известно, имела свою точку зрения. Выступить против этой точки зрения, прямо или косвенно, значило вступить на опасный путь. Ньютон, принадлежавший по своим политическим взглядам к очень консервативной группировке, отнюдь не имел желания вступать в конфликт с церковью. Увидев, что его точка зрения не одобряется теологами и вообще приверженцами чистоты религиозных взглядов, он должен был стать на ту точку зрения, которая, как казалось ему, гарантировала его от конфликта. Насколько искренне он поступал в этом и в других случаях — это вопрос особый, и мы его не будем касаться. Важно, однако, подчеркнуть, что на „Началах“ Ньютона, может быть, ярче, чем на других его произведениях, лежит печать *компромисса*, характерная не только для Ньютона, но проявившаяся у него наиболее резко в силу ряда причин, между прочим, и в силу индивидуальных свойств его личности.

Прим. ред.

известна (стр. 237). Она утверждает, что для того чтобы изменить прямолинейное и равномерное движение тела или вывести тело из состояния покоя, всегда нужна особая сила.

При рассмотрении движения отдельной частицы все дело заключается в том, чтобы знать „ускоряющую силу". Этим термином Ньютон называет то, что мы называем ускорением. „Ускоряющая сила" пропорциональна приращению скорости в бесконечно малый промежуток времени. Это приращение скорости складывается, по правилу параллелограма, с тою скоростью, которую частица уже имеет. „Движущая сила" равна произведению ускоряющей силы и массы движущейся частицы и измеряется, таким образом, — по величине и направлению — количеством движения, производимым ею в данное время.

Ясно, что применение этих предпосылок по необходимости основывается на инфинитезимальных исследованиях, которые были уже систематически выполнены и изложены Ньютоном в его учении о флюксиях. Сама флюксия истолковывалась им как скорость, с которою изменяется величина, т. е. как скорость, с которою движется конец отрезка, представляющего эту величину, в то время как другой конец остается неподвижным; поэтому точный математический способ определения флюксии непосредственно дает возможность находить скорость. Так как речь идет о непрерывно действующих силах, то дело сводится к изменениям скорости, производимым ими в бесконечно короткие промежутки времени, т. е. к флюксиям скоростей и их компонент.

Сам Ньютон говорит в одном письме, что он нашел важнейшие предложения своих „Начал" методом флюксий. Этого, однако, не надо понимать так, как будто он имел в этом методе и связанной с ним системе обозначений готовое средство, с помощью которого он мог бы вывести все эти предложения по готовым правилам, как мы делаем это теперь посредством диференциального и интегрального исчислений в том их виде, какой они приняли к настоящему времени. На самом деле современная форма анализа явилась в значительной степени продуктом постепенного приспособления аппарата анализа к нахождению результатов, многие из которых были найдены уже Ньютоном в то же время, когда создавался метод флюксий. Таким образом „Начала" в столь же значительной мере содействовали дальнейшему развитию исчисления бесконечно малых, в какой сами опирались на это исчисление, в той его форме, в которой Ньютон уже тогда владел им и в какой он изложил его в своем „Методе флюксий". Во всяком случае, лишь через многочисленные промежуточные этапы шел Ньютон от установленных им общих предложений исчисления бесконечно малых к выводу основных предложений „Начал". Эти выводы не требовали, впрочем, выполнения сложных диференцирований или интегрирований. Основная трудность, которую нужно было преодолеть, заключалась в том, что инфинитезимальные операции нужно было применять здесь в

новой области, именно в кинематике и динамике. Ньютон должен был сначала преодолеть эти трудности, и только после этого его общая аналитическая трактовка могла быть ему полезной; при помощи ее он мог распространять на общие случаи те предложения, которые первоначально он получал для частных случаев движения.

При таких обстоятельствах не удивительно, что Ньютон не положил в основу „Начал" свой готовый уже „Метод флюксий", чтобы затем производить дальнейшие построения на его базе. Конечно, существенную роль играло здесь и то обстоятельство, что Ньютон не решался опубликовать свой метод флюксий, который мог вызвать принципиальные возражения. Он не хотел ставить в зависимость от этого метода доказательства своих механических предложений. Но и помимо этого соображения Ньютон имел основания избегать пользования методом флюксий. В самом деле, если не для всех, то во всяком случае для главных результатов, содержащихся в „Началах", такой путь был бы обходным. Если бы построить эти результаты на общем учении о флюксиях, то со стороны Ньютона потребовалась бы еще сперва выработка, а со стороны читателя изучение общего учения о применении теории флюксий к механике. Ньютон приходит к своим главным результатам значительно скорее; ему удается изложить их и дать их полное доказательство уже в начале своего труда. Он достигает этого, подходя к каждой задаче с особыми инфинитезимальными соображениями и синтетически пользуясь нужными ему геометрическими свойствами фигур, с которыми он имеет дело. Что касается, в частности, до конических сечений, то Ньютон почти исключительно пользуется методом древних и результатами Аполлония. Координатного метода „Геометрии" Декарта он почти не употребляет, хотя он и рекомендует в одном из своих писем изучение „Геометрии" как предварительную школу для изучения „Начал".

Ньютон, таким образом, обходится и без техники учения о флюксиях и без техники аналитической геометрии. Но так как в „Началах" Ньютон систематически применяет инфинитезимальные методы (хотя и в синтетически-геометрической форме), то он начинает с установления общих понятий, соответствующих основным понятиям теории пределов. Он указывает, как эти понятия применяются к геометрическим задачам об определении касательных, площадей и длин дуг.

Так, например, Ньютон приводит предложения, которые мы бы выразили, сказав, что пределом отношения длины дуги к длине хорды является единица и что единица служит пределом отношения длины дуги к отрезку касательной (проведенной из точки, служащей одним из концов дуги) от точки касания до точки пересечения с ординатой другого конца дуги. Предел отношения Ньютон называет „последним" или „первым отношением", а приближение переменной величины к некоторому пределу характеризует тем, что разность между ними может быть сделана

меньше любой данной величины [1]. Пользоваться понятиями метода флюксий Ньютон избегает даже там, где эти понятия ему необходимы и где результаты, им излагаемые, были получены им самим прямым применением метода флюксий. Когда во второй книге „Начал" Ньютон вынужден воспользоваться одним предложением из теории флюксий, он вскользь пользуется термином „флюксия", не вводя, однако, соответствующих обозначений, а приводя словесную формулировку предложения (стр. 365). Предложение это состоит в том, что флюксия произведения $x^m \cdot y^n \cdot z^p \ldots$ равна:

$$mx^{m-1}y^nz^p\dot{x} + nx^my^{n-1}z^p\dot{y} + px^my^nz^{p-1}\dot{z} + \ldots,$$

где показатели могут быть числами положительными или отрицательными, целыми или дробными.

Если бы Ньютон использовал представлявшуюся ему здесь возможность сообщить о своем методе флюксий больше, чем он это сделал, то он мог бы показать, что результаты, полученные им, были гораздо более богаты, чем результаты Лейбница, который первые свои сообщения, относящиеся к диференциальному исчислению, опубликовал в 1684 г. Но тогда, по всей вероятности, выход „Начал" был бы надолго отсрочен.

Мы, зная теперь и ньютонов метод флюксий и лейбницево диференциальное исчисление, немного теряем от того, что Ньютон не изложил и не применил в „Началах" метода флюксий. Мы, зная эти методы, легко можем восполнить то, чего нет в

---

[1] Бесспорно, что Ньютон подходил к понятию предела ближе, чем многие его современники. Мы говорим здесь именно о „методе первых и последних отношений", который Ньютон излагает в „Началах". Этот метод с точки зрения обоснования анализа отличен от метода „моментов" (под „моментом", как указывалось выше, Ньютон понимал мгновенное приращение величины). Характерно, однако, что и методом моментов Ньютон пользуется в тех же „Началах" и как раз в том предложении, которое ниже приводится в тексте и где встречается слово „флюксия" (2-я лемма 2-й книги). Таким образом последовательно провести метод первых и последних отношений Ньютон не был в состоянии. Здесь сказывается то обстоятельство, что понятие предела, само по себе как будто и не такое сложное, оказывается далеко не так легко применить к исследованию конкретных геометрических, а тем более механических, проблем. Это положение подтверждается и тем, что Ньютон даже при пользовании понятием „последнего отношения" часто сбивается фактически на метод моментов. Более того, при установлении самого понятия „последнего отношения" Ньютон не может вполне освободиться от представления об актуальных бесконечно малых величинах. Так, о величинах, отношение которых имеет пределом единицу (например, дуга и соответствующая хорда), он говорит, что они „становятся в конце концов равными" („fiunt ultimo aequales"). Эта терминология не случайна и не условна, так как в доказательствах Ньютона она играет действенную роль.

Вообще нужно сказать, что вся история развития анализа показывает, что проведение „предельной" точки зрения не только в приложениях математики, но и в самой математике, было сопряжено на каждом новом этапе с большими трудностями.

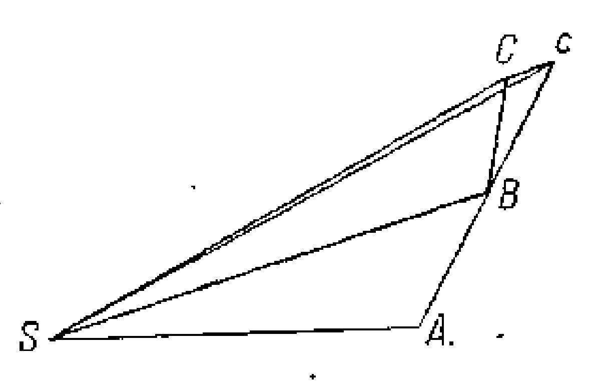
Это не следовало бы забывать (но, к сожалению, забывается) при преподавании анализа. Не входя здесь в подробности, я отсылаю читателя к моей книге „Основы исчисления бесконечно малых".

Прим. ред.

„Началах", а также, переведя то, что содержится в „Началах", на язык современного анализа, удобнее обозреть всю структуру этого произведения. При этом сразу выясняется и то, насколько содействовали сами „Начала" развитию исчисления бесконечно малых (например, решение ряда задач „Начал" равносильно решению диференциальных уравнений, т. е. — в трактовке ньютонова метода флюксий — решению уравнений, содержащих флюксии).

Но если перевод синтетических построений Ньютона на язык анализа облегчает нам понимание многих мест „Начал", то современникам Ньютона изучение „Начал" было бы облегчено чрезвычайно, если бы Ньютон предпослал этой работе общее учение о флюксиях и применил его к получению ряда предложений. Это относится, однако, лишь к тем предложениям, которые являются развитием основных теорем „Начал". Основные предложения небесной механики, как было указано, не могли бы выиграть в ясности от перевода их на язык метода флюксий.

Первое из этих предложений утверждает, что, когда тело движется под действием притяжения к неподвижной точке, движение происходит в плоскости, проходящей через эту точку, и площади, описываемые радиусами-векторами, проведенными из неподвижной точки в движущуюся, пропорциональны соответственным временам.

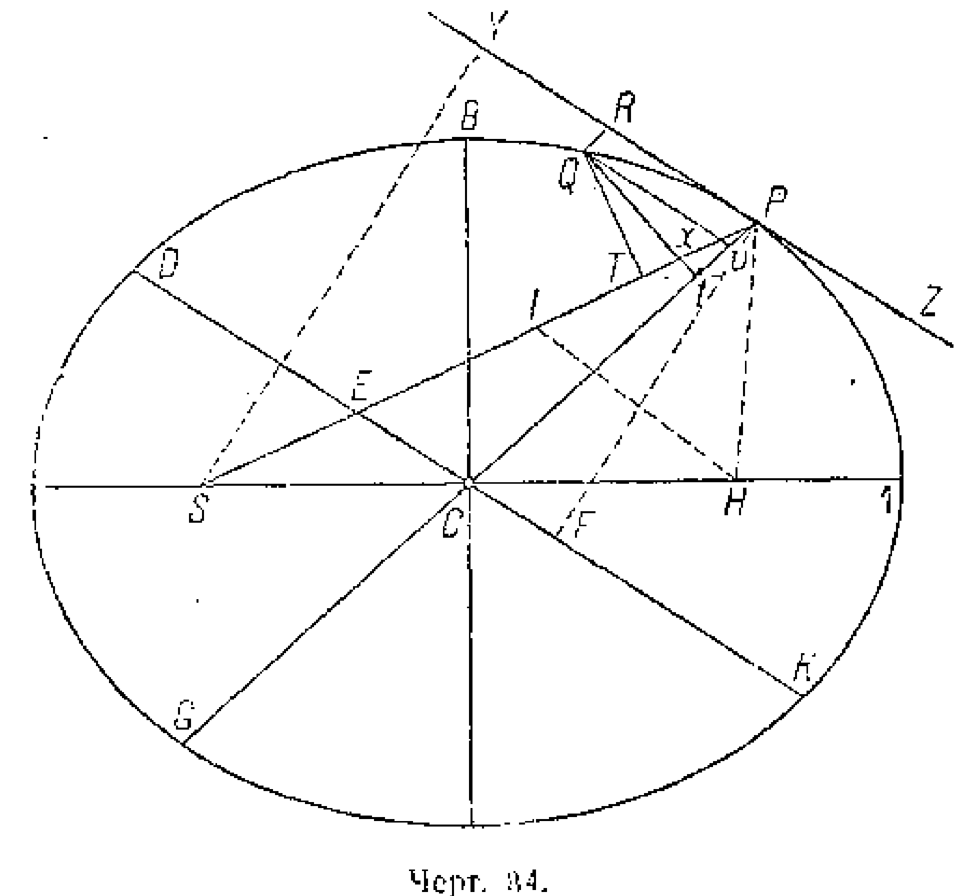


Черт. 33.

Ньютон доказывает (I, 1) это предложение следующим образом: разделим время на равные бесконечно малые промежутки; в течение первого такого промежутка тело прошло путь *AB* (черт. 33). Если бы не существовало силы притяжения, то в течение следующего бесконечно малого промежутка времени тело прошло бы путь *Bc*, равный пути *AB*, и треугольники *SAB* и *SBc* были бы равновелики. В действительности же, говорит Ньютон, в точке *B* тело испытало мгновенный толчок (impulsus), вследствие которого движение продолжается не по прямой *Bc*, а по прямой *BC*. Так как толчок, испытанный телом, направлен по линии *BS*, то место, на котором к концу второго бесконечно малого промежутка времени будет находиться тело на прямой *BC*, мы получим, проводя из точки *c* прямую *cC*, параллельную прямой *BS*. Но тогда треугольники *SBc* и *SBC*, вершины которых лежат на прямой, параллельной основанию, равновелики. Отсюда вытекает равновеликость треугольников *SAB* и *SBC*, соответствующих равным промежуткам времени, а значит, и пропорциональность площадей, описываемых радиусом-вектором, временам. К этому примыкает (I, 2) доказательство того, что, обратно, движение, удовлетворяющее указанным условиям, есть движение под действием центральной силы. В I, 3 это предложение распростра-

няется на относительное движение, при котором, кроме центральной силы, есть еще ускоряющая сила любой величины, действующая и на притягивающее и на притягиваемое тело.

В I, 4 Ньютон доказывает для круговых движений соответствие между 3-м законом Кеплера и случаем притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния; он добавляет, что это соответствие было замечено также уже Вреном, Гуком и Галлеем и что Гюйгенс пользовался им при определении центробежной силы. Следующее затем (I, 6) определение ускоряющей центральной силы, обусловливающей движение точки по данной траектории, основано, как и гюйгенсово определение центробежной



Черт. 34.

силы (стр. 341), на том, что отрезок, на который неизменная ускоряющая сила (g) отклоняет за время t тело от его прямолинейного равномерного движения, пропорционален gt^2. Пусть будет (черт. 34) S притягивающая и P подвижная точка, PQ — дуга, описываемая в бесконечно малый промежуток времени t, RQ — отрезок, отсекаемый на продолжении радиуса-вектора SQ касательной, проведенной из P; тогда ускоряющая сила пропорциональна $\frac{RQ}{t^2}$, или, вследствие предложения о площадях, пропорциональна $\frac{RQ}{SP^2 \cdot QT^2}$, где QT — высота бесконечно малого треугольника SPQ.

Чтобы доказать затем, что центральная сила, обусловливающая движение частицы по эллипсу с фокусом в притягивающей точке, обратно пропорциональна квадрату расстояния, надо только

доказать, что отношение $\frac{RQ}{QT^2}$ (или, как мы предпочли бы написать, чтобы подчеркнуть, что RQ и QT должны быть бесконечно малыми, $\lim \frac{RQ}{QT^2}$) постоянно.

При доказательстве этого (I, 11) Ньютон пользуется еще следующими вспомогательными линиями: диаметром GP, проходящим через подвижную точку, и сопряженным ему диаметром DK; диаметры пересекаются в центре C; радиус-вектор SP пересекает DK в E; прямая PF перпендикулярна к диаметру DK и пересекается с ним в F; прямая Qv, параллельная DK, пересекает SP и CP в точках x и v. Положим для простоты $CP = a_1$, $CD = b_1$ и обозначим полуоси эллипса через a и b.

Из подобия треугольников xPv и EPC имеем:

$$xP = \frac{EP}{CP} vP.$$

Далее, Ньютон использует соотношение, являющееся основным в аполлониевой трактовке конических сечений и соответствующее нашему уравнению конического сечения, отнесенного к произвольному диаметру его и касательной, параллельной сопряженному диаметру, как к осям. Для эллипса это свойство может быть выражено так: квадрат, построенный на ординате, имеет постоянное отношение к прямоугольнику, построенному на отрезках диаметра. Это отношение равно отношению квадратов сопряженных полудиаметров. В нашем случае имеем:

$$\frac{Qv^2}{Pv \cdot Gv} = \frac{b_1^2}{a_1^2}.$$

Из последних двух пропорций получаем:

$$xP = \frac{EP}{a_1} \cdot \frac{a_1^2}{b_1^2} \cdot \frac{vQ^2}{Gv}.$$

Так как дуга PQ бесконечно мала, то мы можем заменить xP через RQ; Gv через $GP = 2a_1$ и, наконец, vQ через xQ (ибо, как показывает Ньютон, для бесконечно малых дуг „стрелка“ Pv пропорциональна квадрату хорды, т. е. Pv, а значит, и xv является бесконечно малой высшего порядка по отношению к ординате Qv). Произведя эту замену, мы получим:

$$RQ = \frac{EP}{2b_1^2} \cdot xQ^2$$

и

$$\frac{RQ}{QT^2} = \frac{EP}{2b_1^2} \cdot \frac{xQ^2}{QT^2} = \frac{EP^3}{2b_1^2 FP^2},$$

где последнее преобразование основано на подобии треугольников TQx и FPE.

Так как площадь $b_1 \cdot FP$ параллелограма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах, имеет постоянное значение ab, то

$$\frac{RQ}{QT^2} = \frac{EP^3}{2a^2b^2}.$$

Так как мы пока еще не использовали того обстоятельства, что S есть фокус, то полученный результат имеет силу для любого положения точки S; следовательно, притяжение любою точкою S плоскости, обусловливающее движение точки P по эллипсу, пропорционально $\frac{EP^3}{SP^2}$.

Теперь остается еще только доказать, что, если S — фокус, то EP постоянно. Проведем через другой фокус H прямую HI, параллельную касательной в P. Так как по известному свойству эллипса радиусы-векторы образуют с нормалью PF равные углы, то

$$PH = IP.$$

Кроме того, из равенства

$$CS = CH$$

следует:

$$EI = \frac{1}{2} SI.$$

Отсюда мы получаем:

$$EP = EI + IP = \frac{1}{2}(SI + IP + PH) = a,$$

что и требовалось доказать.

Приведенное здесь доказательство является хорошим образцом синтетических построений Ньютона. На первый взгляд оно может показаться довольно сложным. Но зато каждый шаг его связан с изучением данного геометрического образа, и поэтому каждая отдельная операция выступает как часть продуманного целого. В дальнейшем должна была встать задача обобщения этого результата. Предложение, известное в теоретической механике под именем теоремы Бинэ, дает нам теперь возможность аналитически определить (с точностью до постоянного множителя) величину силы, направленной к данному центру и движущей тело по заданной орбите. У Ньютона мы находим предложение (I, 6), выражающее эту теорему в инфинитезимально-геометрической форме. Как следствие этого предложения Ньютон устанавливает соотношение между величинами сил, направленных к различным центрам, но движущих тело по одной и той же орбите. Это дает ему возможность еще иным путем определить закон центростремительной силы, направленной к фокусу эллипса. Именно, предварительно (I, 10) Ньютон синтетически находит закон центростремительной силы, направленной к центру эллипса.

Рассуждение, значительно более простое, чем вышеприведенное, показывает, что сила эта пропорциональна расстоянию до центра. Теперь остается только применить вышеуказанное следствие (I, 6), и снова получается, что сила, направленная к фокусу, должна быть обратно пропорциональна квадрату радиуса-вектора.

Вероятно, таким именно путем Ньютон и нашел это предложение. В пользу этого говорят два обстоятельства. Во-первых, сам Ньютон говорит, что этот второй способ проще первого, но что не мешает дать самостоятельное доказательство этого предложения и аналогичных предложений для гиперболы и параболы „ввиду важности их для дальнейших приложений“. Во-вторых, случай притяжения к центру эллипса мог бы быть получен Ньютоном попутно с приведенным выше случаем притяжения к фокусу, как другой частный случай общего предложения. Именно, мы видели, что при любом положении точки S притяжение пропорционально $\frac{EP^3}{SP^3}$. Но когда точка S попадает в центр эллипса C, то $EP = SP = CP$, так что $\frac{EP^3}{SP^2} = CP$. Заметим еще, что основное предложение (I, 6) Ньютон использует не только для исследования эллиптических, гиперболических и параболических орбит, но находит также (I, 6) закон центростремительной силы, под влиянием которой тело может описывать логарифмическую спираль. В этом случае сила оказывается пропорциональной кубу расстояния.

Ньютон решает затем обратную задачу о нахождении орбиты тела, притягиваемого к центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и выходящего из данной точки с данной начальной скоростью.

Напряжение силы также предполагается данным (оно задается константой площадей, которую Ньютон называет „абсолютной силой центра“).

Так как этими условиями орбита вполне определяется, то Ньютону достаточно построить такую кривую второго порядка с фокусом в данной точке и проходящую через данную точку, для которой в этой точке элемент дуги имеет определенное скоростью направление, а секториальный элемент площади имеет определенную данной скоростью величину. Этого достаточно, чтобы утверждать, что искомая орбита есть коническое сечение. При этом можно по данным задачи определить параметры конического сечения и тем самым различить случаи гиперболического, эллиптического и параболического движения.

Таким образом, если перевести это рассуждение на язык анализа, мы имеем здесь дело не с решением системы диференциальных уравнений, в собственном смысле слова, а с проверкой правильности „угаданного“ решения, удовлетворяющего уравнениям и могущего удовлетворить произвольным начальным данным. „Угадывание“, разумеется, носит здесь не случайный характер, а связано с предварительным знанием решения прямой задачи, обращением которой является данная.

Как частный случай движения по плоской кривой, обусловленного притяжением к неподвижному центру, Ньютон рассматривает движение по прямой, проходящей через центр; особенно он останавливается при этом на случаях, когда притяжение об-

ратно пропорционально квадрату расстояния или прямо пропорционально его первой степени. В этих случаях траектории будут представлять собой выродившиеся конические сечения (во втором случае, например, эллипс вырождается в отрезок конечной длины, в середине которого лежит притягивающая точка). Нетрудно показать, что секториальная площадь эллипса пропорциональна секториальной площади окружности, построенной на большой оси как на диаметре, если соответствующие точки эллипса и окружности берутся на одной и той же ординате. В силу закона площадей отсюда следует, что при движении тела по эллиптической орбите проекция его на большую ось движется так же, как проекция точки, движущейся по упомянутой окружности под влиянием того же притягивающего центра. Это предложение должно остаться в силе и для выродившейся орбиты. Таким образом прямолинейно движущаяся точка будет совершать такое же движение, как проекция точки круговой орбиты. А так как в случае силы, действующей пропорционально расстоянию, центр притяжения будет центром окружности, то в этом случае точка будет двигаться как проекция равномерно движущейся по окружности точки, так что отсюда получается (I, 38), что „времена, скорости и пройденные пространства пропорциональны соответственно дугам, их синусам и синус-верзусам". В такой форме дает Ньютон интеграл $[x = a\cos\sqrt{\mu}\,t]$ уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0.$$

Далее, Ньютон пользуется тем обстоятельством, что то же уравнение движения можно применить к движению тяжелой точки по циклоиде во взятом Гюйгенсом положении ее (стр. 331), если обозначить через x длину дуги, считаемую от нижней точки. Он находит, что при соответствующих предположениях это же уравнение имеет силу и для точки гипоциклоиды, притягиваемой центром соответствующего неподвижного круга с силой, пропорциональной расстоянию. Таким образом получается упомянутое выше распространение гюйгенсова предложения о движении по циклоиде (стр. 335).

Сверх того, Ньютон сводит к квадратурам совершенно общую задачу определения траектории, которую описывает свободная частица, притягиваемая неподвижною точкою с силою, зависимость которой от расстояния имеет произвольный вид. Для этого он пользуется, кроме предложения о площадях, еще следующим предложением (I, 40).

Если частица движется под действием центральной силы, если другая частица движется под действием того же притяжения по прямой, проходящей через центр притяжения и если, наконец, обе частицы, находясь на одном и том же расстоянии от центра притяжения, имеют одинаковую скорость, то и при любом другом одинаковом расстоянии они тоже будут иметь одинаковую скорость.

Что касается до определения скорости в случае прямолинейного движения, то его Ньютон сводит к квадратуре уже ранее (I, 39). Квадратуру эту мы могли бы записать в виде:

$$v^2 = 2 \int R\,dr,$$

где через r обозначено расстояние, через R притяжение и через v скорость (знак и постоянная интегрирования здесь не приняты во внимание). Это же соотношение имеет место, следовательно, и для криволинейного движения под действием центральной силы. Если обозначить полярный угол движущейся точки через ϑ, то с помощью уравнений, которые мы теперь записали бы в виде:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2 \int R\,dr,$$

можно свести определение r и ϑ как функций t, если R есть данная функция r, к квадратурам.

Ньютон решает, кроме того, и другие относящиеся сюда задачи, в частности, такие, в которых притягиваемая точка движется по неподвижной поверхности или по кривой, или взаимно притягиваются две точки (I, 53—66).

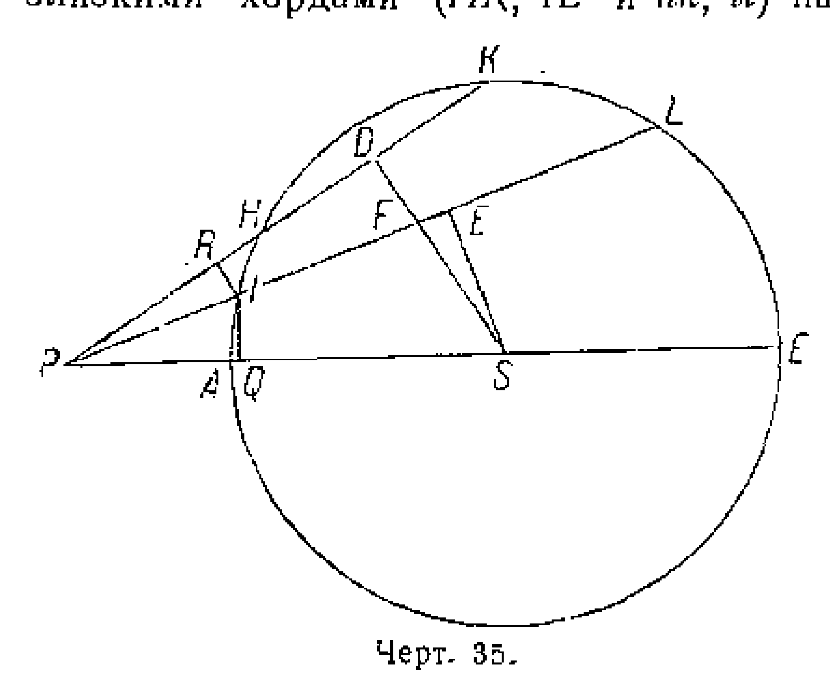
В числе основных предложений небесной механики мы назвали наряду с упомянутыми здесь законами движения предложение, утверждающее, что если шар, плотность которого зависит только от расстояния до центра, притягивает частицу, расположенную вне шара, то сила притяжения такова же, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Для того чтобы исследовать притяжение, производимое таким шаром, достаточно рассмотреть отдельный бесконечно тонкий однородный сферический слой.

То, что для частицы, находящейся внутри полости слоя, притяжение равно нулю, Ньютон доказывает в I, 70 хорошо известным и в наши дни способом, основанным на том, что притяжения, производимые теми частями слоя, которые вырезаются двумя полостями любого бесконечно тонкого конуса, имеющего вершиной притягиваемую точку, взаимно уничтожаются. В I, 71 доказывается, далее, что для частицы, лежащей вне слоя, притяжение может быть заменено притяжением к центру шара с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от него. Рассмотрим это доказательство.

Ньютон берет два чертежа (один из них представлен на нашем черт. 35), на которых точки P и p имеют различные расстояния от центров равных шаров. Шары эти на обоих чертежах изображены с помощью диаметральных сечений, проходящих через притягиваемые точки P и p. В каждый из этих кругов вписаны хорды, проходящие при продолжении через P и p; будем считать соответствующими друг другу те хорды обоих черте-

жей, которые равно удалены от центра. Соответствующие точки обозначены соответствующими большими и малыми буквами. Пусть будут HK и IL две таких бесконечно близких хорды одного круга; Ньютон доказывает тогда, что отношение притяжения, производимого на P зоною (IH), образованною вращением дуги IH вокруг PS, к притяжению, производимому соответствующею зоною (ih) на p, равно обратному отношению PS^2 к ps^2. А так как сферические слои обеих сфер составляются из равного числа соответствующих друг другу зон, то и притяжения самих слоев имеют то же отношение.

Для доказательства Ньютон пользуется, во-первых, равенством бесконечно малых отрезков FD и fd, отсекаемых бесконечно близкими хордами (HK, IL и hk, il) на перпендикулярах, опущенных на одну из пар этих хорд. Во-вторых, тем, что бесконечно малый треугольник HIR, в котором $IR \perp PH$, подобен соответствующему треугольнику hir (вследствие подобия их треугольникам HDS и hds, равным между собой). Следовательно, величины DF, SE и $\frac{HI}{RI}$ не зависят от положения точки P. Мы обозначим их через k, k' и k''.



Черт. 35.

Поверхность зоны (IH) равна $2\pi IH \cdot IQ$, где IQ — расстояние до оси. Производимое ею притяжение направлено к центру. Чтобы найти компоненту силы, направленную по оси, нужно умножить величину, пропорциональную $\frac{IH \cdot IQ}{PI^2}$, на косинус угла SPE, т. е. на $\frac{PE}{PS}$ или на $\frac{PF}{PS}$ (так как PE и PF бесконечно мало отличаются друг от друга). Таким образом притяжение зоны имеет величину:

$$\mathrm{const} \cdot \frac{IH \cdot IQ}{PI^2} \cdot \frac{PF}{PS}.$$

Так как здесь

$$\frac{IH}{PI} = k'' \frac{RI}{PI} = k'' \frac{FD}{PF} = \frac{kk''}{PF}$$

и

$$\frac{IQ}{PI} = \frac{ES}{PS} = \frac{k'}{PS},$$

то притяжение равно $\frac{c}{PS^2}$, где c — величина, не зависящая от положения P.

Далее, Ньютон сводит подобным же образом взаимное притяжение двух шаров на притяжение двух точек. Сверх того, он сводит притяжение однородного шара при произвольном законе притяжения к квадратуре и выполняет эту квадратуру для случая различных законов.

Разобрав здесь более или менее систематически ньютоновы обоснования найденных им основных предложений небесной механики, мы должны будем при рассмотрении остального материала, содержащегося в „Началах“, также представляющего много интересного с точки зрения математики, ограничиться отдельными примерами. Некоторые мы уже приводили в связи с другими вопросами (стр. 221 и 224). Рассмотрим прежде всего результаты, связанные с интегрированием диференциальных уравнений. Ньютон выражает и решает эти уравнения в геометрической форме, но сам он обладал и иным средством их решения — своими уравнениями между флюксиями, вполне соответствующими диференциальным уравнениям. В собственных своих исследованиях он, несомненно, более или менее широко пользовался этим средством.

Из начала второй книги отметим исследование о движении в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости и плотности среды. В II, 8 и 9 дана полная разработка вопроса о прямолинейном подъеме и спуске тяжелой частицы в равномерно плотной среде. На современном математическом языке условия задачи при сделанном Ньютоном выборе единиц выражаются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \mp \frac{1}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

где t — время, x — расстояние движущейся точки от определенной точки прямой, $\frac{dx}{dt} = v$ — скорость и $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{v\,dv}{dx}$ — ускоряющая сила (ускорение). Уравнение дает:

$$x = \mp \frac{g}{2} \ln\left(1 \mp \frac{v^2}{g^2}\right)$$

(если $x = 0$ соответствует точке, в которой $v = 0$); логарифмическую функцию Ньютон изображает с помощью гиперболической площади. Ньютон выводит последнее уравнение из первого настоящим интегрированием, показывая, что первое действительно получается из последнего, если x и v увеличить одновременно на величины, уменьшающиеся до 0 (т. е. если произвести диференцирование). Затем он выражает t через v:

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g \mp \frac{1}{g} v^2};$$

оба интеграла он представляет в виде площадей гиперболических или круговых секторов, согласно тогдашней форме изображения круговых и логарифмических функций.

При исследовании движения тяжелой частицы по циклоиде Ньютон также рассматривает случай сопротивления, пропорционального квадрату скорости. Если обозначить длину дуги через s и время через t, то движение определяется при этих условиях уравнением

$$\frac{d^2s}{dt^2} \mp a\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + bs = 0,$$

или, при $\frac{ds}{dt} = v$, уравнением:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(v)^2}{ds} \mp av^2 + bs = 0.$$

Ньютон определяет отсюда v^2, а следовательно, и сопротивление в функции s, и, таким образом, фактически интегрирует линейное диференциальное уравнение. Отсюда он, в свою очередь, выводит соотношение между величинами двух последовательных отклонений, представляющих собою значения s, соответствующие $v = 0$.

В одном месте (II, 10) мы находим у Ньютона более сложное диференциальное уравнение, определяющее путь тяжелого тела, движущегося в среде, плотность которой есть любая функция координат и сопротивление которой пропорционально произведению плотности на n-ю степень скорости. Уравнение это можно записать в виде:

$$\frac{\dfrac{d^3y}{dx^3}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{4-n}{2}}\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}} = f(x,y),$$

где $f(x, y)$ обозначает плотность, умноженную на постоянный коэфициент пропорциональности.

Там, где мы писали производные, Ньютон употребляет не флюксии, а коэфициенты ряда $Qo + Ro^2 + So^3 + \ldots$, который можно получить из уравнения кривой, составляя выражение для приращения, принимаемого y при замене x на $x + o$. Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = Q, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2R, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6S.$$

Когда мы писали вместо Q, R, S производные, то это отразилось только на постоянном множителе, входящем в $f(x, y)$.

Ясно, что Ньютон пользуется коэфициентами разложения лишь потому, что он не ввел понятия флюксии. Таким образом мы можем смотреть на уравнение как на настоящее уравнение между флюксиями или диференциальное уравнение. Об общем его интегрировании нет, однако, и речи. Ньютон предполагает, что найденный путь является определенной кривой — окружностью, параболою или гиперболою, — и затем, с одной стороны, определяет сопротивление, соответствующее такой кривой, а с другой — вставляя сопротивление, найденное для этой кривой, в $f(x,y)$,

образует диференциальные уравнения 3-го порядка, которые можно интегрировать именно благодаря тому, что они были получены путем диференцирования [1].

Отметим, что замена производных или флюксий коэфициентами упомянутого ряда привела однажды Ньютона к неясности выражения, подавшей повод для нападок со стороны приверженцев Лейбница. В сочинении „О квадратуре" Ньютон говорит в одном месте, что в ряду

$$(z+o)^{\eta} = z^{\eta} + \eta o z^{\eta-1} + \frac{\eta(\eta-1)}{2} ooz^{\eta-2} + \ldots$$

$\frac{\eta(\eta-1)}{2} z^{\eta-2}$ — есть второе приращение (incrementum) или вторая разность (differentia), $\frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^{\eta-3}$ — третье приращение и т. д. Впоследствии Ньютон, обратив внимание на ошибку или неясность, на одном экземпляре, подаренном им, исправил это выражение, добавив слово *ut*, так что вместо „есть приращение" нужно было читать „пропорционально приращению". Несомненно, что все дело здесь только в неясности, связанной с употреблением слов „incrementum" и „differentia", определение которых не было дано. Это видно из того, что Ньютон сейчас же вслед за этим говорит о соответствующих величинах, что они пропорциональны соответствующим флюксиям; понятию же флюксии как раз в этом сочинении дано ясное определение. О действительной ошибке в этом пункте не может быть и речи: Ньютон не только был знаком с флюксиями высших порядков, но в своем „Разностном методе", основное предложение которого имеется в „Началах" (стр. 224), показал также, что хорошо умел применять конечные разности высших порядков. Повидимому, только этот недостаток внимания к точному указанию числовых коэфициентов и помешал тому, чтобы позднейшая формула Тейлора была установлена уже Ньютоном.

Приведенные здесь примеры предложений, содержащихся в „Началах", поясняют то, что мы сказали об отсутствии в них базиса в виде учения о флюксиях или другого общего инфи-

---

[1] Автор, излагая здесь содержание 10-го предложения второй книги „Начал", истолковывает его слишком расширительно.

Хотя, действительно, Ньютон ставит вопрос и о нахождении плотности среды по данной траектории и вопрос об определении траектории по данной плотности, однако второй вопрос не получает полного решения. Исходя сначала из данной формы траектории, Ньютон имеет затем лишь *частное* решение обратной задачи, не охватывающее всего класса кривых, могущих служить траекториями при данной плотности. Ньютон это, несомненно, сознает и сам; в самом деле, найдя выражение плотности для случая движения тяжелой точки по окружности, он говорит, что при этой плотности тяжелое тело будет описывать окружность, если из соответствующей точки оно выйдет по данному направлению „с надлежащей скоростью" (пример 1-й 10-го предложения).

Таким образом здесь нельзя говорить об интегрировании диференциального уравнения в собственном смысле этого слова, так как на начальные условия налагаются, по существу, произвольные ограничения.

Прим. ред.

нитезимального метода. В доказательствах первых основных предложений Ньютону приходится, за недостатком такого общего, раз навсегда обоснованного метода, применять к каждому отдельному случаю особый подход; именно поэтому мы находим здесь богатство и разнообразие применений инфинитезимальных принципов, которое должно было существенно содействовать их развитию. В изложении встречаются бесконечно малые линии, например, стороны бесконечно малых треугольников, которые, для определения отношений сторон, заменяются подобными конечными треугольниками. Такие бесконечно малые величины Ньютон неоднократно называет трудно переводимым словом „quam minimae“ [1].

Этим сокращенно указывается, что речь идет только о пределах соответствующих отношений или суммы таких величин. Предельные же операции, как мы уже говорили, были точно определены в предпосланных „Началам“ общих предложениях о „первых и последних отношениях“ [2].

Что касается до ньютонова изложения в *других* его исследованиях, в передаче которых мы применяли язык диференциального и интегрального исчисления, то оно, напротив, могло бы быть упрощено, если бы он воспользовался языком и основными предложениями учения о флюксиях. Однако Ньютон, подобно Барроу, предпочитает изображать величину, являющуюся любой функцией другой, в виде ординаты кривой, а интегрирование в виде квадратуры. Диференцирование, лежащее в ряде случаев в основе интегрирования уравнений, Ньютону приходится (до того как в начале 2-й книги вводится предложение, заимствованное из учения о флюксиях) производить всякий раз, давая переменным величинам одновременные приращения и, после нужного сокращения, полагая эти приращения равными нулю.

12. Лейбниц и его первое публичное выступление, положившее основание диференциальному исчислению.

Мы смогли разобрать инфинитезимальные исследования Ньютона, не обращая особого внимания на то, что они по большей части были опубликованы позже, частично даже значительно позже, нежели родственные им исследования Лейбница. Методы Лейбница, многочисленные применения, данные им как самим Лейбницем, так и его ближайшими последователями, распространение их в широких кругах — все это не оказало заметного влияния на труды Ньютона. Творческая работа его в этой области

[1] Его можно передать термином „как можно более малые“ или термином „малейшие“, если пользоваться той же неупотребительной в данном случае грамматической формой, какую мы употребляем, говоря „мельчайший“, „величайший“ и т. д. Этот термин выражает чрезвычайную малость, но не содержит категорического утверждения, что большая малость невозможна.

Прим. ред.

[2] См. текст и примечание на стр. 375 и 376.

Прим. ред.



Лейбниц

1646 — 1716

С гравированного портрета Фике

в большей своей части относится к тому времени, когда о влиянии со стороны Лейбница не могло быть и речи; уже тогда он вполне владел методами, легшими в основу его опубликованных впоследствии работ; отдельные результаты, которые тем или иным образом стали известны ранее, свидетельствуют, что и большинство содержащихся в этих работах результатов было получено Ньютоном в более раннее время. Во всяком случае, вряд ли можно указать на применение хотя бы одного приема, которым он был бы обязан Лейбницу. Что касается, например, до сообщений, сделанных Лейбницем в его переписке с Ньютоном, относящейся к 1676—1677 гг., и, в частности, до ясного изложения принципов диференцирования во втором письме, о котором мы будем говорить ниже, то для Ньютона правила непосредственного получения диференциала или флюксии произведения, частного или корня не могли представлять ничего нового. Все это должно было быть ему уже достаточно знакомо из многочисленных результатов, которые были им получены при вычислении флюксий. В частности, что касается до правила для непосредственного нахождения флюксии или диференциала иррационального выражения, то сам Ньютон упоминает в письме к Коллину от 1672 г. о преимуществе своего метода перед прежними способами нахождения касательных, заключающемся как раз в том, что его метод применим и к уравнениям, содержащим иррациональности. В качестве доказательства того, что Ньютон действительно задолго до Лейбница достиг этих результатов, мы можем указать на приведенное в конце „Анализа" выражение для флюксии от $\sqrt{a^2+x^2}$.

То, что составляет главную заслугу Лейбница, — четкое установление правил для простейших операций, из которых составляются остальные, и регулярная связь их с определенной системой обозначений, — все это ничего существенного к результатам Ньютона прибавить не могло. Он сам знал эти частности, так как прекрасно знал получающееся из них целое, и сам обладал и совершенно уверенно пользовался символикой, которая сама по себе была нисколько не хуже[1]. Сообщения Лейбница могли

[1] С этим утверждением согласиться трудно; уже один тот факт, что символика Лейбница, т. е. та символика, которой мы сейчас пользуемся, вытеснила символику Ньютона даже в Англии, несмотря на националистические тенденции английских ученых, усугубленные знаменитым спором о приоритете, принявшим характер национальной распри, — уже один этот факт свидетельствует о превосходстве обозначений Лейбница. Превосходство это обусловлено по существу тем, что в лейбницевом обозначении диференциалов и в правилах оперирования с ними отражено понятие бесконечно малой величины как величины ничтожно малой, отбрасываемой в определенных расчетах как нуль и в то же время могущей входить в конечные отношения. То обстоятельство, что общие формулы, содержащие диференциалы первого порядка, остаются справедливыми как в том случае, когда в них входят диференциалы независимых переменных, так и в том случае, когда вместо них взяты диференциалы функций, — это обстоятельство является логическим эквивалентом вышеуказанной инфинитезимальной интерпретации диференциалов. Что касается неинвариантности диференциальных соотношений высших порядков, то она является результатом той неравноправности, которая *произвольно*

только показать ему, что тот в данное время также знал и умел применять методы, которыми он сам уже давно пользовался. То обстоятельство, что у Лейбница этот метод был облечен в такую форму, в которой легко можно было усвоить его и затем применять механически, придерживаясь только определенных правил для простых операций и приобретя некоторые навыки в пользовании ими, — это представляло, конечно, преимущество для математиков, менее глубоко чувствовавших предмет; но для Ньютона, обладавшего своим собственным соответствующим методом, это вряд ли могло иметь какое-нибудь значение. Эта, если угодно, педагогическая сторона дела стала ему ясна, несомненно, только тогда, когда он увидел, что образуется школа Лейбница, и когда у него должны были возникнуть опасения, что лейбницевы приемы получат общее распространение, а собственные его достижения, не преданные им своевременно гласности, постигнет забвение. Однако и это, как мы знаем, не побудило его к скорейшему опубликованию его инфинитезимальных работ; также и впоследствии, когда они появились, он не думал о том, чтобы придать им форму более целесообразную с педагогической точки зрения. Для ученых эти работы ясны и понятны, но для того чтобы служить быстрому распространению новых методов, они не были пригодны в той мере, как работы Лейбница.

Один лишь раз, повидимому, Ньютон испытал влияние работ Лейбница в том смысле, что почувствовал желание представить и свою систему в таком виде, чтобы общая ее применимость проступала столь же отчетливо: в двух местах сочинения своего „О квадратуре кривых", во введении и в 1-м предложении, представляющих собою, по собственному его ясному указанию, значительно позднейшие добавления к этой работе, он вводит обозначения $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, ... для флюксий различных порядков, а также обозначения $'x$, $''x$, ..., для величин, образуемых из x путем квадратур, т. е. для интегралов и интегралов от интегралов. Первыми из этих обозначений Ньютон пользуется в указанном сочинении лишь в „поучении", также, быть может, образующем позднейшее добавление; последними не пользуется вовсе. Остается поэтому впечатление, что обозначения эти установлены лишь в параллель к законченной лейбницевой символике (см., однако, стр. 367).

Значительно труднее выяснить вопрос о влиянии Ньютона на Лейбница. Мы не знаем, в какой мере мысли Ньютона (которые в беседах, повидимому, высказывались им охотнее, чем в печати) были достоянием английских математиков к тому времени,

---

вводится тем, что второй диференциал независимой переменной заранее полагается равным нулю. Если этого не делать, то инвариантными будут и диференциальные соотношения высших порядков (подробнее об этом см. в моей книге „Основы исчисления бесконечно малых", стр. 330—339. ГТТИ, 1932).

Прим. ред.

когда Лейбниц находился с ними в личных сношениях при посещении Англии (1673 и 1676) и когда ему мог рассказать о них Чирнгауз (1675). Соотечественники Ньютона не были, конечно, незнакомы с его работами и их значением. Мы знаем, например, что исследования Грегори в области бесконечных рядов (стр. 297) явились результатом тех сообщений, которые Грегори получил о работах Ньютона в той же области. Признавая это, Грегори желал, чтобы Ньютон первый опубликовал свой метод. Обозначения, которые Грегори применял при нахождении касательных (стр. 352), также свидетельствуют о некоторой связи с Ньютоном. Хотя Лейбницу в 1673 г. не удалось просмотреть „Анализ" Ньютона, но сообщения о некоторых наиболее важных его результатах, сделанные в следующие годы Ольденбургом в письмах к Лейбницу, указывают, что в Лондоне уже умели ценить это сочинение.

Еще меньше знаем мы о форме устных сообщений, которые мог получать Лейбниц, и о времени, к которому они могли относиться. В 1673 г. он сам едва ли был достаточно зрелым в математическом отношении, для того чтобы тотчас же суметь воспользоваться многим из того, что он тогда услышал; именно потому ему и самому было трудно дать себе отчет в том, что могло произойти впоследствии из полученных им импульсов. Зато позже, когда он достиг высшей ступени развития, отдельный результат, сообщенный ему когда-то, мог до такой степени ассимилироваться с собственным его ходом мыслей, что сразу давал готовый плод.

Если вопрос о влияниях, испытанных Лейбницем, представляет большие трудности, то, напротив, с ходом собственного его развития и с формами, в которых постепенно возникали его новые мысли, мы, благодаря дошедшим до нас письмам и заметкам, которые Лейбниц делал лично для себя, знакомы довольно хорошо. Нарисуем здесь вкратце картину, даваемую этими документами; при этом мы увидим также до некоторой степени, с каких сторон по преимуществу шли влияния.

Еще до путешествия Лейбница в Лондон (1673), в Париже, Гюйгенс снова направил его внимание на математику. Лейбниц занимался ранее сочетаниями и перестановками, как математическою основою логики. Гюйгенс предложил ему задачу, имевшую некоторую связь с комбинаторикой, — определение суммы чисел, обратных треугольным, т. е. чисел вида $\frac{1}{k(k+1)}$. Задача эта была решена уже раньше Броункером [стр. 301, формула (3)], но Лейбниц пошел дальше и нашел также сумму чисел, обратных пирамидальным, и других рядов подобного рода. Такими рядами он пользовался впоследствии (1682) в помещенной в „Acta Eruditorum" статье об исчислении процентов, в которой он решает задачи, ведущие к бесконечным геометрическим рядам с чередующимися знаками и знаменателями, меньшими 1, а также к рядам, получаемым из них путем умножения членов на нату-

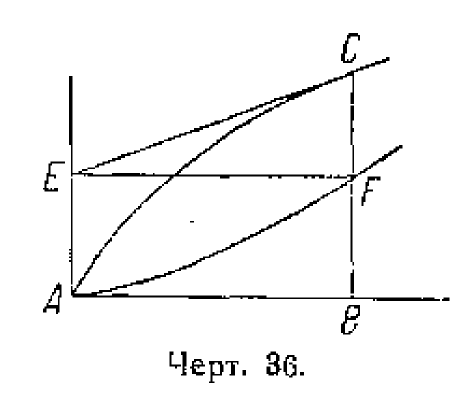
ральные числа, треугольные числа, пирамидальные числа и т. д. Последние ряды образуются из геометрических помощью операций, которые Паскаль называет составлением треугольной суммы, пирамидальной суммы и т. д. (стр. 266). При своих суммированиях Лейбниц пользуется в связи с паскалевым арифметическим треугольником также разностями высших порядков. Так, при суммировании конечного числа членов ряда одинаковых степеней или значений одной и той же функции натуральных чисел он пользуется тем обстоятельством, что разности известного порядка имеют постоянное значение. Сам Лейбниц рассматривал впоследствии эти начальные основы позднейшего исчисления конечных разностей как подготовку к созданию диференциального исчисления.

После таких занятий для Лейбница должны были представить очень большой интерес полученные им в Лондоне сведения о том, что Меркатор применял для выражения логарифмов ряд, имевший некоторое сходство с теми, которые он уже сам суммировал в конечной форме. Получив, таким образом, импульс к занятиям в этом направлении, он должен был почувствовать потребность в более основательном изучении имевшихся тогда инфинитезимальных исследований. Нужно это было ему и для того, чтобы иметь возможность понять работу Гюйгенса о маятнике, подаренную ему автором. По возвращении в Париж Лейбниц усердно взялся за эти занятия; особенно штудировал он Кавальери, Григория и Паскаля. Скоро он настолько усвоил рассуждения этих своих учителей, что смог применять их самостоятельно; он доказал это новым инфинитезимальным преобразованием, из которого получается большинство известных до тех пор квадратур. Преобразование это мы получили бы теперь из выражения $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ для площади сектора, ограниченного двумя радиусами-векторами и бесконечно малою дугою. Сам Лейбниц впоследствии, когда он создал свое диференциальное исчисление, также пользовался этим диференциальным выражением. В более же ранних своих рукописях и письмах он выражает предложение в той же геометрической форме, какую давали подобным преобразованиям его предшественники.

Если (черт. 36) касательная EC к кривой AC (проходящей и на чертеже Лейбница через начало) отсекает на оси ординат отрезок AE, и этот отрезок берется за ординату BF точки F, имеющей ту же абсциссу, как C, то площадь, ограниченная геометрическим местом этой точки, осью абсцисс и двумя ординатами, вдвое больше площади сектора, ограниченного соответствующею дугою данной кривой AC и радиусами-векторами, проведенными из A в ее концы. Действительно, если рассмотреть бесконечно малые части этих фигур — соответственно прямоугольники и треугольники,—то, пользуясь подобными треугольниками, можно увидеть, что основание и высота бесконечно малого

прямоугольника обратно пропорциональны основанию и высоте соответствующего бесконечно малого треугольника [1].

Определяя по методу Ферма касательные к его параболам и гиперболам разных порядков, Лейбниц нашел, что соответствующая им вспомогательная кривая есть, в свою очередь, парабола или гипербола того же порядка, но с новым параметром. Его предложение ведет, таким образом, к уравнению, из которого можно найти площадь кривой.



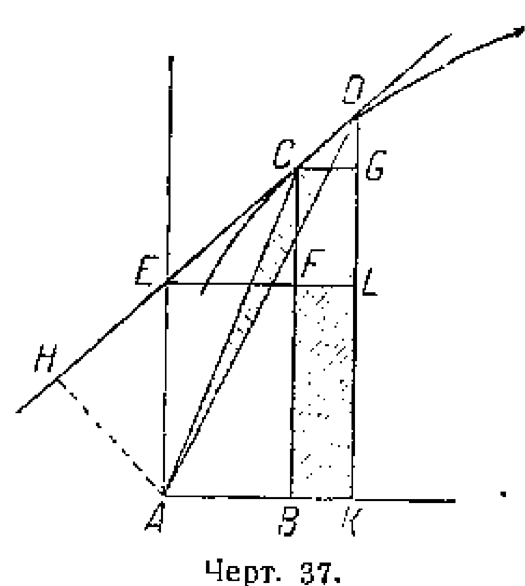
Черт. 36.

Применяя свой метод к вычислению площади круга, Лейбниц свел ее к квадратуре $\int \frac{z^3}{1+z^2}dz$ (см. также Ферма, стр. 264) и получил, таким образом, средство для разложения ее в ряд, подобный тому, какой Меркатор применял к гиперболическим площадям (стр. 305). Он нашел, таким образом, тот же ряд для $\operatorname{arc\,tg} x$, который уже раньше был получен Грегори (стр. 207). Ряд этот дает, в частности,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Ньютон сделал основательное возражение по поводу практической применимости этого ряда (стр. 361); сам Лейбниц, однако, связал с этим разложением представлявшее значительный интерес теоретическое исследование. Перед ним должен был встать вопрос о возможности суммирования рядов в конечной форме. По отношению к ряду для π математики того времени не могли еще дать строгого доказательства невозможности такого суммирования. Хотя Лейбниц не соглашался с возражениями

[1] Если принять (черт. 37) за основание треугольника ACD (бесконечно малого сектора) элемент дуги кривой CD, то высотой будет перпендикуляр AH, опущенный из начала координат на касательную DCH.



Черт. 37.

Из подобия прямоугольных треугольников AHE и CDG следует:

$$\frac{AE}{AH} = \frac{CD}{CG},$$

или (так как $AE = FB$; $CG = FL$).

$$\frac{FB}{AH} = \frac{CD}{FL},$$

откуда

$$FB \cdot FL = AH \cdot CD.$$

Это равенство и показывает, что площадь прямоугольника равна удвоенной площади сектора. *Прим. ред.*

Гюйгенса по поводу данного Грегори доказательства того, что круговые функции не есть функции алгебраические, однако, он, как мы уже отмечали (стр. 296), хорошо понимал, что к самому π это доказательство нельзя применить. Безусловный пример того, что выражение, получаемое путем квадратуры (интегрирования), может быть, вообще, трансцендентным, но для отдельных частных значений пределов алгебраическим, он имел в своем упомянутом выше циклоидальном сегменте. Другой пример он сообщает в 1684 г. в „Acta Eruditorum". Пример этот — кривая $y^4-6h^2y^2+4y^2x^2+h^4=0$; квадратура ее, вообще, ведет к трансцендентным функциям, но для одного из двух определяемых этим уравнением выражений ординаты через абсциссу мы имеем:

$$\int_0^h y\,dx=\int_0^h \sqrt{2h^2-x^2}\,dx-\int_0^h \sqrt{h^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}h^2.$$

Последний результат легко получить, рассматривая оба интеграла как площади частей круга.

У Лейбница было и свое доказательство того, что, как мы сказали бы теперь, круговые и тригонометрические функции есть функции трансцендентные. Если бы между x и $\sin x$ существовало алгебраическое уравнение (которое Лейбниц представляет себе изображенным с помощью кривой), то оно должно было бы иметь некоторую определенную степень. Из этого уравнения можно получить $\left(\text{заменяя } x \text{ через } m\cdot\frac{x}{m}\right)$ уравнение, связывающее $\frac{x}{m}$ и $\sin x$. С другой стороны, то же уравнение должно связывать величины $\frac{x}{m}$ и $\sin\frac{x}{m}$. Тогда, исключая $\frac{x}{m}$, мы должны получить алгебраическое уравнение, связывающее $\sin x$ и $\sin\frac{x}{m}$, которое будет относительно $\sin\frac{x}{m}$ иметь степень не выше некоторого определенного числа r, не зависящего от m. Отсюда вытекало бы, что при данном значении $\sin x$ величина $\sin\frac{x}{m}$ может иметь не более чем r значений, что неправильно, так как, например, при нечетном m каждому значению $\sin x$ соответствует m значений $\sin\frac{x}{m}$, и значит, при $m>r$ величина $\sin\frac{x}{m}$ должна при данном $\sin x$ иметь заведомо более чем r значений.

То обстоятельство, что $\sin\frac{x}{m}$ имеет m значений, основано, как известно, на периодичности тригонометрических функций. Ньютон, не будучи знаком с рукописью Лейбница, выводит в своих „Началах" трансцендентность круговых функций непосредственно из этой периодичности. Его утверждение и доказательство относятся не только к круговым функциям, но и ко всем тем, ко-

торые выражают площадь сектора замкнутой и конечной ветви алгебраической кривой. Ньютон сокращенно называет такую ветвь овалом, причем предполагает, что он не связан двойною точкою с другой ветвью. Периодичность выявляется графически с помощью кривой, что было неизбежно в то время, так как понятие функции не было еще четко установлено. Кривою этою в том случае, когда доказывается трансцендентность круговых функций, является архимедова спираль[1]. То обстоятельство, что Лейбниц в своем доказательстве берет зависимость между x и $\sin x$, находится, быть может, в связи со сделанным ему незадолго до этого сообщением Ньютона о разложении $\sin x$ (стр. 359); это указание на возможное влияние не относится, однако, к самой постановке вопроса, которая принадлежит самому Лейбницу.

---

[1] Из изложения Цейтена нельзя составить себе представления о ходе ньютонова доказательства. Однако я не решился заменить это изложение в тексте другим, более пространным, как это я делал в других аналогичных случаях. Дело в том, что лемма 28 1-й книги „Начал", о которой, очевидно, идет речь в тексте, изложена у самого Ньютона так неясно, что точный смысл ньютонова текста может быть установлен лишь с некоторой степенью гадательности. С этой оговоркой ход мыслей Ньютона может быть представлен следующим образом.

Ньютон хочет определить положение планеты на эллиптической орбите по заданному времени (отсчитываемому от момента, когда планета находится на большой оси эллипса), т. е согласно закону площадей по заданной площади, описанной за это время радиусом-вектором; это положение должно быть определено заданием абсциссы точки эллипса (за ось абсцисс принимается большая ось эллипса). В предложении 31 1-й книги эта задача решается построением вспомогательной кривой, абсцисса и ордината которой связаны тем же уравнением, что абсцисса точки эллипса и соответствующая секторпальная площадь. Процесс графического определения положения планеты по заданной секториальной площади очевиден. Указанной вспомогательной кривой, как нетрудно видеть, служит укороченная циклоида (трохоида) — кривая не алгебраическая (по Ньютону „геометрически иррациональная"). В лемме 28, предшествующей предложению 31, Ньютон хочет показать, что, действительно, секторпальная площадь связана с абсциссой зависимостью не алгебраической, а трансцендентной, причем это утверждается не только для эллипса, но для любой (алгебраической) овальной кривой.

Однако, как мы сейчас увидим, доказательство Ньютона до конца не доведено и в решающем пункте не обосновано. Если я правильно истолковываю его (а, по-видимому, при всех других возможных толкованиях рассуждения Ньютона были бы просто ошибочными), то оно сводится к следующему.

Предположим, что внутри овала взята точка (полюс), вокруг которой равномерно вращается луч. По этому лучу заставим двигаться точку со скоростью, пропорциональной квадрату длины радиуса-вектора овала. Эта точка будет описывать спираль с бесконечно большим числом завитков. Длина радиуса-вектора спирали, как нетрудно видеть, будет пропорциональна соответствующей секториальной площади овала. Поэтому нужно доказать, что радиус-вектор *спирали* и соответствующая абсцисса *овала* не могут быть связаны алгебраическим уравнением. Ньютон же доказывает только, что алгебраическим уравнением не могут быть связаны *декартовы координаты спирали* (доказательство апеллирует к тому, что в противном случае спираль с прямой пересекалась бы только в конечном числе точек). По тексту леммы не видно, понимает ли Ньютон, что он доказал не то, что хотел доказать, и скорее кажется, что этого Ньютон не понимает. Однако опираясь на общую теорию исключения (которая во время Ньютона еще не существовала), нетрудно показать, что, действительно, утверждение Ньютона следует из доказанного им положения. В самом деле, обозначив через x, y, r декартовы координаты и радиус-вектор точки овала, а через x_1, y_1, r_1 соответствующие вели-

Рассмотрение бесконечных рядов с чередующимися знаками привело Лейбница также к общему вопросу о сходимости таких рядов. Ему мы обязаны предложением, что бесконечный знакопеременный ряд имеет конечную сумму, если абсолютная величина членов убывает и стремится к пределу 0. С полной отчетливостью Лейбниц выдвигает это предложение лишь в значительно более позднем письме к Иоганну Бернулли; в менее определенных выражениях оно находится, однако, уже в рукописи, относящейся к периоду лишь немногим более позднему, чем тот, который мы разбираем сейчас; указания, даваемые в этой рукописи, сравнительно кратки, но все же значительно полнее тех, которые Лейбниц позже сделал в „Acta Eruditorum".

К некоторым из основных мыслей, значительно ранее положенных Ньютоном в основу своей новой трактовки инфинитезимальной математики, Лейбниц пришел независимо от применения рядов. Мысли эти мы встречаем в его бумагах, относящихся к 1673 г. Здесь он прежде всего находит касательную к произвольной кривой при помощи так называемого *характеристического треугольника*, образованного разностями между абсциссами и между ординатами двух бесконечно близких точек и лежащею между этими точками дугою, т. е. величинами, которые он позже обозначает через dx, dy и ds. Треугольник этот подобен треугольнику, образуемому подкасательной, ординатой и касательной и также иногда называемому Лейбницем характеристическим. Как и Паскаль, применивший, как мы говорили (стр. 268), этот характеристический треугольник к одному частному вопросу (об этом паскалевом применении его упоминает и сам Лейбниц), Лейбниц пользуется также иногда тем обстоятельством, что характеристический треугольник подобен треугольнику, образуемому ординатою, поднормалью и нормалью. При вычислении отношений этих величин Лейбниц принимает, что надо брать только члены первой степени относительно бесконечно малых величин, члены же

чины для спирали и предполагая, что между x и r_1 существует алгебраическое соотношение

$$f(x, r_1) = 0,$$

мы рассмотрим его совместно с уравнением (алгебраическим) овала

$$F(x, y) = 0$$

и с тремя очевидными соотношениями:

$$x^2 + y^2 = r^2;\ x_1^2 + y_1^2 = r_1^2;\ \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}.$$

Из этих пяти уравнений можно было бы исключить четыре величины x, y, r, r_1 и получить алгебраическое уравнение, связывающее координаты спирали x_1 и y_1, что, как показано у Ньютона, невозможно.

Прим. ред.

высшей степени можно отбрасывать. Он правильно указывает, однако, на осторожность, которую надо соблюдать, если члены первой степени взаимно уничтожаются. С таким пользованием указанными бесконечно малыми и подобными им конечными треугольниками были, впрочем, знакомы все те, кто занимался тогда инфинитезимальными исследованиями, и полученное таким образом Лейбницем более широкое применение метода Ферма не отличается по существу от того, которое мы находим у Барроу (стр. 350) и Грегори (стр. 352). Сам Лейбниц признал это, когда познакомился с их исследованиями. Однако устанавливая свой метод и сопоставляя его с исследованиями Паскаля, применявшего ту же фигуру в задаче интегрального исчисления, Лейбниц сделал и иные наблюдения, чем упомянутые исследователи. Так как при рассматриваемом здесь определении касательных применяются разности (dy) между ординатами, соответствующие имеющим одинаковые значения (dx) разностям между абсциссами, то, обратно, ордината y является суммою этих разностей (dy). Так как к определению такой суммы сводится и задача о квадратуре, то Лейбниц высказывает мнение, что почти все учение об обратных задачах на касательные можно свести к квадратурам. Таким образом он получил взаимно обратную связь между операциями, которые он впоследствии назвал диференцированием и интегрированием, в другом виде, чем Барроу и Грегори (стр. 341 и сл.). При этом он, подобно Барроу, имеет в виду прежде всего применение квадратуры к решению обратной задачи на касательную. С другой стороны, он уже здесь видит, что путь, которым можно решать эти задачи, лежит в составлении сводок („canones“) результатов определения касательных (диференцирований), на что уже раньше указывал Декарт (стр. 339) и чем уже тогда много раз пользовался Ньютон в своих не предназначавшихся к опубликованию работах.

Для того чтобы мысли, зародившиеся у Лейбница в 1673 г., достигли полной ясности, он должен был проделать большую работу, продолжавшуюся в течение следующих лет. Во время этой работы он совершенно не обратил внимания на то, что Барроу, на которого он в одном месте делает даже ссылку, также сводил обратные задачи на касательные к квадратурам; благодаря этому он мог испытывать большое удовлетворение, так как рассматривал постепенно находимые решения таких задач как нечто новое. Указанное обстоятельство имело и еще более важное следствие: если бы Лейбниц заметил облегчения, которые давала форма изложения Барроу, то вряд ли он имел бы случай создать тот чрезвычайно важный аппарат, которого требовала его собственная форма изложения. Барроу, подобно Ферма (стр. 257), представлял все величины геометрически, так что у него величина, которую мы обозначаем теперь как $\int y\,dx$, изображается всегда площадью, ограниченной осью абсцисс, кривою и двумя ординатами; поэтому для него безразлично, будут ли промежутки

(dx) между ординатами y равными или нет. Лейбниц же придерживается данного Кавальери и точнее определенного Паскалем представления $\int y\,dx$ как (умноженной на бесконечно малый фактор dx) суммы бесконечно большого числа y, „всех" y, как выражался еще тогда Лейбниц, или $\int y$, как он вскоре стал писать. Определение это предполагает, что промежутки между ординатами y равны (стр. 249 и 266). При таком положении вещей то обстоятельство, что $\int x\,dx$ равен $\frac{1}{2}x^2$ (при нижнем пределе равном 0), не позволяет еще Лейбницу заключить, что и $\int y\,dy$ также равен $\frac{1}{2}y^2$, так как независимая переменная есть x и, следовательно, величины dy не равны между собою. Лейбниц должен доказывать это еще особо.

В процессе работы, связанной с этими исследованиями, Лейбниц развил постепенно свою инфинитезимальную символику („алгорифм", как он говорит сам), при помощи которой исследования превращаются в производимое по определенным установленным им правилам *исчисление*, которым мы пользуемся и теперь. Получение все дальше идущих результатов часто затруднялось для Лейбница тем, что параллельно он занимался выработкой этого аппарата, постепенно им совершенствуемого; но он имел благодаря этому многочисленные случаи испробовать свой аппарат на весьма разнообразных задачах, как новых, так и таких, результаты которых он нашел у более ранних исследователей. Вследствие этого, когда его символика стала, наконец, достоянием гласности, то уже можно было ручаться не только за ее применимость, но и за ее надежность.

Одним из первых применений, которое Лейбниц дал возникшим у него в 1673 г. мыслям, был найденный им в 1675 г. общий метод, позволявший решить, можно ли выполнить алгебраически квадратуру алгебраической кривой [$f(x, v) = 0$, где v — ордината], и если да, то найти уравнение [$F(x, y) = 0$] ее квадратрисы, т. е. кривой, ординаты которой y выражают соответствующие площади, связанные с первой кривой. Прежде всего Лейбниц берет для последней кривой уравнение с неопределенными коэфициентами, члены которого он располагает в порядке возрастания степеней. Отсюда он определяет по правилу Слюза (стр. 327) подкасательную t и полагает затем $\frac{t}{y}$ (будущее свое $\frac{dx}{dy}$, которому он здесь не дает еще особого обозначения) равным $\frac{a}{v}$. Уравнение между x и v, получаемое путем исключения y, должно тогда совпадать с уравнением [$f(x, v) = 0$] данной кривой. Это обстоятельство позволяет определить коэфициенты уравнения квадратрисы [$F(x, y) = 0$] или, если это оказывается невозможным, говорит о невозможности выполнить квадратуру данной кривой алгебраически. Применение метода, в общем, является очень громоздким;

Лейбниц пользуется им, однако, в упомянутой уже работе 1684 г., напечатанной в „Acta Eruditorum", для доказательства того, что квадратура кривой

$$y^4 - 6h^2y^2 + 4y^2x^2 + h^4 = 0,$$

уравнение которой он сперва несколько преобразовывает, в общем случае не может быть выполнена алгебраически; представляется вероятным, впрочем, что он сперва нашел это, пользуясь приведенным нами на стр. 394 решением относительно y, которое позволило нам видеть, что квадратура в пределах от 0 до h дает алгебраическое выражение. В своих бумагах 1675 г. Лейбниц отмечает, что в том случае, когда метод не дает алгебраической квадратрисы, он ведет к разложению в ряд. В наброске этом, таким образом, можно найти краткое и общее указание на тот же прием, который лежит в основании квадратур и разложений в ряды Ньютона и в развйтом виде изложен в его сочинении „О квадратуре кривых". Однако Лейбниц в это время вряд ли мог знать даже о тех замечаниях и примерах, которые содержались в конце ньютонова „Анализа" (стр. 351) и которые сводились к тому, что, как мы сказали бы теперь, результаты интегрирования обнаруживаются диференцированием. Действительно, Ольденбург в своих письменных сообщениях о содержании этой книги, сделанных им уже тогда Лейбницу, ничего не упоминает об этом. Возможно, что известия об этом привез Чирнгауз, приехавший в 1675 г. из Лондона и имевший с Лейбницем разговоры на рассматриваемую нами тему; но мы видели, что основная мысль появилась у Лейбница уже в 1673 г.

Несмотря на ясное понимание им этого важного и весьма общего применения „результатов диференцирования" к выводу „результатов интегрирования" прежняя история инфинитезимальных исследований, в которых квадратуры занимали гораздо более видное место, чем определения касательных, побуждала его продолжать искать исходного пункта в применении интегрирования или квадратур. Подобно другим более ранним авторам и среди них своему главному образцу — Паскалю — Лейбниц стремится, в частности, обобщить результаты, выведенные из определений центров тяжести. Таким образом доказал он, например, только что упомянутый результат $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$. Действительно, изображенная здесь нами в виде интеграла сумма есть сумма моментов разностей dy относительно оси абсцисс. Такой момент есть, в свою очередь, разность между моментами

$$\frac{1}{2}(y + dy)\cdot(y + dy) - \frac{1}{2}y\cdot y$$

двух следующих друг за другом ординат. Складывая все эти разности в предположении, что первая ордината равна 0, а последняя y, получаем $\frac{1}{2}y^2$.

Лейбниц пользуется предложением о моментах также для вывода различных форм интегрирования по частям, между прочим, той, которую мы теперь (ср. Паскаль, стр. 267) записали бы в виде:

$$\int_0^b xy\,dx = b\int_0^b y\,dx - \int_0^b dx\left(\int_0^x y\,dx\right).$$

Действительно, интеграл $\int_0^b xy\,dx$ есть момент площади $\int_0^b y dx$ относительно оси y; интеграл же $\int_0^b dx \int_0^x y\,dx$ есть момент площади относительно прямой $x = b$. Последнее следует из того, что этот момент может быть представлен как двойная сумма произведений каждого элемента площади на все вправо от него расположенные элементы dx; значит, каждый элемент dx множится на сумму всех влево расположенных элементов площади, что дает $dx\int_0^x y\,dx$; сумма таких слагаемых, т. е. интеграл $\int_0^b dx\int_0^x y\,dx$, таким образом, дает момент относительно прямой $x = b$. Но сумма моментов фигуры относительно этой прямой и относительно оси y должна равняться площади фигуры $\int_0^b y dx$, умноженной на сумму расстояний ее центра тяжести до указанных двух прямых; эта сумма, очевидно, равна b. Отсюда вытекает вышеприведенная формула. Полагая в ней $xy = a$, Лейбниц вычисляет путем интегрирования по частям $\int \ln x\,dx$.

Мы пользовались здесь знаками интеграла и диференциала только для того, чтобы передать лейбницевы операции на более знакомом языке; сам он употребляет в первый раз знак интеграла в последнем написанном нами уравнении. Записав сперва уравнение (с l, вместо нашего y) в виде:

$$\text{omn}\cdot\overline{xl} = x\cdot\overline{\text{omn}\cdot l} - \overline{\text{omn}\cdot\overline{\text{omn}\cdot l}}$$

(где мы, как и в дальнейшем, заменяем только применяемый им знак $\overline{}$ знаком $=$), он говорит, что полезно вместо omn. („все") писать $\int$, т. е. писать уравнение в виде:

$$\int xl = x\int l - \int\int l.$$

Пока это только более удобный для обозрения способ записи; но как раз это обстоятельство позволяет связать с ним определенные правила для простейших операций этого рода, из которых составляются остальные. Таким образом Лейбниц сейчас же устанавливает известные правила:

$$\int x = \frac{x^2}{2},\quad \int x^2 = \frac{x^3}{3},\quad \int \frac{a}{b}x = \frac{a}{b}\int x$$

и тут же применяет преобразование, которое можно записать в виде $\int(u+v)=\int u+\int v$. С помощью таких определенных правил ему действительно удается, как он сам подчеркивает, создать для своих операций особого рода новое исчисление. Из правил этого нового исчисления Лейбниц выводит затем правило выполнения обратной операции. Он говорит, что, если мы вычислим $\int l = ya$, то мы получаем возможность найти $l=\frac{ya}{d}$. Обозначения $\frac{ya}{d}$ и ему подобные были вскоре заменены Лейбницем на $d(ya)$. В другом месте Лейбниц говорит: „dx это то же, что $\frac{x}{d}$, т. е. разность между двумя ближайшими x". Таким образом $\frac{ya}{d}$ есть диференциал величины ya. То, что он приравнен конечной величине l, является следствием несовершенства символа интеграла $\int l$; сам Лейбниц скоро перешел к тому обозначению интеграла, которым мы пользуемся и поныне. Как мы сказали выше (стр. 398), для Лейбница существенно различие между независимой и зависимой переменной, так что под символом $\int l$ он разумеет сумму значений l, взятых через равные промежутки независимой переменной (подразумевается умножение на постоянную величину бесконечно малой разности аргументов).

В том случае, когда в интеграле, который мы записали бы $\int y\,dx$, величина x не является независимой переменной, Лейбниц применяет запись $\int yz$, так что роль dx играет символ z. Таким образом Лейбниц в своей первоначальной символике интегрирования как бы принимает диференциал независимого переменного (z) за новую единицу, и потому символ $\int yz$ переходит в символ $\int y$. К каким неудобствам приводит это введение второй единицы, можно видеть из приводимого ниже примера.

Свою символику Лейбниц применяет к решению ряда обратных задач на касательные.

Первой из них является задача о нахождении кривой, поднормаль к которой (w) обратно пропорциональна ординате (y), так что

$$w=\frac{b}{y}.$$

Лейбниц ссылается на результат, который, по его словам был им найден ранее и который он записывает в виде:

$$\int wz=\frac{y^2}{2}.$$

Отсюда, говорит Лейбниц, вытекает, что

$$w = \frac{y^2}{2d}$$

(здесь следовало бы записать $wz = \frac{y^2}{2d}$).

Но из квадратуры треугольника следует, что

$$\frac{y^2}{2d} = y$$

(при y отсутствует множитель $\frac{v}{d}$, вероятно, потому, что Лейбниц считает y независимым переменным).

Следовательно,

$$wz = y.$$

Из данного уравнения получается

$$\frac{bz}{y} = y,$$

или

$$z = \frac{y^2}{b}.$$

Отсутствие множителя (dy) в правой части равенства не мешает Лейбницу получить затем правильный результат, выводя из

$$\int z = \int \frac{y^2}{b}$$

уравнение

$$x = \frac{y^3}{3ba},$$

где a — множитель, который введен „для однородности" (исходное уравнение было задано в неоднородной форме).

Итак, искомое уравнение кривой есть

$$x = \frac{y^3}{3ba}.$$

Так как, вследствие подобия треугольников, лежащих в основе лейбницева определения касательных, $w = y\frac{dy}{dx}$, то приведенное решение, очевидно, равносильно следующему. Данное уравнение можно написать в виде

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{b}{y},$$

или, по разделении переменных, в виде:

$$y^2 dy = b dx,$$

откуда и получается результат. Лейбниц ставит себе в особую заслугу, что он находит этот результат, принимая за независимое переменное не x, а y; мы уже отмечали (стр. 398), что для

него этот переход был не таким простым, каким он является теперь для нас или каким он был для Барроу, имевшего дело с более простыми задачами. Переход этот ведет с собою у Лейбница даже изменение в применении обозначений; следовало бы ждать, что под $\int \frac{y^2}{b}$ он должен бы был понимать наш $\int \frac{y^2}{b} dx$, тогда как у него это обозначает здесь $\frac{1}{a}\int \frac{y^2}{b} dy$.

Сделанное нами сравнение первоначального решения Лейбница с тем, что теперь так ясно для нас именно вследствие применения его же собственной и им же усовершенствованной символики, позволяет нам лучше понять, как он пришел к ней. Она выработалась частью в результате полного решения задач такого рода, частью в результате напрасных попыток достичь чего-либо подобного заменою переменных в уравнениях, в которых переменные не разделяются, частью благодаря систематическому изучению самого символического языка. Так, мало-по-малу, Лейбниц пришел к введению диференциала независимой переменной под знаком интегрирования. Точно так же ему должно было стать ясным, что легче всего установить правила новых исчислений в первую очередь для диференцирования и уже потом из них вывести правила интегрирования.

Ко времени окончания переписки между Лейбницем и Ньютоном (1676—1677), которая велась через Ольденбурга, Лейбниц уже усовершенствовал свою символику и вывел правила диференцирования. В ответ на сделанные Лейбницем Ольденбургу сообщения о своем ряде для arc tg x он получил несколько кратких указаний о том, что этот ряд уже ранее найден был Грегори, и вообще о разложениях в ряды Грегори и Ньютона. Большие подробности узнал он от одного приехавшего из Англии путешественника. Тогда он попросил Ольденбурга дать ему более полные сведения. Коллин, через которого осуществлялись сношения между Ньютоном и Грегори, послал ему при посредстве Ольденбурга ценное сообщение о последних работах недавно скончавшегося Грегори, а несколько позже Ньютон написал свои уже разобранные нами (стр. 352—361) подробные письма. Лейбниц, как мы, судя по всему, должны предположить, был вполне в состоянии оценить богатство содержания этих писем; это доказывается и его ответами на письма Ньютона. Он оказался в состоянии даже высказать правильные догадки о методах, о которых говорится в анаграммах (стр. 66). Это было для него возможно, с одной стороны, потому, что Ньютон прямо дает указания на то, для чего применяются эти методы, с другой — потому, что, соединяя свое собственное с полученным от Ньютона, он в каждодневной своей работе усваивал методы, с помощью которых можно достичь того же.

Из писем Ньютона и из позднейшего ознакомления с „Анализом" Лейбниц получил полное представление о результатах и методах Ньютона, относящихся к разложению функций, опре-

деляемых алгебраическими уравнениями, в бесконечные ряды, к разложению интегралов этих функций, к обращению образованных таким образом рядов и к применениям этих методов к разложению логарифмических и показательных, круговых и тригонометрических, а также некоторых других функций. Указания Ньютона дали, сверх того, Лейбницу повод к высказанной им в своем втором письме догадке, что Ньютон применяет ряды и к решению обратных задач на касательные, пользуясь и здесь, как и при других разложениях, методом неопределенных коэфициентов. О том, что догадка эта была справедлива, мы знаем не только из появившегося лишь значительно позже „Метода флюксий"; этот ньютонов прием стал известен в том же году, как и лейбницев. Ньютон изложил его, сопроводив свои положения поясняющим примером, в 1692 г. в письмах к Валлису, опубликованных последним в 1693 г. Сообщение это, однако, не произвело впечатления на тех математиков, которые были уже знакомы с диференциалами Лейбница. Несмотря на свидетельство расшифрованных теперь анаграмм, они не могли поверить, что Ньютон уже задолго до этого располагал средством для получения этих результатов — методом флюксий. Одновременное сообщение Лейбница о применениях того же метода разложения в ряды, помещенное в „Acta Eruditorum" за 1693 г., привлекло внимание этих математиков в гораздо большей мере. В статье этой Лейбниц дает новые и более простые доказательства сообщенных ему в 1676 г. Ньютоном разложений в ряды перечисленных выше простейших трансцендентных функций.

Лейбниц находит например, разложение в ряд числа, соответствующего данному логарифму, или, как мы говорим, показательной функции, принимая, предположительно, что

$$ae^{\frac{y}{a}} = a + x = a + ly + my^2 + \ldots$$

Получаемое из определения логарифма диференциальное уравнение

$$a + x - a\frac{dx}{dy} = 0$$

дает тогда тождество:

$$a + ly + my^2 + ny^3 + \ldots - a(l + 2my + 3ny^2 + \ldots) = 0,$$

из которого находятся коэфициенты $l, m, n, \ldots$

Указания, сделанные Ньютоном во втором письме относительно алгебраических функций, интегрируемых в конечной форме (кривых, квадратура которых имеет конечную форму, стр. 361), должны были быть очень интересны Лейбницу, который легко мог тогда проконтролировать их правильность путем диференцирования. Хотя он и не располагал, как мы теперь, позднейшим подробным изложением, данным Ньютоном в „Квадратуре кривых" (стр. 362), он, однако, сразу же понял, что результат

этот получается оттого, что ряды обрываются сами собою и что Ньютон поэтому прав в том, что указанные им случаи являются единственными. Он предоставляет Ньютону как тому, кто может сделать это скорее всякого другого, решить, можно ли установить общие признаки, позволяющие заранее судить, будет ли иметь место обрыв ряда. Это свидетельствует об упоминавшемся нами интересе его к вопросу о разграничении между алгебраическими и трансцендентными функциями (стр. 394). Метод Ньютона совпадает, впрочем, с методом, найденным в общих чертах им самим (стр. 399). О своем методе он сделал Ньютону через Коллина письменное сообщение вскоре по отъезде из Лондона и еще до получения второго письма от Ньютона, содержащего указания относительно квадратур, о которых идет речь.

Особенно надеялся Лейбниц произвести впечатление на Ньютона сообщением, что он обладает методом для решения обратных задач на касательные. Он, однако, обманулся в своих ожиданиях, так как Ньютон, по крайней мере после первого письма Лейбница, склонен был, видимо, думать, что лейбницев прием решения таких задач ведет не дальше, чем прием Барроу. Поэтому он ограничился тем, что в последней из своих анаграмм (стр. 66) указал два метода, которыми он сам пользовался при этом; как мы только что указали, Лейбниц правильно разгадал один из них — разложение в ряд с помощью метода неопределенных коэфициентов. То же письмо Ньютона содержит, однако, важное сообщение, что главная причина, по которой он не хочет пока опубликовывать свою теорию флюксий, заключается в том, что он недоволен еще своею трактовкою задач, не сводящихся к квадратурам. В качестве примера задач, для которых такое сведение возможно, он указывает (в геометрической форме) на такие, которые содержат только одну переменную.

Конечно, Лейбниц, по крайней мере тогда, когда он отвечал на второе письмо Ньютона, мог бы свести к квадратурам значительно большее число обратных задач на касательные, чем Барроу, так как его правила диференцирования позволяли ему значительно быстрее видеть, можно ли образовать заданное выражение путем диференцирования или нет. Так, после того как он, пользуясь своими подобными треугольниками (которыми пользовался также и Барроу), записал одну из предложенных ему в геометрической форме задач с помощью уравнения

$$x\frac{dy}{dx}=f(x)-y,$$

его знание диференциала произведения позволило ему заключить, что $d(xy)=f(x)\,dx$, чем было достигнуто сведение к квадратуре. То, что мы обозначили здесь через $f(x)$, Лейбниц изображает в своем письме с помощью ряда.

Наибольшую важность в этих письмах Лейбница, как по отношению к решению обратных задач на касательные, так и во всех других отношениях, представляет сделанное в начале его вто-

рого письма (1677) сообщение об его употреблении знака диференцирования d и о простейших и потому важнейших правилах операций, связанных с этим символом. Лейбниц определяет диференциалы dx и dy как бесконечно малые разности между следующими друг за другом значениями x и y, не давая более точного пояснения этого понятия. Он дает правило образования диференциала степени и произведения и, в связи с ним, правило диференцирования целой рациональной функции x и y или уравнения, получаемого приравниванием такой функции нулю. Он показывает, что правило Слюза для определения касательных вытекает отсюда как следствие, но вместе с тем замечает, что его собственный метод применим и при наличии более чем двух переменных, а также при наличии радикалов. Последние Лейбниц трактует в согласии со сделанными Ньютоном в его первом письме замечаниями об употреблении дробных показателей в биномиальной формуле. Правило его для диференцирования корня содержится, таким образом, в формуле $dx^z = zx^{z-1}\,dx$.

То обстоятельство, что при применении ее к случаю $z = \frac{1}{3}$ Лейбниц делает ошибку, может быть объяснено тем, что он, желая держаться в данном случае ближе к Ньютону, выполняет операцию не так, как привык это делать; более ранние его записки свидетельствуют, что он умел диференцировать и корни и дроби. Лейбниц совершенно основательно находит подтверждение соответствию своего метода с незнакомым ему ньютоновым в том, что его метод, так же как и ньютонов, может быть обратно применен к квадратурам.

Мы видим отсюда, что у Лейбница к этому времени основы его диференциального исчисления были совсем готовы. Встает вопрос, как раньше по отношению к Ньютону: почему он медлил дать этому методу более широкое распространение? Письмо его было предназначено в первую очередь для Ньютона, который, как знал Лейбниц, владел подобным же методом; однако он должен был предполагать, что оно будет показано и членам Королевского общества, которые, возможно, были знакомы и с методом Ньютона. Пока он прежде всего ждал ответа от Ньютона с сообщениями о его методе; Ньютон, однако, ему не ответил. Как ни ясно было самому Лейбницу значение его метода, он все же не мог рассчитывать на полное признание со стороны других, пока он не подготовил его еще надлежащим образом к опубликованию и не мог еще подтвердить его важность новыми результатами его применения. Такая подготовка требовала большой работы; Лейбниц же, переехав в 1677 г. в Ганновер, был там чрезвычайно загружен делами, связанными со службой. Досуг, который он находил для собственных работ, он посвящал философским и другим математическим вопросам, выступившим на передний план, когда обработка диференциального исчисления была раз отодвинута. Надо помнить при этом также, что опубликование готовых работ производилось тогда не столь

быстро, как теперь. Нам нет даже надобности оглядываться назад и вспоминать, сколько времени оставалась ненапечатанной большая часть работ Ферма. Собственное сочинение Лейбница об арифметической квадратуре (стр. 392), которое было уже у него готово к печати до переезда его в Ганновер, вообще никогда не появилось полностью, и нам пришлось передавать содержание заключавшихся в нем исследований по запискам Лейбница и по кратким сообщениям, частично относящимся к более позднему времени.

Мы не знаем, какая из этих причин больше всего способствовала отсрочке. Мы отметили их лишь для того, чтобы показать, что нет надобности прибегать к гипотезе, которая могла иметь место по отношению к итальянцам начала XVI в., но которую часто пытаются применить без достаточных оснований также к Ньютону, Лейбницу и другим математикам следующего столетия. Мы имеем в виду предположение, что авторы сохраняли в тайне свои методы, чтобы произвести тем большее впечатление своими результатами. Этим предположением хотели объяснить также то обстоятельство, что Лейбниц в первом опубликованном им сообщении, сообщая о своем символе диференциала, не упоминает одновременно и о своем символе интеграла, словно бы символ без пояснения его применения и мотивировки его целесообразности мог иметь какое-нибудь значение; а для такого пояснения Лейбниц вряд ли мог бы найти место в первом опубликованном им сообщении о диференцировании (в „Acta Eruditorum“ за 1684 г.).

В сообщении этом Лейбниц принимает за диференциал dx, соответствующий одной из переменных величин (x), совершенно произвольную величину, диференциал же dy величины y, изменяющейся вместе с x, определяется как $\frac{y\,dx}{S_t}$, где S_t — подкасательная к кривой, абсцисса которой есть x и ордината y. Таким образом Лейбниц получил возможность не пользоваться неопределенным (undefinierte) понятием бесконечно малой величины; судя по некоторым дошедшим до нас запискам, он тогда еще не решался сделать это, так как вряд ли мог ждать, что это понятие будет принято без дальнейших пояснений. Данное Лейбницем определение примыкает к данному Ферма методу определения касательных (стр. 322) и указывает, таким образом, на то, что диференциалы применимы повсюду там, где применялся метод Ферма. Фактически понятие диференциала вполне совпадает с ньютоновым понятием флюксии (которого Лейбниц тогда не знал), так как флюксия одной из переменных также может быть выбрана по произволу (стр. 348).

Во введенном здесь алгорифме Лейбниц дает формулы для образования диференциала постоянной величины, суммы, произведения и частного, а затем для образования диференциала степени и корня. Для того чтобы правила можно было применять возможно более непосредственно, он избегает здесь упот-

ребления дробных и отрицательных показателей. То обстоятельство, что Лейбниц, в противоположность Гудде и Ньютону, не обозначает буквами величины вместе с их знаками, заставляет его в выражении для диференциала частного ставить двойной знак, что излишне затрудняет применение этого правила, особенно к выражениям, содержащим несколько частных. Коротко и ясно установлены правила, позволяющие по знаку диференциала (dv) зависимой переменной определить, возрастает она или убывает, так же как по знаку второго диференциала (ddv) судить о вогнутости или выпуклости кривой, изображаемой уравнением между x и v. Благодаря этому становится возможным различать между собою определяемые условием $dv = 0$ максимумы от минимумов; отсюда же следует, что условие $ddv = 0$ определяет точки перегиба (стр. 324 и 372).

Особую важность представляет для Лейбница то обстоятельство, что его правила можно применять и не освобождая предварительно уравнения от иррациональностей. Среди его примеров мы встречаем также такие, в которых это преобразование значительно усложнило бы вычисления; сюда относятся задача Ферма о преломлении лучей (стр. 322) и определение касательной к геометрическому месту точки, сумма расстояний которой от 6 точек прямой имеет данную величину.

В то время как применения диференциалов непосредственно следуют из их определения, для доказательства самых правил Лейбниц апеллирует к тому обстоятельству, что диференциалы dx, dy, dz, ... можно считать пропорциональными мгновенным приращениям величин x, y, z, ..., или их мгновенным уменьшениям. Уменьшения он должен оговаривать особо вследствие упомянутой неполноты его буквенной символики[1]. Указанный

---

[1] Таким образом мы видим, что Лейбниц, как и Ньютон, на самом деле не обошелся без „неопределенных" бесконечно малых величин, как несколько выше утверждалось Цейтеном. Как и Ньютон (см. примечание на стр. 365), Лейбниц в *определении* основных понятий избегает необходимости явно говорить о бесконечно малых величинах. Как и Ньютон, он руководится при этом желанием избежать тех нареканий, которые могло бы вызвать введение бесконечно малых. Как и Ньютон, он вынужден, однако, изгнав бесконечно малые через дверь, впустить их через окно. Разница между ним и Ньютоном состоит в том, что Ньютон прибегает к помощи интуиции, апеллируя к кинематике (флюксия как скорость), Лейбниц же опирается на интуицию геометрическую (касательная). Разница состоит и в том, что Лейбниц, исходя из общих своих философских установок, считал бесконечно малые величины существующими в сверхчувственном мире, и эту позицию впоследствии развивал более решительно, Ньютон же начал с решительного заявления, что он „не боится говорить о бесконечно малых линиях" (в „Анализе"), и кончил отрицанием существования бесконечно малых линий, заявив, что в математике недопустимы даже самые малые ошибки (в „Квадратуре кривых").

Нетрудно видеть, что лейбницево определение диференциала является прообразом современного определения диференциала функции (как произведения производной на произвольное, вообще говоря, конечное приращение независимой переменной). Только вместо интуитивного понятия касательной в современное определение входит понятие предела (производная функция). Но в то время как современное диференциальное исчисление есть по существу исчисление пределов, лейбницево диференциальное исчисление есть исчисление „мгновенных

прием вполне соответствует тому, который лежит в основе ньютонова понятия флюксии; действительно, у Ньютона время представляет собою вспомогательную величину, которою можно распоряжаться по произволу (стр. 348). Если воспользоваться этим приемом, то, как отмечает и сам Лейбниц, полное доказательство данных им формул диференцирования для тех, кто владел такого рода вопросами, т. е. был знаком с методами Ферма, Барроу и Грегори, не представляло особых трудностей.

Не надо поэтому в лейбницевых формулах диференцирования искать прежде всего новых результатов. Своим основным значением для всей математики последующего времени обязаны они иным обстоятельствам — тому, что они так ясно сформулированы, тому, что они выставлены Лейбницем в качестве общего исходного пункта для всех инфинитезимальных исследований, тому, наконец, что связь их с символикой делает их основой *исчисления*, с помощью которого можно производить разнообразные инфинитезимальные исследования таким же образом, как исследования анализа конечной величины с помощью буквенного исчисления.

Сам Лейбниц отмечает это значение, говоря в конце своего краткого сочинения о начале „значительно более высокой геометрии" („geometria multo sublimior"). В качестве примера он применяет свой метод к задаче де-Бона. Он указывает этим на обратные задачи на касательные, которые принимают теперь вид диференциальных уравнений. Напротив, он оставляет здесь без рассмотрения применения к квадратуре и не имеет поэтому случая воспользоваться своим знаком интеграла и связанными с ним правилами, вытекающими из его правил диференцирования. Сам он, как мы знаем, частично нашел первые из них раньше, чем

приращений". И именно, последовательное проведение этой точки зрения обеспечило Лейбницу роль вождя новой математики, каким он фактически был не только при жизни, но через свои работы и через своих учеников еще долгое время после смерти. Я сказал, что в работе 1684 г. Лейбниц избегает в определении *явно* говорить о бесконечно малых и ссылается на интуитивное понятие касательной. Но в той же работе, покончив с официальной частью, впустив затем через задний ход понятие мгновенных приращений, он вновь возвращается затем к вопросу о том, что же такое касательная, и здесь говорит: „найти касательную — это значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначащ данной кривой". Таким образом сам Лейбниц не мог не видеть (вся работа написана очень сжато и чувствуется, что каждое слово в ней взвешено), что в его трактовке бесконечно малые величины играют существенную, основную роль. Тем более странно, что этого не усматривает не только Цейтен, но и другие историки. Так, в „Хрестоматии по истории математики", вып. IV (русский перевод А. П. Юшкевича, ГТТИ, 1932, стр. 98) Г. Вилейтнер, комментируя отрывки из лейбницевой работы 1684 г., пишет: „Позднее Лейбниц и его последователи стали обозначать через dx, dy и т. д. самые эти („мгновенные") приращения. Это вызвало тогда, а затем и позднее, ряд не всегда справедливых упреков по их адресу. На самом деле то, о чем думал Лейбниц, есть то же самое, о чем думаем мы, совершая переход к пределу..."

Прим. ред.

последние. Тем легче ему было связать их с правилами диференцирования задним числом, после того, как он решил принять за исходный пункт диференцирование. Среди относящихся к этому времени рукописей Лейбница имеется набросок сочинения, содержащего среди другого также начальные основы интегрального исчисления. Значение правил диференцирования для выполнения квадратур должно было быть, впрочем, ясно всем тем, кто был знаком с сочинением Лейбница, помещенным в том же журнале за 1682 г., где он пользуется нахождением касательных для того, чтобы найти квадратрису кривой или доказать, что квадратуру ее нельзя получить алгебраически. Сочинение его, появившееся в 1684 г., закладывает поэтому основы не только диференциального исчисления, но, соответственно сказанному, и интегрального. Так как исходный пункт был взят надлежащим образом, то теперь математикам оставалось только итти в инфинитезимальных исследованиях далее вперед по тому пути, который был намечен как задачами, уже поставленными прежде, так и теми, которые возникли благодаря новым средствам исследования и тому значительному облегчению, которое они с собой принесли.

13. Начало нового периода в истории математики.

Небольшое сочинение Лейбница, появившееся в 1684 г., положило действительное начало исчислению бесконечно малых, дав правила, которые были достаточно просты для начала и комбинация которых давала возможность дальнейшей работы. Оно открывает собою поэтому новую эпоху в истории математики. Сам Лейбниц уже ранее очень широко ставил и разрешал гораздо большее число вопросов исчисления бесконечно малых, чем то, которое содержится в работе 1684 г. Как путем изучения литературы, так и путем письменного и личного общения с другими математиками он усвоил существовавшие тогда методы (частично также и ньютонов) и основательно и самостоятельно переработал их. Благодаря этому он сразу же смог быстро и уверенно двигаться вперед от нового своего исходного пункта. Весь предшествовавший расцвет инфинитезимальной математики, так много давший и самому Лейбницу, сделал атмосферу настолько благоприятной, что он довольно скоро нашел сотрудников, энергично принявших участие в дальнейшей работе. Из всех современных ему математиков Лейбниц в наибольшей мере является лицом, с именем которого связано начало новой эпохи, не только потому, что наиболее значительные работы начала новой эпохи были созданы на основе введенных Лейбницем форм и, в свою очередь, содействовали развитию последних, но и потому, что лейбницевы формы — это те, которыми мы пользуемся и поныне. Однако из только что сказанного ясно, что мы не должны забывать и о других, которые тоже умели достигать подобных же результатов и пользовались при этом подобными же соображениями; их методы не получили, правда, такого же формального развития, как

лейбницевы, но они все же содействовали подготовке его более целесообразных форм. Об этих исследователях мы говорили уже в предыдущем; одного из них мы должны, однако, назвать еще раз особо, так как он наряду с Лейбницем наиболее непосредственно участвовал в создании математики нового времени; это— Ньютон. Существенная доля его вклада состоит в его общих методах разложения в ряды, с помощью которых функции получают существование, независимое от геометрического их представления, и которые необходимы для вычисления функций, получаемых путем интегрирования. Лейбниц был не единственным, кто познакомился с этими методами из сообщений Ньютона; другие также знакомились с ними теми или иными путями. Знакомство это не распространяется, однако, на те работы Ньютона, в которых излагалась общая теория флюксий. Эти работы принадлежат, конечно, всецело предшествующему времени, и потому мы дали им место в нашей книге; но известны стали они лишь в следующем столетии, причем частично лишь довольно поздно. В XVIII в. они приобрели значение, подобное тому, какие сочинения древних имели к началу нового времени, когда с ними постепенно знакомились все более обстоятельно: несмотря на то, что опубликованы эти работы Ньютона были значительно позднее появления работ Лейбница, ознакомление с ними принесло, наряду с тем, что было уже получено методами Лейбница, также много новых результатов и импульсов. Особенно плодотворно было их действие на родине Ньютона, где — прежде всего, конечно, из националистических соображений — еще долго пользовались созданными им формами даже тогда, когда в других местах лейбницевы получили уже общее распространение.

Одна из работ Ньютона была, однако, опубликована уже к началу нового периода, и, наряду с созданием диференциального исчисления, ознаменовала собою грань между старым и новым; это были „Начала". Выполняемые в них в косвенной форме интегрирования диференциальных уравнений мы уже разбирали. Овладение „Началами" с точки зрения нового исчисления бесконечно малых, стремление дать решенным в них задачам по механике формы, соответствующие этому исчислению, а впоследствии продолжение ньютоновых исследований могли на долгое время обеспечить математической работе, введенной Лейбницем в целесообразные формы, соответствующее содержание.

Лейбницевой работой 1684 г. и „Началами" Ньютона (1687) заканчивается период, которым мы занимались в настоящей книге, и начинается новый. Переворот, связанный с именем Лейбница, заставляет вспомнить о действии, произведенном „Геометрией" Декарта. Правда, Декарт ввел лишь немногие отдельные новые обозначения, но он чрезвычайно расширил поле применимости символических операций (стр. 200); благодаря этому сама алгебра и вместе с нею математический анализ смогли принять вид буквенного исчисления; таким же образом Лейбниц при помощи введенных им самим символов дал вид исчисления анализу

бесконечно малых. Мы можем поэтому повторить применительно к произведенному им перевороту большую часть замечаний, сделанных нами уже (на стр 211 п сл.) по поводу действия, произведенного „Геометрией“ Декарта. Сходство проявляется также и в том отношении, что и там и тут гораздо большее внимание уделялось дальнейшему развитию новых методов и применению их к получению новых результатов, чем логическому их обоснованию. Инфинитезимальные исследования также строились раньше на испытанной логической основе, которая была унаследована от древних и которую частью применяли и к новым исследованиям, прибегая в случае необходимости к доказательству методом исчерпывания. Эту логическую строгость древних старается сохранить и Ньютон, устанавливая в вводной главе „Начал“ правила предельного перехода. Лейбницева же форма изложения и методы рассуждений удалялись от этой традиции, и потому они требовали создания новых логических опорных пунктов. Математики, однако, полагались на беглость, с которой постепенно приучались выполнять эти операции, и на очевидную правильность множества полученных результатов и не заботились дальше о принятии нужных мер предосторожности. Говорили о бесконечно малых величинах и оперировали с ними, не ограничивая точно этого понятия, а вместе с тем и тех операций, которые можно производить при помощи этих величин с полной уверенностью; в скором времени вошли в употребление всяческие вычисления с величинами, изображаемыми с помощью бесконечных рядов, причем не ставился даже вопрос о сходимости этих рядов, и т. п. Если не говорить об отдельных изолированных попытках, то серьезно за работу обоснования анализа, становившуюся все более необходимой, взялись лишь математики начала XIX в. — Гаусс, Коши и Абель, в свою очередь начавшие новую эпоху в истории математики.

Укажем здесь еще одну черту сходства. Аналитическая геометрия Декарта тотчас же получила обильный материал для разработки, так как она должна была доказать и решить на своем языке многочисленные предложения и задачи из античного учения о конических сечениях. Если часто алгебраическая форма изложения давала лишь новое одеяние применявшимся и раньше зависимостям, то, сверх того, эта форма и связанный с нею новый взгляд на вещи должны были вести и к новым вопросам, которые теперь должны были стать предметом исследования. Таким же образом диференциальное и появившееся вскоре за ним интегральное исчисления получили в скором времени богатый материал, так как они могли начать с возвращения ко многим инфинитезимальным вопросам, разрешенным великими математиками недавнего времени. Во многих случаях новая трактовка ограничивалась переводом на новый язык (таким переводом мы старались в предыдущем облегчить современным читателям обзор мыслей прежних математиков). Но, с другой стороны, та новая точка зрения на предмет, которая позволила Лейбницу и его

последователям привести к единообразному и более простому виду исследования предшественников, эта новая точка зрения дала возможность не только усовершенствовать сам метод, но также ставить новые вопросы и их разрешать.

Начало XVIII в застает математику в состоянии быстрого развития, продолжающегося уже 15 лет. Эти последние 15 лет XVII в. должны поэтому естественно рассматриваться в истории математики XVIII в. Нам поэтому нет надобности особенно вдаваться в инфинитезимальные исследования этих 15 лет. Ограничимся кратким обзором их содержания, который покажет нам, как хорошо удалось Лейбницу взяться как раз за то, что было нужно и что тогда можно было использовать. Обзор этот может быть очень сжатым, так как исследования принимают теперь знакомый нам в настоящее время вид, и мы сможем без особых пояснений понять, каким путем получены соответственные результаты.

Прежде всего мы, однако, упомянем о нескольких работах, появившихся в Англии и ближе всего примыкающих к Ньютону и его предшественникам. Вышедшее в 1685 г. сочинение жившего в Кэмбридже шотландца Джона Крэга (John Craig) свидетельствует, что в Англии уже было обращено внимание на появившуюся в предыдущем году работу Лейбница и что не один Ньютон понимал здесь значение нового исчисления для квадратуры или интегрирования, на которое Лейбниц тогда еще не дал указаний. Крэг применяет для нахождения квадратур диференцирование, пользуясь некоторыми из тех форм, в которых выражает свое предложение о взаимно обратной зависимости Барроу (стр. 342 и 345). Следуя Ньютону, Крэг применяет также разложения в ряды, не получая, однако, новых существенных результатов. У Лейбница особенно удивляет его непосредственное диференцирование иррациональных величин. Собственное его обратное применение диференцирования к интегрированию не идет далее получения результатов, имеющихся уже у Ферма и Валлиса (их квадратуры парабол с дробными показателями). Применение метода неопределенных коэфициентов, служившего основой ньютонова разложения в ряды, было изложено в 1697 г. в журнале Лондонского королевского общества („Philosophical Transactions") жившим в Англии французом Моавром (de Moivre). Более оригинальными являются способы разложения в ряды, принадлежащие Галлею (1695), применившему их к вычислению логарифмов и антилогарифмов.

Обращаясь теперь снова к работам Лейбница и его школы, заметим прежде всего, что в случае, если нами не сделано других указаний, они помещены в „Acta Eruditorum". Различные ветви исчисления бесконечно малых мы рассмотрим отдельно, начав с диференциального исчисления и его приложений к геометрии. Сам Лейбниц начал с этого в 1684 г. В 1686 г. он занимается соприкасающимся кругом и применением его к измерению кривизны; он принимает, однако, ошибочно, что такой круг имеет в общем случае 4 совпадающих точки пересечения с кри-

вою. Ошибка эта была в 1692 г. исправлена Яковом Бернулли, доказавшим, что в общем случае таких точек имеется лишь 3. В 1691 г. Я. Бернулли решил ряд различных инфинитезимальных задач, связанных с некоторою кривой, заданной в полярных координатах. Рассматривая так называемую „параболическую спираль", имеющую уравнение

$$(a - r)^2 = b\vartheta$$

(где r и ϑ — полярные координаты, a и b — постоянные), Бернулли определяет для нее не только касательные, площадь сектора и длину дуги, но и точки перегиба. При последнем определении он пользуется тем обстоятельством, что отрезок, отсекаемый на неподвижном луче касательной в точке перегиба, имеет минимальную длину. В добавлении он передает на языке диференциального исчисления гюйгенсово определение радиуса кривизны кривой, отнесенной к прямоугольным координатам. Несколько позже (1694) он находит таким образом для радиуса кривизны выражение $ds^3 : (dx\,ddy)$. Мы видим, что Бернулли имел случай проверить упомянутое выше утверждение Лейбница и усмотреть его ошибочность. Он опровергнул это утверждение, с одной стороны, графически, рассматривая, как может осуществляться слияние точки пересечения кривой и касающегося к ней круга с точкой соприкосновения, с другой стороны, — путем вычисления для того случая, когда кривая — парабола. Требующееся при этом определение равных корней уравнения Яков Бернулли выполнял, как это уже раньше делал в других исследованиях его брат, путем указанного Гудде (стр. 318) умножения коэфициентов на члены арифметического ряда, — приема, который теперь может быть легко обоснован с помощью диференциального исчисления. Лейбниц, ценивший в Якове Бернулли единомышленника, не захотел, однако, признать свою ошибку и ограничился довольно поверхностным возражением; это заставило Бернулли снова вернуться к вопросу. В этой дискуссии Бернулли сделал очень обстоятельные разъяснения относительно различия между соприкосновением четного и нечетного порядка; эта дискуссия привела также к определению параллельных кривых. Подобно своему брату Иоганну, Яков Бернулли исследовал также каустики (стр. 334). Свои разнообразные геометрические и оптические исследования он применил, между прочим, к логарифмической спирали; он обнаружил здесь то весьма интересное обстоятельство, что ее эволюты и каустики также являются логарифмическими спиралями.

Эволюты и каустики являются примерами кривых, представляющих собою огибающие семейства прямых. Точки касания этих прямых с огибающей, как это указывал уже Декарт (стр. 399), являются точками пересечения двух следующих друг за другом касательных. Это обстоятельство дало Лейбницу повод к совершенно новому и очень важному применению диференциального исчисления — именно к общей задаче нахождения огибающих не



Яков Бернулли

1654 — 1705

Гравюра А. Троицкого с современного портрета

только прямых, но и кривых линий, уравнения которых содержат переменный параметр. Он решает эту задачу так, как это делается еще и теперь, путем диференцирования уравнения пучка по переменному параметру. Прием этот Лейбниц развил с полною ясностью в 1692 г., а в 1694 г. пояснил примерами.

Лейбницу мы обязаны также обобщением некоторых основных формул самого диференциального исчисления, в частности известною формулою, аналогичною биномиальной:

$$d^m(xy) = d^m x\, d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x\, dy + \frac{m(m-1)}{2} d^{m-2} x\, d^2 y + \ldots$$

Здесь он в первый раз отмечает число диференцирований не повторением d, как он делал это раньше, а употреблением показателя при d ($d^0 y$ равно, следовательно, y). Первоначально эта формула была сообщена Лейбницем лишь в письме к Иоганну Бернулли (1695). В том же 1695 г. он дает в печатной статье формулу:

$$d(m^n) = m^n \ln m dn + nm^{n-1} dm$$

и предупреждает, таким образом, в этом отношении обстоятельные исследования относительно показательных функций, принадлежащие Иоганну Бернулли.

Благодаря указанным работам диференциальное исчисление и его геометрические применения получили такое развитие, что еще до конца столетия смог появиться труд, представляющий общее изложение предмета. Это был „Анализ бесконечно малых" Лопиталя (1696). Из новых результатов, содержащихся здесь, отметим применение диференцирования к определению пределов выражений, принимающих вид $\frac{0}{0}$, а также подробное рассмотрение таких точек кривой, в которых $\frac{d^2y}{dx^2}$ обращается в нуль или в бесконечность, а также соответствующих точек эволюты.

Когда Лейбниц опубликовал свою работу о диференцировании, ему, как мы знаем, было вполне ясно то значение, которое имеет обстоятельное изучение результатов диференцирования для выполнения обратной операции, получившей вскоре от братьев Бернулли имя интегрирования. Под этим словом понимали как интегрирование заданного диференциала, совпадавшее с прежними квадратурами, так и более общее интегрирование диференциальных уравнений, с помощью которого решаются более общие обратные задачи на касательные. Для интегрирования заданных диференциалов уже сам Лейбниц употреблял знак $\int$, введенный им еще раньше, чем его знак диференцирования (стр. 400). Первый его печатный труд, в котором он применяет символ $\int$, носит название „Geometria recondita", т. е. „Скрытая геометрия" (1686). Лейбниц отмечает здесь, как важно не забывать писать под знаком интеграла множитель dx (диференциал независимой

переменной). Этого, правда, можно было бы и не делать, так как по лейбницевым принципам диференцирования (1685) dx можно положить равным 1, когда x есть независимая переменная и, следовательно, изменяясь, прирастает на одну и ту же величину; однако Лейбниц помнил, конечно, о трудностях, которые возникали у него в таком случае (стр. 401), в частности, тогда, когда ему приходилось вводить новую независимую переменную. В указанной работе Лейбниц отмечает также, что интегрирование и обратные задачи на касательные являются источником получения трансцендентных величин (термина „функция" он еще не употребляет). Он укоряет здесь — как нередко и в других местах — Декарта за то, что тот хотел исключить их из геометрии; сам он обозначает их особыми буквами и подвергает диференцированию. Рассматривает он также изображение их с помощью уравнений алгебраического вида с бесконечно большим количеством членов; мы уже упоминали (стр. 404) о той удачной форме, в которой он выводит разложения простейших трансцендентных функций из диференциальных уравнений. В связи с этим отметим, что Лейбниц интересовался определением кривых, подчиненных некоторым механическим условиям (о чем речь будет итти ниже), между прочим и потому, что они ведут к механическому построению кривых, которые можно применить для изображения трансцендентных функций (например, цепную линию для изображения логарифмических функций). Правда, в числе других уже Барроу применял кривые к изображению безразлично как алгебраических функций, так и таких, которые являются трансцендентными; Лейбниц, однако, как уже было упомянуто (стр. 394), хотел, сверх того, приобрести уверенность в неалгебраической природе трансцендентных кривых.

При таких обстоятельствах легко понять, что с развитием интегрального исчисления стала ощущаться потребность в более прямом изображении простейших трансцендентных функций, чем старое геометрическое, основанное на зависимости площади от абсциссы и, обратно, абсциссы от площади, и в более прямом, чем ньютоново, дающее для различных функций разложения в ряды. Иоганн Бернулли, особенно содействовавший успехам выраставшего интегрального исчисления, начинает подвергать показательные и другие родственные им функции прямому исследованию, связанному с их алгебраическим выражением. Он делает это в своем сочинении 1697 г., содержащем, между прочим, весьма заинтересовавшую Лейбница квадратуру, выраженную помощью бесконечного ряда и могущую быть представленной с помощью позднейшего знака определенного интеграла в виде:

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots$$

Предметом особого внимания служило также интегрирование диференциальных уравнений. С диференциальными уравнениями

как первого, так и второго порядка математики имели дело в геометрических и механических задачах, о которых мы будем говорить ниже. Во многих случаях они умели преодолевать трудности, связанные с интегрированием, как мы видим это, например, в „Началах" Ньютона. Теперь, однако, дело уже не ограничивалось решением отдельных случаев, представляемых отдельными задачами, и преодолением встречавшихся здесь трудностей. Существовавшие теперь правила диференцирования давали возможность выяснить вопрос, какие имеются общие средства для интегрирования и какие классы уравнений можно интегрировать с помощью их. Примером может служить так называемое уравнение Бернулли. В 1695 г. Яков Бернулли поставил задачу о решении уравнения

$$dy + Py\,dx = Qy^n\,dx,$$

где P и Q зависят только от x. Лейбниц указал в 1696 г., что это уравнение легко приводится к так называемому линейному диференциальному уравнению, в котором $n = 0$, и способ интегрирования которого он уже раньше сообщил своим друзьям; такое уравнение интегрировал также Ньютон в „Началах" (стр. 386). Иоганн Бернулли указал в 1697 г., как это преобразование можно выполнить с помощью подстановки $y = v^{\frac{1}{1-n}}$; он дал также способ непосредственного интегрирования уравнения путем подстановки $y = m \cdot z$, где m и z — новые переменные, причем z он выбирает желательным ему образом.

Сверх того, Иоганн Бернулли уже в 1694 г. отметил значение разделения переменных (как Барроу, стр. 346), а также пытался дать общую трактовку диференциальных уравнений 1-го порядка и 1-й степени. Он указал, что изображаемые таким уравнением плоские кривые образуют совокупность такого рода, что через каждую точку плоскости проходит по одной кривой этой совокупности; он определил, сверх того, геометрическое место точек перегиба этих кривых.

Тогдашнее стремление его подвергнуть эту тему всестороннему рассмотрению с полною ясностью сказывается не только в сочинениях его, изданных к концу столетия, но и в переписке его с Лейбницем и в нескольких лекциях по интегральному исчислению, написанных в Париже, чтобы ввести в курс этого предмета Лопиталя, и напечатанных лишь значительно позже. Мы можем ограничиться здесь несколькими замечаниями. Из вопросов, затрагиваемых в письмах, укажем на преобразование уравнений, однородных относительно x и y, с помощью подстановки $y = xz$ в уравнения с разделяющимися переменными. Бернулли указывает также на интегрируемость уравнений вида:

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

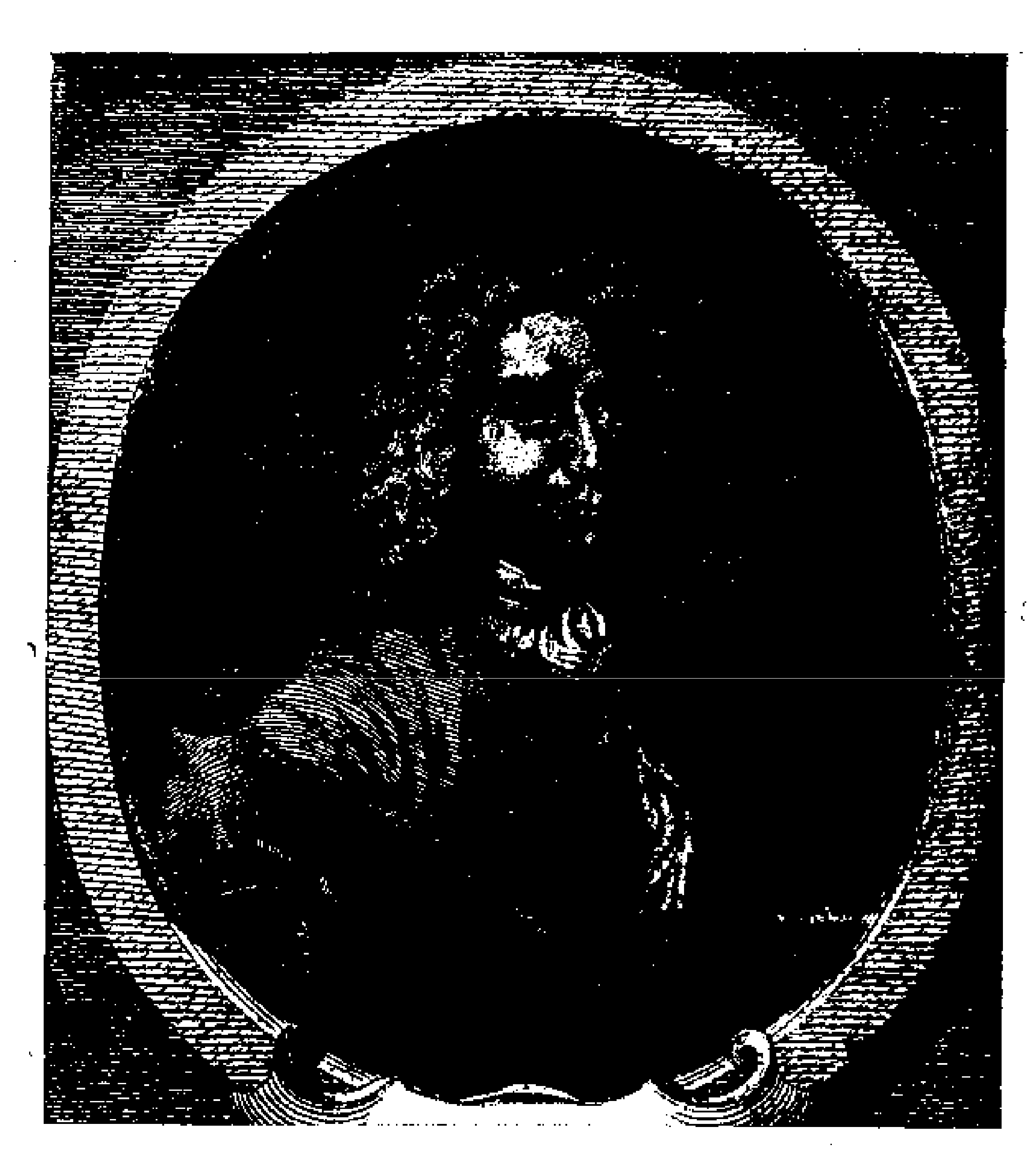
В лекциях мы находим пример того, что при новой постановке вопроса часто приходится бороться с трудностями, которые при старой были уже преодолены. Интегралы, изображавшиеся раньше с помощью квадратур, были прежде всего определенные интегралы с верхним и нижним пределами. Благодаря этому Барроу мог (стр. 346) преодолеть трудность, состоявшую в том, что одна из обратных задач на касательные вела к квадратуре $\int\frac{dx}{x}$; для этого ему достаточно было положить нижний предел равным не 0, как обычно, а произвольной положительной постоянной. Для Бернулли же интегрирование было прежде всего лишь обращением диференцирования; о связанном с этим введении произвольного постоянного слагаемого школа Лейбница не имела еще в ту пору надлежащего представления. В сочинении своем о показательных функциях Бернулли знает, что $\int\frac{dx}{x}=\ln x$ (что верно, если за нижний предел взять $x=1$). В лекциях же он, напротив, из равенства $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ выводит, что $\int\frac{dx}{x}=\infty$ (что, в свою очередь, тоже верно, если за нижний предел взять $x=0$); чтобы избежать этого бесконечного выражения, он применяет разные искусственные приемы для преобразования диференциальных уравнений в такие, которые не ведут к интегралам этого вида.

Заметим еще, что Иоганн Бернулли, при содействии Лейбница, занимался также сведением величин, получающихся путем интегрирования, не только к квадратурам, но и к ректификациям. Так, логарифмические величины он изображал с помощью не гиперболических площадей, а длин дуг парабол.

Таким образом к началу XVIII в. в области интегрального исчисления было подготовлено не так еще много, чтобы могла итти речь о подведении предварительных итогов, что по отношению к диференциальному исчислению было сделано книгой Лопиталя.

Оказалось также, что интегральное исчисление получило дальнейшее непосредственное развитие: в самом начале нового века появилась работа Лейбница о разложении дробей, важном вспомогательном средстве, применение которого выше мы могли видеть лишь на одном единственном примере (стр. 351). Первая попытка связного изложения круга вопросов, принадлежащих области интегрального исчисления, принадлежит не школе Лейбница — она содержится, как мы уже упоминали, в сочинении Ньютона „О квадратуре кривых" (1704). Ньютон оставляет здесь без рассмотрения то, что было опубликовано школой Лейбница, но дает многое, что было оставлено без рассмотрения этой школой.

Мы уже указывали на бесконечный ряд, к которому Иоганн Бернулли свел одну из квадратур. Мы обязаны ему, однако,



Иоганн Бернулли
1667 — 1748
С современной гравюры

также общим разложением в ряд, имеющим место для любого интеграла, именно разложением:

$$\int n\,dz = nz - \frac{z^2}{1\cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2n}{dz^2} - \ldots,$$

которое легко доказывается диференцированием и находится в тесной связи с позднейшим рядом Тейлора. Еще раньше Яков Бернулли подвергнул большое количество бесконечных рядов рассмотрению, независимому от диференциального исчисления; результаты этой его работы опубликовывались в 1689—1704 гг., после того как они давали его ученикам темы для академических диспутов. Ряды эти того же рода, как те, которыми в первое время занимался Лейбниц (стр. 391), частично они даже совпадают с ними. Мы сделаем только несколько замечаний о логической стороне этих исследований. Бернулли дает действительное доказательство того, что при беспредельном возрастании n выражение a^n либо беспредельно возрастает либо стремится к пределу 0, смотря по тому, будет ли $a \gtrless 1$. Это следует из того, что геометрический ряд со знаменателем $a > 1$ растет быстрее, чем арифметический, имеющий те же 2 первых члена. Таким же образом доказывается, что выражение $\frac{a+nb}{c+nd}$ при неограниченном увеличении n стремится к пределу $\frac{b}{d}$. К результату

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1,$$

точно доказанному уже Броункером (стр. 304), Яков Бернулли приходит, рассматривая этот ряд как разность между рядами:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

и

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Он сам, однако, выражает некоторое сомнение в правомерности такой операции с двумя расходящимися рядами и показывает, что в других случаях подобный прием может вести к абсурдным результатам. То, что здесь это не может иметь места, он мотивирует тем, что неиспользованный член одного из рядов, разность которых равна 1, имеет пределом 0. Таким образом фактически он рассматривает результат как предел, к которому стремится разность двух конечных рядов, когда число членов, будучи все время одинаково для обоих рядов, растет до бесконечности. Самый ход его мыслей правилен; но способ их выражения создает прецедент как для имеющегося в некоторых случаях у него самого неправомерного сопоставления расходящихся рядов, так и для небрежного отношения к вопросу о сходимости, которое характерно для XVIII в. К исследованиям Якова Бернулли о рядах примыкает его исчисление вероятностей, по-

явившееся лишь значительно позже его смерти; в исчислении этом фигурируют числа, названные по его имени числами Бернулли.

Едва ли не большее внимание, чем выработка методов диференциального и интегрального исчислений, привлекали в конце XVII в. геометрические и механические задачи, решавшиеся с помощью этих новых исчислений. Символика и формы этих исчислений были здесь, правда, необязательны. Гюйгенс, не чувствовавший потребности в новых формах и некоторое время даже отвергавший их, мог с успехом соревноваться в решении таких задач с своими младшими собратьями. В „Началах" Ньютона мы имеем еще большее количество таких задач, решенных им, — по крайней мере в данном им изложении, — без применения исчисления флюксий или диференциального исчисления. При всем том, задачи, решенные Лейбницем и братьями Бернулли, особенно способствовали выявлению громадных преимуществ нового исчисления бесконечно малых и связанной с ним определенной символики. Декарт дал (стр. 201) общие правила для решения алгебраических задач, согласно которым все как неизвестные, так и известные величины обозначаются буквами, а затем составляются и решаются уравнения, выражающие данные или требуемые соотношения между величинами; теперь эти правила получили распространение и на область инфинитезимальных задач. Уравнения между координатами x и y, их диференциалами dx и dy и элементом дуги ds можно было составлять теперь с помощью характеристического треугольника; углубляя основные соображения, можно было, далее, получать диференциальные уравнения высших порядков. Одновременно, как мы видели, шло дальнейшее развитие способов интегрирования таких уравнений. Решение задач подобного рода становилось, таким образом, доступно все более широким кругам. Самих авторов новых методов решение поставленных ими задач приводило к новым задачам, требовавшим дальнейшего развития математического аппарата. Все это, как мы уже говорили, содействовало росту интегрального исчисления; в то же время вставали, однако, вопросы, требовавшие инфинитезимальных исследований еще более глубокого рода. Благодаря таким вопросам положено было основание вариационному исчислению.

Сказанное тотчас же станет ясным, как только мы укажем хотя бы некоторые из решенных таким образом задач. Лейбниц и Гюйгенс занимались в 1693 г. кривой, которая теперь называется трактрисой (Гюйгенс называл ее тракторией) и которая обладает тем свойством, что отрезок ее касательной от точки касания до определенной прямой имеет данную длину. Лейбниц при этом вряд ли помнил, что Ньютон в своем 2-м письме к нему (1676) указывал именно на эту кривую, как на пример обратной задачи на касательные, которая легко решается и сводится к квадратуре гиперболы, т. е. к логарифмическим функциям. Гюйгенс обобщил эту задачу, заменив данную прямую

произвольною данною кривою. В 1698 г. Иоганн Бернулли, до некоторой степени в соответствии с его уже упоминавшимся нами изображением диференциального уравнения 1-го порядка с помощью системы кривых, занимался так называемыми траекториями, т. е. кривыми, пересекающими данную систему кривых под данным углом.

Из кривых, определенных механическими свойствами, упомянем прежде всего так называемую изохронную кривую; под этим именем понималась не циклоида, по которой тяжелая частица совершает „тавтохронные" (Гюйгенс) или „изохронные" (Ньютон) колебания, но кривая, по которой тяжелая частица движется так, что проекции проходимых ею в равные промежутки времени путей на вертикальную прямую равны между собою. Задачу об определении этой кривой Лейбниц поставил в 1687 г. в „Nouvelles de la République des Lettres" („Новости литературной республики"); Гюйгенс уже в следующем выпуске этого журнала сделал сообщение, что искомая кривая — полукубическая парабола. Доказательство этого Лейбниц дал затем в 1689 г. в „Acta Eruditorum". Он не пользуется здесь диференциальным и интегральным исчислением, хотя в своей черновой работе, судя по дошедшей до нас рукописи, он применял их к этой задаче. Опубликованное доказательство, содержащее применение этих средств, принадлежит Якову Бернулли (1690). Последним была предложена задача, имевшая еще большее значение, — определение фигуры равновесия тяжелой однородной гибкой нити (цепная линия); задача эта была решена Лейбницем, Гюйгенсом и Иоганном Бернулли.

Лейбниц обратил впоследствии внимание на то, что эта задача сводится к определению кривой, центр тяжести которой лежит возможно ниже. Неизвестная кривая определяется здесь, следовательно, тем, что соответствующий ей интеграл имеет минимальное или максимальное значение. Здесь нет, таким образом, известной функции, максимум или минимум которой мог бы быть определен диференцированием; поэтому для составления диференциального уравнения соответствующей кривой должны быть применены особые соображения. Задача подобного же рода была, однако, уже раньше решена Ньютоном в „Началах". Это была задача об определении меридианной кривой поверхности вращения, движение которой в направлении оси встречало бы наименьшее сопротивление среды. Ньютон нашел для нее (в геометрической форме) диференциальное уравнение $y = k \cdot \frac{ds^4}{dy^3\,dx}$. Задача эта относится к тем обратным задачам на касательные, которые Ньютон, судя по сообщению, сделанному им Лейбницу, мог решить, не прибегая к разложению в ряд, т. е. путем сведения к квадратуре.

Новая задача того же рода была предложена в 1696 г. Иоганном Бернулли. Она касалась брахистохронной кривой, т. е. кривой, по которой тяжелая частица падает из одной точки в

другую в наивозможно кратчайшее время. Кроме его самого, его брат Яков, Лейбниц, Ньютон и Лопиталь нашли вскоре, что эта кривая есть циклоида. Получить решение им всем удалось благодаря некоторым особым обстоятельствам, связанным с этою задачею. Яков Бернулли напал, однако, на более общий путь решения задач такого рода и смог поэтому в 1697 г. предложить новую задачу более общего характера — так называемую *изопериметрическую проблему*. Проблема эта состоит в требовании среди всех кривых, дуги которых между двумя данными точками имеют равную длину, найти кривую, удовлетворяющую следующему условию: площадь, ограниченная кривою, каждая ордината которой составляет определенное кратное соответствующей (той же абсциссе) ординаты или длины дуги искомой кривой, ординатами в конечных точках и лежащим между ними отрезком оси абсцисс, должна иметь максимальное или минимальное значение.

Старания Иоганна Бернулли решить эту общую задачу не увенчались успехом; правильное и общее решение было дано лишь самим Яковом Бернулли в его статьях по этому вопросу, появившихся в 1700—1701 гг. Мы не будем говорить здесь не только об этих работах, но и о предшествовавшем решении задачи о брахистохронной кривой и других задач подобного рода, которые Иоганн Бернулли противопоставил общим задачам своего брата. Все это принадлежит уже к подготовке вариационного исчисления, получившего свое дальнейшее развитие лишь в XVIII в. Отметим еще только по поводу той формы, в которой была поставлена изопериметрическая задача, что здесь в самом конце столетия применяется еще все то же геометрическое изображение совершенно произвольной данной функции посредством кривой (стр. 344).

Сделанный нами обзор инфинитезимальных исследований последнего 15-летия XVII в. свидетельствует об энергичной и успешной работе в области применения и дальнейшего развития новых методов и указывает, что в новый век математика вступила обогащенной и новыми задачами и новыми средствами для их решения.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

[1] В предметном указателе даны ссылки только на те страницы книги, где данный вопрос рассматривается по существу; в именном указателе курсивом набраны номера страниц, содержащих биографические сведения о данном лице.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

СЕРИЯ — КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Листинг
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТОПОЛОГИИ
Перевод с немецкого под редакцией и с предисловием Э. Кольмана
Стр. 116 Ц. 2 р. 75 к., пер 1 р.

Архимед
ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК (ПСАМИТ)
Перевод, краткий обзор работ Архимеда и примечания проф. Г. Н. Попова.
Стр. 104 Ц. 1 р. 75 к., пер 1 р. 25 к.

Томас Эндрюс
О НЕПРЕРЫВНОСТИ ГАЗООБРАЗНОГО И ЖИДКОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА
Перевод Е. Сиротина под ред. и с примечаниями А. Бачинского
Стр 120 Ц. 2 р., пер. 1 р. 25 к.

Гёмфри Дэви
О НЕКОТОРЫХ ХИМИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА
Перевод, биографический очерк и примечания А. Н. Фрумкина
Стр. 160 Ц. 1 р. 75 к., пер 1 р. 25 к.

Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль
НАЧАЛА ГИДРОСТАТИКИ
Перевод, примечания и вступительная статья А. Н. Долгова
Стр. 404 Ц. 4 р., пер. 1 р. 50 к.

Лазарь Карно
РАЗМЫШЛЕНИЯ О МЕТАФИЗИКЕ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ ВЕЛИЧИН
Вступительная статья А. П. Юшкевича. Очерк жизни Лазаря Карно—М. Э. Подгорного

ВЫХОДЯТ ИЗ ПЕЧАТИ

Галилей
БЕСЕДЫ, т. I

Декарт
КОСМОГОНИЯ

